

И. В. Деревич, Т. А. Фролова

**КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ
В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ**

На основе функционального подхода иллюстрируется явление образования областей повышенной концентрации частиц в случайном поле скорости сплошной среды. Получены замкнутые уравнения для функции плотности вероятности концентрации частиц в приближении Эйлера и Лагранжа. Показана динамика формирования кластеров частиц примеси. Выявлена конкурирующая роль энергоемких (крупномасштабных) и мелкомасштабных флуктуаций скорости несущей среды в процессе формирования областей с повышенной локальной концентрацией частиц.

E-mail: DerevichIgor@gmail.com, bloody.linux@gmail.com

Ключевые слова: функция плотности распределения вероятности, функциональная производная, кластеры частиц, описание Эйлера и Лагранжа, флуктуации скорости, спектр флуктуаций скорости

Введение. Постановка задачи. Образование локальных областей с повышенной концентрацией частиц широко распространено в природе. Яркими примерами являются облака в атмосфере и локализация плавучих примесей на поверхности океана. Законченной теории явления локализации (кластеризации) дисперсных примесей в турбулентных потоках в настоящее время нет. Распространенный метод исследования образования областей с повышенной концентрацией частиц — прямое численное моделирование турбулентных потоков с дисперсной примесью инерционных частиц ([1–3]). Методы прямого численного моделирования предъявляют повышенные требования к быстродействию компьютеров и объему сохраняемой информации. Последующее осреднение результатов стохастического моделирования позволяет получать информацию, имеющую практический интерес.

В теоретических исследованиях явления кластеризации в настоящее время можно выделить два подхода.

Первый подход основан на свойствах инерции частиц и локальной неоднородности распределения энергии хаотического движения частиц в зависимости от относительной координаты [4, 5]. В инерционной модели случайное сближение частиц вследствие их инерции может приводить к образованию кластерной структуры. Однако в рамках этой модели невозможно объяснить целый ряд явлений. Например, локализацию плавучей примеси на поверхности случайных волн в океане. Образование кластерных структур в атмосфере, когда инерцией мелких капель можно пренебречь.

Второй подход использует свойства локальной случайной дивергенции поля скорости несущей среды [6]. При осреднении поле ско-

рости несущей среды является несжимаемым, бездивергентным. Однако флуктуации дивергенции локальной скорости отличны от нуля. На поверхности океана это можно трактовать как проявление случайных складок (микроволн). В этой модели явление кластеризации может трактоваться как эффект стохастического притяжения частиц в случайном поле скорости несущей фазы.

Данная работа сделана в рамках второго подхода. Идея второго подхода принадлежит В.И. Кляцкину [6, 7]. В работе проведен детальный анализ модели со случайной дивергенцией поля скорости несущей фазы. Получен ряд новых результатов, в частности, выявлена конкурирующая роль энергоемких (крупномасштабных) и мелкомасштабных флуктуаций скорости несущей среды.

Уравнения баланса концентрации частиц. Описание Лагранжа и Эйлера. Исследуется движение частиц в случайном статистически стационарном и статистически однородном поле скорости сплошной среды. Флуктуации скорости несущей фазы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ моделируются случайным процессом Гаусса. Осредненного потока нет, среднее от флуктуаций скорости среды $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$. Здесь угловыми скобками обозначено осреднение по ансамблю реализаций случайного поля. Рассматриваем точечные безынерционные частицы без учета силы тяжести. Уравнение для координаты частицы α имеет вид

$$\frac{d\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)}{dt} = \mathbf{V}^{(\alpha)}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t), t), \quad (1)$$

где $\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)$ — радиус-вектор частицы α , $\mathbf{V}^{(\alpha)}(t)$ — скорость частицы α .

Используя дельта-функцию Дирака, записываем выражение для числовой концентрации частиц $\rho(\mathbf{x}, t)$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)), \quad (2)$$

где N — суммарное число частиц в объеме течения.

Производная по времени от (2) равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)) \frac{dX_i^{(\alpha)}(t)}{dt} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)) \mathbf{u}(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t), t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (3) \end{aligned}$$

Используя в (3) выражение (2), получаем уравнение баланса концентрации частиц в описании Эйлера

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \rho(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) переписываем в виде

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}. \quad (5)$$

Из уравнения (4) видно, что изменение концентрации связано с локальной случайной дивергенцией скорости несущей фазы. В переменных Лагранжа подставим в (5) вместо координаты Эйлера \mathbf{x} случайную координату частицы $\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t), t)}{dt} &= \left[\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)} = \\ &= -\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}^{(\alpha)}(t)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнения в переменных Лагранжа (6) следует, что изменение концентрации дисперсной примеси вдоль траектории выделенной частицы обусловлено дивергенцией флуктуаций скорости несущей среды.

Индикаторные функции в переменных Эйлера и Лагранжа.

В соответствии с двумя подходами Эйлера и Лагранжа мы определим две индикаторные функции, которые выделяют случайные траектории в фазовом пространстве концентраций.

В описании Эйлера вводим индикаторную функцию, описывающую случайную концентрацию частиц в фазовом пространстве [6]

$$\varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) = \delta(\rho - \rho(\mathbf{x}, t)), \quad (7)$$

где ρ — координата в фазовом пространстве концентраций.

Уравнение для индикаторной функции (7) получается в результате дифференцирования $\varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)$ по времени

$$\frac{\partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \delta(\rho - \rho(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right\}. \quad (8)$$

С учетом уравнения (5) уравнение для индикаторной функции (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \\ &= \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) + u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение незамкнуто относительно функции $\varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)$. Однако можно заметить, что последнее слагаемое в (9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right\}. \quad (10)$$

С учетом (10) и (9) получаем замкнутое уравнение для индикаторной функции в переменных Эйлера

$$\frac{\partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \}. \quad (11)$$

Начальное значение индикаторной функции в переменных Эйлера имеет вид

$$\varphi_E^\circ(\rho, \mathbf{x}) = \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, 0) = \delta(\rho - \rho^\circ(\mathbf{x})). \quad (12)$$

Здесь $\rho^\circ(\mathbf{x})$ – начальное распределение концентрации частиц.

В переменных Лагранжа вводим индикаторную функцию, описывающую изменение концентрации дисперсной примеси вдоль выделенной случайной траектории частицы α

$$\varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) = \delta(\rho - \rho(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t), t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)). \quad (13)$$

В результате дифференцирования $\varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t)$ (13) по времени, записываем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} = \\ = -\frac{\partial}{\partial \rho} \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \frac{d\rho(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t), t)}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \frac{dX_i^{(\alpha)}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя в (14) уравнение (6) для изменения концентрации частиц вдоль траектории частицы α , получаем замкнутое уравнение для индикаторной функции в переменных Лагранжа [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ u_i(\mathbf{x}, t) \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \} = \\ = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Начальное значение индикаторной функции в переменных Лагранжа задает начальную координату выделенной частицы и начальное значение плотности на ее траектории $\rho^\circ(\mathbf{x})$

$$\varphi_L^\circ(\rho, \mathbf{x}) = \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, 0) = \delta(\rho - \rho^\circ(\mathbf{x})) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(0)).$$

Из уравнений (11) и (15) видна существенная разница в индикаторных функциях в переменных Эйлера и Лагранжа.

Уравнения для функций плотности вероятности Эйлера и Лагранжа. Осреднение индикаторных функций по ансамблю реализаций

флуктуаций скорости несущей фазы приводит к функциям плотности вероятности (ФПВ) распределения случайных концентраций частиц. В переменных Эйлера ФПВ имеет вид

$$\Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t) = \langle \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\rho - \rho(\mathbf{x}, t)) \rangle.$$

Осреднение уравнения для индикаторной функции (11) приводит к незамкнутому уравнению для ФПВ в переменных Эйлера [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \left\langle u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right\rangle = \\ = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho \left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

ФПВ определена в диапазоне $0 < \rho < \infty$ и удовлетворяет следующим ограничениям

$$\begin{aligned} \Phi_E(\rho, t)|_{\rho=0} = \\ = 0, \quad \Phi_E(\rho, t)|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial^n \Phi_E(\rho, t)}{\partial \rho^n} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \int_0^\infty \Phi_E(\rho, t) d\rho = 1. \end{aligned}$$

Корреляции между индикаторной функцией и случайной скоростью среды и ее производными нуждаются в раскрытии. Это будет сделано в дальнейшем в приближении дельта-коррелированных во времени флуктуаций скорости несущей среды.

ФПВ распределения концентрации в описании Эйлера позволяет вычислить моменты плотности частиц $\langle \rho_E^n(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^\infty \rho^n \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t) d\rho$.

В переменных Лагранжа функция плотности вероятности получается в результате осреднения по ансамблю случайных реализаций поля скорости жидкой фазы

$$\Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t) = \langle \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\rho - \rho(\mathbf{X}^{(\alpha)}(t), t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(t)) \rangle.$$

Незамкнутое уравнение для функции плотности вероятности в переменных Лагранжа [6] следует из (15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i(\mathbf{x}, t) \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \rangle = \\ = \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Моменты случайной концентрации в переменных Лагранжа находятся по формуле $\langle \rho_L^n(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^\infty \rho^n \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t) d\rho$.

Замыкание уравнений для функции плотности вероятности.

Для получения замкнутого уравнения для функции плотности вероятности в переменных Эйлера (16) необходимо вычислить корреляции $\langle u_i(\mathbf{x}, t) \partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) / \partial x_i \rangle$ и $\langle \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \partial u_i(\mathbf{x}, t) / \partial x_i \rangle$. Для дельта-коррелированного во времени случайного процесса Гаусса $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ расщепление корреляций осуществляем с использованием формулы Фурутсу-Новикова [6, 7]. Методика работы с функциональными производными описана ниже в разделе 6.

Выражение для функциональной производной от индикаторной функции в описании Эйлера (7) следует из уравнения (11)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\delta u_j(\mathbf{y}, t - 0)} &= \\ &= -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя выражение (18) и формулу Фурутсу-Новикова, получаем замкнутое представление для корреляций в уравнении в переменных Эйлера (16)

$$\begin{aligned} \left\langle u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right\rangle &= \\ &= -T_E \langle u_i^2 \rangle \frac{\partial^2 \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_i} - T_E \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \right\rangle = T_E \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \}. \quad (20)$$

Подставив формулы (19) и (20) в уравнение (16), получаем замкнутое уравнение для ФПВ распределения концентрации частиц в переменных Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} - T_E \langle u_i^2 \rangle \frac{\partial^2 \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_i} &= \\ &= T_E \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \{ \rho^2 \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t) \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение (21) описывает два физических процесса. Во-первых, диффузию частиц в физическом пространстве с коэффициентом диффузии, обусловленным энергоемкими флуктуациями несущей среды $D_E = T_E \langle u_i^2 \rangle$. Во-вторых, изменение структуры распределения концентрации частиц. Этот эффект связан с микромасштабными случайными движениями жидкой фазы и его интенсивность пропорциональна осредненному квадрату дивергенции флуктуаций скорости несущей среды $\langle (\partial u_i / \partial x_i)^2 \rangle$.

Уравнение для расчета средней концентрации частиц в физическом пространстве $\langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^{\infty} \rho \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t) d\rho$ следует из (21) при интегрировании по всему пространству концентраций. Учитывается, что ФПВ обращается в нуль при нулевом и бесконечном значениях концентрации частиц

$$\frac{\partial \langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle}{\partial t} = D_E \Delta \langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Начальное распределение концентрации следует из начального условия (12) $\langle \rho(\mathbf{x}, 0) \rangle = \rho^\circ(\mathbf{x})$.

ФПВ распределения случайной концентрации частиц в произвольной точке пространства $\Phi_E(\rho, t)$ равна $\Phi_E(\rho, t) = \int \Phi_E(\rho, \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$.

Уравнение для расчета $\Phi_E(\rho, t)$ вытекает из (21) при интегрировании по всему физическому пространству

$$\frac{\partial \Phi_E(\rho, t)}{\partial t} = T_E \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \{ \rho^2 \Phi_E(\rho, t) \}. \quad (22)$$

Начальное условие для уравнения (22) $\Phi_E^\circ(\rho) = \Phi_E(\rho, 0) = \delta(\rho - \rho^\circ)$.

Для вывода замкнутого уравнения для ФПВ в переменных Лагранжа (17) необходимо вычислить корреляции флуктуаций скорости и ее производных с индикаторной функцией $\langle u_i(\mathbf{x}, t) \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \rangle$ и $\langle \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \partial u_i(\mathbf{x}, t) / \partial x_i \rangle$.

Выражение для функциональной производной от индикаторной функции следует из уравнения (15)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t)}{\delta u_j(\mathbf{y}, t - 0)} = \\ = -\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \} + \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \}. \end{aligned} \quad (23)$$

На основе выражения (23) и формулы Фурутсу-Новикова получаем замкнутое представление для корреляций индикаторной функции в переменных Лагранжа (17)

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \rangle = -T_E \langle u_i^2 \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t), \quad (24)$$

$$\left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \varphi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \right\rangle = T_E \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t). \quad (25)$$

Подставив формулы (24) и (25) в уравнение (17), находим замкнутое уравнение для ФПВ распределения концентрации частиц вдоль

траектории выделенной частицы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} - T_E \langle u_i^2 \rangle \frac{\partial \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_i} = \\ = T_E \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Начальное условие для уравнения (20) $\Phi_L^\circ(\rho, \mathbf{x}) = \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, 0) = \delta(\rho - \rho^\circ(\mathbf{x}))\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\alpha)}(0))$.

Уравнение (26) представляет два процесса массопереноса. Во-первых, диффузию распределения частицы α в физическом пространстве. Средняя концентрация вдоль траектории частицы $\langle \rho_L(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^\infty \rho \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t) d\rho$.

Уравнение для средней концентрации $\langle \rho_L(\mathbf{x}, t) \rangle$ следует из уравнения (26) в результате интегрирования по пространству концентраций

$$\frac{\partial \langle \rho_L(\mathbf{x}, t) \rangle}{\partial t} = D_E \frac{\partial \langle \rho_L(\mathbf{x}, t) \rangle}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Начальное значение средней концентрации следует из (12) и равно $\langle \rho_L(\mathbf{x}, t) \rangle = \rho^\circ(x)$.

ФПВ распределения концентрации вдоль траектории частицы $\Phi_L(\rho, t) = \int \Phi_L(\rho, \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ получается в результате интегрирования (26) по всему физическому пространству

$$\frac{\partial \Phi_L(\rho, t)}{\partial t} = T_E \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_L(\rho, t) \right\}. \quad (27)$$

Начальное условие для уравнения (27) — значение концентрации на траектории $\Phi_L^\circ(\rho) = \Phi_L(\rho, 0) = \delta(\rho - \rho^\circ)$.

Вычисление функциональных производных. В этом разделе представлены основные методы функционального дифференцирования, использующиеся при раскрытии корреляций в незамкнутых уравнениях для индикаторных функций в представлении Эйлера и Лагранжа.

При раскрытии корреляции функционала $\Phi[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]$ со случайным полем Гаусса $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ привлекаем формулу Фурутсу-Новикова [7]

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{x}, t) \Phi[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \rangle = \\ = \int d\mathbf{y} \int_0^t d\xi \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{y}, \xi) \rangle \left\langle \frac{\delta \Phi[u(\mathbf{x}, t)]}{\delta u_j(\mathbf{y}, \xi)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

При вычислении функциональной производной $\langle \delta\Phi[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] / \delta u_j(\mathbf{y}, \xi) \rangle$ в (28) используются два правила. Основное правило функционального дифференцирования $\langle \delta u_i(\mathbf{x}, t) / \delta u_i(\mathbf{y}, \xi) \rangle = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \delta(t - \xi)$ и условие физической причинности [7]

$$\left\langle \frac{\delta\Phi[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]}{\delta u_j(\mathbf{y}, \xi)} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi > t \\ \neq 0 & \text{при } \xi \leq t \end{cases} .$$

Для дельта-коррелированного во времени случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ $\langle u_i(\mathbf{x}', t') u_j(\mathbf{x}'', t'') \rangle = \delta_{ij} 2T_E \langle u_i^2 \rangle \delta(t' - t'') \Psi_o(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')$ формула Фуртсу-Новикова упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{x}, t) \Phi[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \rangle &= \\ &= \delta_{ij} \langle u_i^2 \rangle T_E \int d\mathbf{y} \Psi_o(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left\langle \frac{\delta\Phi[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]}{\delta u_j(\mathbf{y}, t - 0)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Функциональная производная от функционала $\Phi[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]$ в (29) может быть рассчитана исходя из уравнения для индикаторной функции. Записываем в общем виде уравнение для индикаторной функции

$$\frac{\partial \varphi(\rho, \mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Omega[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \varphi(\rho, \mathbf{x}, t)]. \quad (30)$$

Правая часть (30) является функционалом от случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Уравнение (30) переписываем в интегральном виде

$$\varphi(\rho, \mathbf{x}, t) = \varphi_o(\rho, \mathbf{x}) + \int_0^t \Omega[\mathbf{u}(\mathbf{x}, s), \varphi(\rho, \mathbf{x}, s)] ds. \quad (31)$$

Здесь $\varphi_o(\rho, \mathbf{x})$ — начальное значение индикаторной функции независимое от случайных флуктуаций скорости несущей среды.

Применяя операцию функционального дифференцирования $\langle \delta / \delta u_j(\mathbf{y}, \xi) \rangle$ к уравнению (31), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi(\rho, \mathbf{x}, t)}{\delta u_j(\mathbf{y}, \xi)} &= \int_0^t \frac{\partial \Omega[\mathbf{u}(\mathbf{x}, s), \varphi(\rho, \mathbf{x}, s)]}{\partial u_k} \frac{\delta u_k(\mathbf{x}, s)}{\delta u_j(\mathbf{y}, \xi)} ds + \\ &+ \int_{\xi}^t \frac{\partial \Omega[\mathbf{u}(\mathbf{x}, s), \varphi(\rho, \mathbf{x}, s)]}{\partial \varphi} \frac{\delta \varphi(\rho, \mathbf{x}, s)}{\delta u_j(\mathbf{y}, \xi)} ds. \end{aligned} \quad (32)$$

При записи (32) учтено условие физической причинности. Для дельта-коррелированного во времени случайного процесса в (32) остается только первый интеграл, который приводит к выражению для

функциональной производной

$$\frac{\delta\varphi(\rho, \mathbf{x}, t)}{\delta u_j(\mathbf{y}, t-0)} = \frac{\partial\Omega[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \varphi(\rho, \mathbf{x}, t)]}{\partial u_k} \delta_{kj} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Статистические свойства случайного поля скорости среды.

В этом разделе иллюстрируется связь между формой автокорреляционной функцией флуктуаций скорости среды и мелкомасштабной структурой. Рассматривается статистически однородное статистически стационарное поле флуктуаций скорости несущей среды. Двухточечная двухвременная корреляция флуктуаций скорости среды имеет вид [8]

$$\langle u_i(\mathbf{x}', t') u_j(\mathbf{x}'', t'') \rangle = \delta_{ij} \langle u_i^2 \rangle \Psi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'', t' - t''),$$

где $\langle u_i^2 \rangle$ — осредненный квадрат флуктуаций скорости несущей фазы, $\Psi(\mathbf{x}, t)$ — автокорреляционная функция.

Временной интегральный масштаб для автокорреляционной функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ равен $T_E = \int_0^\infty \Psi(0, s) ds$. Флуктуации скорости жидкости моделируются дельта-коррелированный во времени случайным процессом

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = 2T_E \delta(t) \Psi_0(\mathbf{x}), \quad \Psi_0(0) = 1,$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Спектральное разложение поля флуктуаций скорости имеет вид [8]

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\sigma_i(\mathbf{k}, t), \quad (33)$$

где i — мнимая единица, \mathbf{k} — волновой вектор, $d\sigma_i(\mathbf{k}, t)$ — элемент случайной меры в пространстве волновых чисел.

Используя (33), записываем выражение для двухточечной корреляции флуктуаций скорости среды

$$\langle u_i(\mathbf{x}', t) u_j(\mathbf{x}'', t) \rangle = \int \int e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}' + i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}''} \langle d\sigma_i(\mathbf{k}', t) d\sigma_j(\mathbf{k}'', t) \rangle. \quad (34)$$

Из условия статистической однородности и стационарности (33) получаем функциональный вид корреляции в (34)

$$\langle d\sigma_i(\mathbf{k}', t) d\sigma_j(\mathbf{k}'', t) \rangle = \delta_{ij} \langle u_i^2 \rangle B(\mathbf{k}', t) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') d\mathbf{k}' d\mathbf{k}''. \quad (35)$$

Здесь $\delta(\mathbf{k})$ — трехмерная функция Дирака, $B(\mathbf{k}, t)$ — спектральная плотность.

Подставив (35) в выражение (34), получаем спектральное разложение автокорреляционной функции флуктуаций скорости сплошной среды

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} B(\mathbf{k}, t). \quad (36)$$

Спектральная функция в физическом пространстве определяется по автокорреляции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ следующим образом

$$B(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (37)$$

Процесс кластеризации примеси зависит от микромасштаба, который характеризует поведение автокорреляционной функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$ вблизи нуля. Микромасштаб определяется вторыми производными от автокорреляционной функции $\langle (\partial u_i(\mathbf{x}, t) / \partial x_i)^2 \rangle$. Осредненный квадрат производной вычисляем, используя спектральное представление (33)

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = - \int \int k'_i k''_i e^{ik'\cdot\mathbf{x} + ik''\cdot\mathbf{x}} \langle d\sigma_i(\mathbf{k}', t) d\sigma_i(\mathbf{k}'', t) \rangle.$$

Здесь по дважды повторяющемуся индексу производится суммирование.

С учетом (..) записываем осредненный квадрат производной от флуктуаций скорости жидкости

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \langle u_i^2 \rangle \int d\mathbf{k} k_i^2 B(\mathbf{k}).$$

Из последнего выражения и (37) вытекает связь между осредненным квадратом производной от флуктуации скорости среды и автокорреляционной функцией

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = - \langle u_i^2 \rangle \left. \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=0}.$$

Из последнего выражения и уравнений (21) и (26) следует, что процесс кластеризации является результатом двух конкурирующих тенденций: турбулентной диффузии, приводящей к однородному распределению частиц, и макромасштабного коррелированного движения, имеющего дивергентный характер.

Решение уравнений для ФПВ. В этом разделе представлены решения уравнений для ФПВ распределения концентрации частиц в переменных Эйлера (22) и Лагранжа (27). Эти уравнения диффузии с переменным коэффициентом диффузии в пространстве концентраций. Их решения отражают различную физику формирования областей с повышенной концентраций частиц в переменных Эйлера и Лагранжа.

Распределение кластеров частиц в переменных Эйлера. В этом разделе представлен анализ решений уравнений для ФПВ в представлении Эйлера. Решение замкнутого уравнения для ФПВ распределения концентрации частиц в произвольной точке пространства следует из уравнения (22)

$$\Phi_E(\rho, t) = \frac{1}{\rho\sqrt{4\pi\Lambda_E t}} \exp \left[-\frac{\ln^2 (e^{\Lambda_E t} \rho / \rho_0)}{4\Lambda_E t} \right].$$

Рис. 1 показывает изменение ФПВ относительной концентрации $\rho^* = \rho/\rho_0$ частиц в зависимости от безразмерного времени $t^* = \Lambda_E t$. Видно, что с течением времени наиболее вероятное значение концентрации в пространстве стремится к нулю. Это свидетельствует об образовании “жгутов” частиц с большой локальной концентрацией. Следует отметить, что средняя концентрация частиц при этом неизменна. Это видно из системы уравнений для моментов, которая вытекает из уравнения (22)

$$\frac{d\langle \rho_E^n(t) \rangle}{dt} = \Lambda_E n(n-1) \langle \rho_E^n(t) \rangle.$$

Видно, что средняя концентрация ($n = 1$) постоянна, однако второй момент случайной концентрации частиц ($n = 2$) растет со временем. Это можно трактовать как рост фрактальных структур в пространстве.

Распределение кластеров частиц в переменных Лагранжа. Решение уравнения для ФПВ распределения концентрации частиц в представлении Лагранжа (27) имеет вид [9, 10]

$$\Phi_L(\rho, t) = \frac{1}{\rho\sqrt{4\pi\Lambda_E t}} \exp \left[-\frac{\ln^2 (e^{-\Lambda_E t} \rho / \rho_0)}{4\Lambda_E t} \right].$$

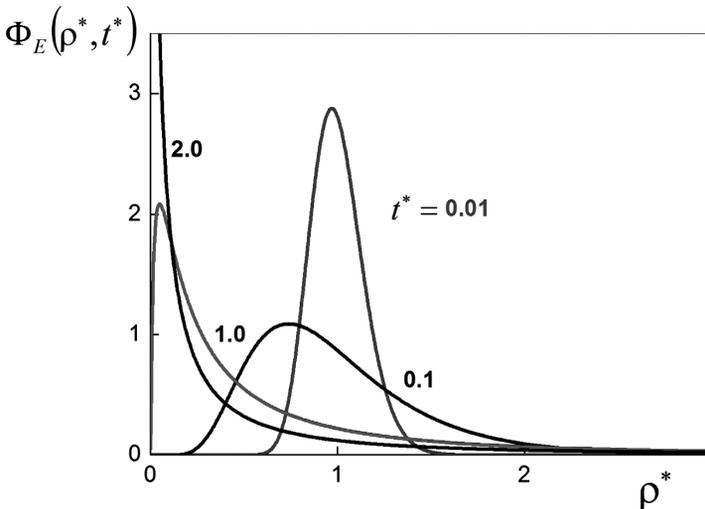


Рис. 1. Функция плотности вероятности распределения безразмерной концентрации частиц ρ^* в представлении Эйлера для различных значений безразмерного времени t^*

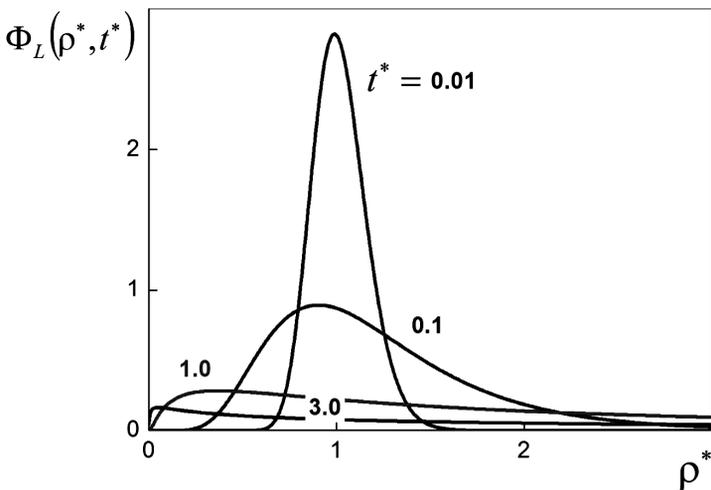


Рис. 2. Функция плотности распределения безразмерной концентрации частиц ρ^* в представлении Лагранжа для различных значений безразмерного времени t^*

Для безразмерной концентрации частиц ρ^* и различных моментов времени t^* решение уравнения для ФПВ Лагранжа иллюстрируется на рис. 2. Видно, что с ростом времени в распределении появляются “тяжелые хвосты”, соответствующие большим случайным концентрациям примеси вдоль траектории частицы.

Уравнение для моментов в представлении Лагранжа следует из (27) и имеет вид

$$\frac{d \langle \rho_L^n(t) \rangle}{dt} = \Lambda_E n (n + 1) \langle \rho_L^n(t) \rangle.$$

Видно, что средняя концентрация примеси ($n = 1$) экспоненциально увеличивается вдоль траектории произвольно выбранной частицы. Экспоненциально растут также моменты концентрации, что свидетельствует об образовании локальных, перемещающихся в пространстве областей с повышенной концентрацией частиц.

Заключение. Работа иллюстрирует эффективность элементов современного функционального анализа при изучении процессов переноса в случайных гидродинамических полях. Привлечение функциональных подходов существенно расширяет возможности традиционных методов исследования процессов массопереноса.

1. Разработана методика детального описания процесса кластеризации пассивной примеси в статистически однородных и статистически стационарных случайных полях. Получены замкнутые уравнения для распределения примеси частиц в полях со случайной дивергенцией в переменных Лагранжа и Эйлера.

2. Установлено, что явление кластеризации примеси частиц является результатом конкуренции двух процессов. Относительная диф-

фузия частиц способствует реализации однородного профиля частиц. Интенсивность процесса относительной диффузии связана с энергоемкой частью спектра флуктуаций скорости несущей среды. Процесс кластеризации связан с микромасштабной частью спектра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chen L., Goto S., Vassilicos J. C. Turbulent clustering of stagnation points and inertial particles // *J. Fluid Mech.* – 2006. – Vol. 553. – P. 143–154.
2. Falkovich G., Pumir A. Intermittent distribution of heavy particles in a turbulent flow // *Phys. Fluids.* – 2004. – Vol. 16. – P. L47–L50.
3. Fessler J. R., Kulick J. Preferential concentration of heavy particles in a turbulent channel flow // *Phys. Fluids.* – 1994. – Vol. 6. – P. 3742–3749.
4. Zaichik L. I., Alipchenkov V. M. Pair dispersion and preferential concentration of particles in isotropic turbulence // *Phys. Fluids.* – 2003. – Vol. 15. – P. 1776–1787.
5. Derevich I. V. Statistical modeling of particles relative motion in a turbulent gas flow // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2006. – Vol. 49. – P. 4290–4304.
6. Кляцкин В. И. Кластеризация и диффузия частиц и плотности пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках // *УФН.* – 2003. – Т. 173. – № 7. – С. 689–710.
7. Кляцкин В. И. Динамика стохастических систем. – М.: Физматлит, 2003. – 240 с.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Часть 2. – М.: Наука, 1967. – 720 с.
9. Saichev A. I., Woyczynski W. A. Distributions in the Physical and Engineering Sciences. Vol. 1. Boston: Birkhauser, 1997. – 331 p.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Пер. с англ. Абрамовиц М., Стиган И. 1979. – 832 с.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012