

**О причинах расхождения результатов расчета  
и эксперимента при определении границ устойчивости  
обращенных стабилизируемых маятников  
(по материалам статьи D.J. Acheson, T. Mullin  
в журнале Nature)**

© В.А. Грибков, Я.Д. Гордин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Проанализированы материалы известной статьи D.J. Acheson, T. Mullin в журнале Nature, посвященной экспериментальному и расчетному определению областей устойчивости одинарного, двойного и тройного обращенных стабилизируемых вибрацией маятников. Отмечено радикальное расхождение результатов расчетов и экспериментов для двойного и тройного маятников (отсутствие согласования расчетных и экспериментальных границ области устойчивости). Для проверки расчетных границ областей устойчивости выполнены недостающие для решения задачи параметры маятниковых систем. Отсутствующие размеры и инерционные характеристики получены исходя из приведенных в статье параметров с использованием номенклатуры размеров на стержневые трубчатые элементы маятников путем численных экспериментов в SOLIDWORKS. По маятниковой теореме D.J. Acheson с применением собственных частот маятников определены уточненные области устойчивости. Для двойного и тройного маятников уточненные расчетные области устойчивости приблизились к экспериментальным в значительном диапазоне изменения параметров возбуждения. Таким образом, подтверждена работоспособность маятниковой теоремы. Доказано, что радикальное расхождение расчетных и экспериментальных границ областей устойчивости в статье D.J. Acheson, T. Mullin вызвано большой погрешностью определения высших собственных частот колебаний двойного и тройного маятников (все собственные частоты получены экспериментально с использованием главных параметрических резонансов маятников).*

**Ключевые слова:** инвертированный физический маятник,  $N$ -звенный маятник, параметрическое возбуждение, динамическая устойчивость, эксперимент

**Введение.** Статья D.J. Acheson, T. Mullin [1] об экспериментальном определении областей устойчивости одинарного, двойного и тройного обращенных маятников, стабилизируемых в вертикальном положении моногармонической вибрацией оси подвеса, является, по-видимому, одной из наиболее известных и цитируемых работ, посвященных экспериментальному исследованию обращенных стабилизируемых маятниковых систем [2–7].

В отличие от других известных экспериментальных работ, в которых были рассмотрены одинарные и состоящие из нескольких звеньев маятники [8–13], в работе D.J. Acheson, T. Mullin [1] экспериментально определены граничные линии областей устойчивости одинарного, двойного и тройного обращенных маятников в некото-

ром диапазоне изменения параметров возбуждения. На наш взгляд, это важное научное достижение работы, как и проверка линейных математических моделей, используемых при решении задачи параметрической стабилизации обращенных  $N$ -звенных маятников.

Проверка маятниковой теоремы [14], выполненная в данной работе, выявила радикальное расхождение результатов расчетов и экспериментов для двойного и тройного маятников (отсутствие согласования расчетных и экспериментальных границ области устойчивости).

Цель работы состоит в нахождении причин, приведших к существенному различию в положении расчетных и экспериментальных областей устойчивости двойного и тройного обращенных маятников, а также проверке работоспособности и эффективности маятниковой теоремы D.J. Acheson. Проверка маятниковой теоремы D.J. Acheson выполнена, в частности, экспериментальным путем и расчетами области устойчивости тройного обращенного маятника, отличающегося от тройного маятника D.J. Acheson, T. Mullin [1].

Приведем толкование нескольких терминов, используемых в данной работе, в частности граничных линий области устойчивости и вертикальных положений (состояний) относительного равновесия маятников. На одной из двух границ (граничных линий) области устойчивости система теряет устойчивость в квазистатике, на другой — в динамике. Будем называть эти границы области устойчивости соответственно *квазистатической* и *динамической*. Под терминами *обращенный*, или *инвертированный*, маятник будем понимать маятник с расположением оси подвеса ниже центра тяжести в отличие от *прямого* маятника, ось подвеса которого выше центра тяжести.

**Результаты проверки маятниковой теоремы D.J. Acheson в статье [1].** Математическая формулировка маятниковой теоремы D.J. Acheson [14] имеет вид двойного неравенства

$$\frac{\sqrt{2}g}{\omega_0\omega_{\min}} < \varepsilon < \frac{0,450g}{\omega_{\max}^2}, \quad (1)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ ;  $\varepsilon$  — амплитуда колебаний оси маятника,  $\text{м}$ ;  $\omega_0$  — циклическая частота параметрического возбуждения,  $\text{с}^{-1}$ ;  $\omega_{\min}$ ,  $\omega_{\max}$  — минимальная и максимальная собственные циклические частоты колебаний прямого маятника,  $\text{с}^{-1}$ .

Теорема позволяет, используя крайние собственные частоты (низшую и высшую) частотного спектра прямых  $N$ -звенных маятников, получить границы области устойчивости маятниковой системы, состоящей из  $N$  последовательно соединенных звеньев. Левое неравенство дает *квазистатическую* границу устойчивости, а правое — *динамическую* границу устойчивости.

Количественные результаты, полученные в статье D.J. Acheson, T. Mullin (расчетные и экспериментальные для одинарного, двойного и тройного маятников), представлены в виде диаграммы (рис. 1).

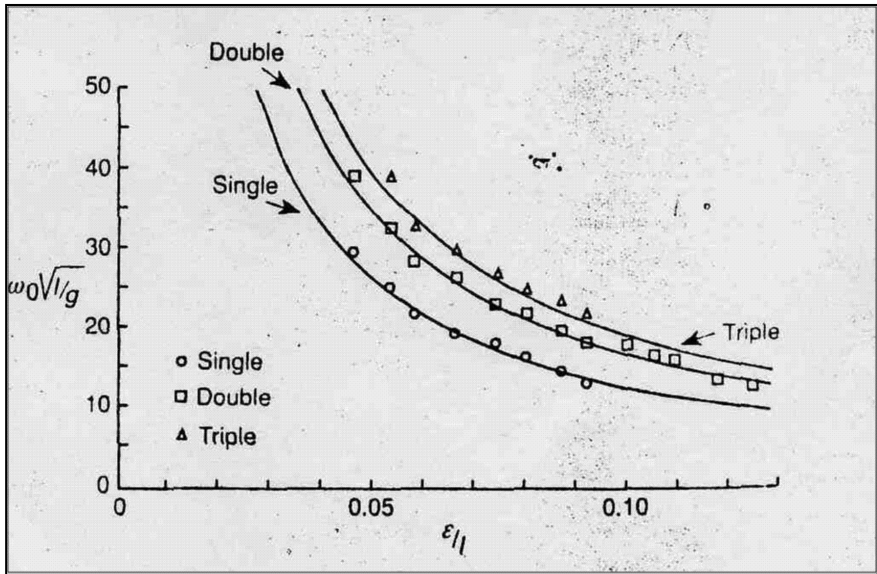


Рис. 1. Расчетные и экспериментальные результаты из статьи D.J. Acheson, T. Mullin (отсканированное изображение)

По вертикальной оси отложен безразмерный частотный параметр  $\omega_0 \sqrt{l/g}$ , по горизонтальной — безразмерный амплитудный параметр  $\epsilon/l$ . Здесь  $l$  — характерный размер, длина звена маятника (звенья трех маятников в статье [1] имеют практически одинаковую длину). Экспериментальные результаты показаны маркерами, расчетные — сплошными линиями. На диаграмме приведены лишь квазистатические границы областей устойчивости. Кажется, что для границ результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако на диаграмме не показано положение второй (динамической) граничной линии области устойчивости. По теореме D.J. Acheson динамическая граничная линия — прямая.

В статье D.J. Acheson, T. Mullin для динамической границы указаны граничные значения амплитудного параметра  $\epsilon/l = 0,091$  для двойного маятника и  $\epsilon/l = 0,044$  для тройного. Если добавить эти границы областей устойчивости на рис. 1, получим диаграмму, приведенную на рис. 2. Область устойчивости для двойного маятника выделена голубым цветом, для тройного — серым.

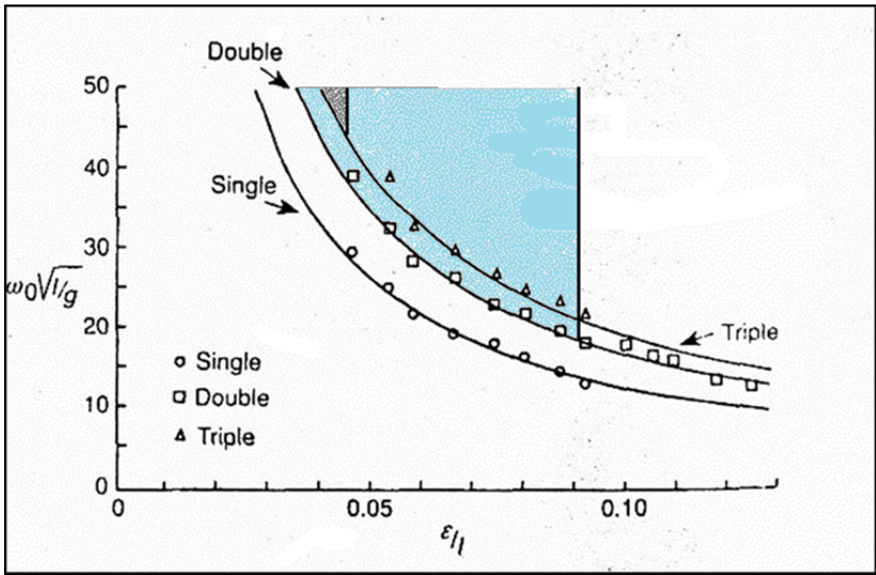


Рис. 2. Области устойчивости двойного и тройного обращенных маятников, рассчитанные по результатам D.J. Acheson, T. Mullin

Оказывается, что все экспериментальные значения для квазистатической границы области устойчивости тройного маятника лежат на диаграмме за пределами расчетной области устойчивости, т. е. там, где система неустойчива. Для двойного маятника результаты лучше, но и для него примерно половина экспериментальных данных выходит за пределы расчетной области устойчивости.

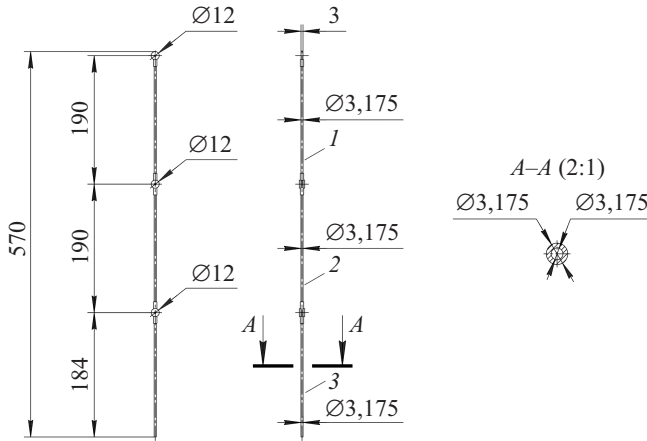
Как отмечают авторы статьи [1], несмотря на выход в эксперименте за пределы области устойчивости, не удалось наблюдать режим динамической неустойчивости и, соответственно, получить экспериментальные результаты для динамической границы области устойчивости ни для одного из трех маятников. Перехода динамической границы не зафиксировано. Предсказанный теорией ожидаемый результат (динамическая неустойчивость при переходе динамической границы) не был получен, хотя положение динамической граничной линии определено по маятниковой теореме D.J. Acheson. Таким образом, можно утверждать, что экспериментальные результаты D.J. Acheson, T. Mullin не подтвердили работоспособность маятниковой теоремы. Области устойчивости, получаемые по маятниковой теореме, не согласуются с экспериментальными результатами (см. рис. 2). Отметим, что заявленная авторами цель статьи заключалась именно в проверке работоспособности маятниковой теоремы D.J. Acheson.

Проверим расчетные результаты статьи D.J. Acheson, T. Mullin. Как уже указывалось, расчетные результаты (граничные линии обла-

стей устойчивости) получены по маятниковой теореме D.J. Acheson [14], в которой в качестве исходных данных выступают высшая и низшая собственные частоты прямого маятника, не возбуждаемого вибрационным воздействием. Низшие и высшие собственные частоты маятников в статье D.J. Acheson, T. Mullin определены экспериментально с использованием параметрических резонансов. Очевидно, получить собственные частоты с применением параметрического возбуждения было далеко не просто, особенно для высших собственных частот (второй для двойного и третьей для тройного маятника). Вероятно, именно большая погрешность определения высших собственных частот и стала причиной расхождения расчетных и экспериментальных данных для динамической границы области устойчивости двойного и тройного маятников. Учитывая, что собственные частоты определяли экспериментально и лишь затем расчетом находили границы области устойчивости по маятниковой теореме, эти области устойчивости (не экспериментальные) точнее называть расчетно-экспериментальными или условно расчетными. Получим прямым расчетом необходимые для определения области устойчивости собственные частоты, используя для этого геометрические и физико-механические параметры маятников, приведенные в статье D.J. Acheson, T. Mullin.

**Уточнение расчетной области устойчивости для двойного и тройного маятников D.J. Acheson, T. Mullin.** Обращенные одинарный, двойной и тройной маятники D.J. Acheson, T. Mullin состоят из стержневых элементов, соединенных через шарнирные узлы (обойма + подшипник). Двойной и одинарный маятники образованы исключением из тройного маятника соответственно одного (концевого) или двух (концевого и среднего) звеньев. Схема тройного маятника представлена на рис. 3. На схеме указаны размеры шарнирного узла и внутренний диаметр стержневого элемента, которые в статье D.J. Acheson, T. Mullin отсутствуют. Эти параметры определены далее.

Стержневые элементы маятников изготовлены из стальных тонкостенных трубок наружным номинальным диаметром 3,175 мм (1/8 дюйма). Материал трубок — коррозионно-стойкая сталь. Длина каждого звена практически одинакова — 190 мм (общая длина тройного маятника вместе с шарнирными узлами составляет 570 мм). Для двойного маятника экспериментальные результаты в области больших амплитудных параметров получены со звеньями меньшей длины (140 мм). Причины использования укороченной модели с меньшими звеньями в статье [1] не объяснены. Экспериментально полученные значения параметров для укороченного маятника нанесены на общую диаграмму (см. рис. 1, 2). Основу шарнирных узлов составляют миниатюрные приборные подшипники наружным диаметром 7 мм.



**Рис. 3.** Схема тройного маятника (в прямом положении):  
 1 — корневое звено; 2 — среднее звено; 3 — концевое звено

Для расчета собственных частот маятников при использовании уравнений движения необходимы не только уже указанные, но и отсутствующие в статье параметры трубки и шарнирных элементов: внутренний диаметр трубки (или толщина стенки трубки), а также конструкция, материал, масса и момент инерции шарнирных узлов.

Для трубок из коррозионно-стойкой стали с наружным диаметром 3,175 мм (1/8 дюйма) американскими и европейскими нормативными документами определены только два возможных номинала толщин стенок: 0,711 и 0,889 мм (внутренний диаметр соответственно 1,753 и 1,397 мм).

Эти размеры можно найти в каталоге американской компании Swagelok (Каталог Swagelok. Tubing data. Printed in U.S.A., AGS, January 2016, RN. <http://www.swagelok.com/downloads/WebCatalogs/en/MS-01-107.pdf>) или британской компании Aalco stainless steel tabular tube (Каталог Aalco. Stainless steel tubing products. No. 2 — Nov. 2015. <http://www.aalco.co.uk/literature/files/aalco-stainless-steel-tube-product-guide.pdf>).

Определение номиналов толщин стенок трубок, использованных в маятниковых моделях D.J. Acheson, T. Mullin, а также выбор других отсутствующих в статье [1] параметров выполнены в данной работе путем твердотельного моделирования и расчетов в пакете SOLIDWORKS (SW). Модели маятников в SW построены с учетом следующих допущений:

- амплитуды колебаний малы, система — линейна;
- колебания маятников происходят в одной плоскости;
- звенья маятников — деформируемые (упругие);
- люфты в шарнирах не учитываются;
- диссипативные силы в системе пренебрежимо малы, трение не принимается во внимание;

- маятники (прямые и обращенные) находятся в поле сил тяжести с ускорением свободного падения  $g$  в вертикальном положении (т. е. в положении относительного равновесия);

- при определении собственных частот и форм колебаний прямых маятников параметрическое возбуждение отсутствует.

Оценки показали, что собственные частоты преимущественно упругих колебаний маятников существенно выше частот преимущественно маятниковых колебаний. По этой причине учет упругости никак не сказывался на результатах расчета маятниковых колебаний.

Принимались следующие значения плотностей и модулей упругости материалов: коррозионно-стойкая сталь —  $8000 \text{ кг/м}^3$  и  $1,9 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; сталь —  $7810 \text{ кг/м}^3$  и  $2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; латунь —  $8500 \text{ кг/м}^3$  и  $0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Определение недостающих (неуказанных) параметров маятников с использованием SW проводилось в несколько этапов. На первом этапе рассматривался одинарный маятник, образованный из корневого звена тройного маятника (см. рис. 3). Погрешность экспериментального определения собственной частоты одинарного маятника даже при использовании параметрического резонанса минимальна по сравнению с погрешностью определения высших частот двойного и тем более тройного маятников. Неопределенные параметры одинарного маятника (корневого звена двойного и тройного маятников) рассчитывали исходя из условия совпадений собственной частоты твердотельной модели маятника и частоты прямого маятника, полученной экспериментально в [1]. Перебирали возможные варианты, например, задавали последовательно два номинала толщины трубки (стержневого элемента маятника)  $0,711$  и  $0,889$  мм.

Конструкция шарнирных узлов моделей (рис. 4, 5) воссоздана с учетом известного внешнего диаметра подшипника ( $7$  мм), типовых схем подобных узлов, а также фотографий маятника, приведенных в статье [1]. На рис. 4 приведен шарнирный узел, на рис. 5, *а* — две проекции корневого шарнира, на рис. 5, *б* — две проекции промежуточных шарниров, связывающих первое, второе и третье звенья маятников. Размеры корневого и среднего звеньев принимались одинаковыми. Концевое звено (на свободном конце маятника) не имеет сегментов шарнирного узла, и поэтому его длина немного меньше. Корневым шарниром любого звена назовем один из двух его шарниров, расположенный ближе к оси подвеса маятника (корневому шарниру всего маятника), другой шарнир звена назовем концевым. Номинальные размеры отверстий шарнирных элементов, соединяемых с трубчатыми элементами, определяются внешним диаметром трубки. Приняты следующие материалы шарнирных узлов: обойма подшипника — латунь, ось шарниров — сталь.

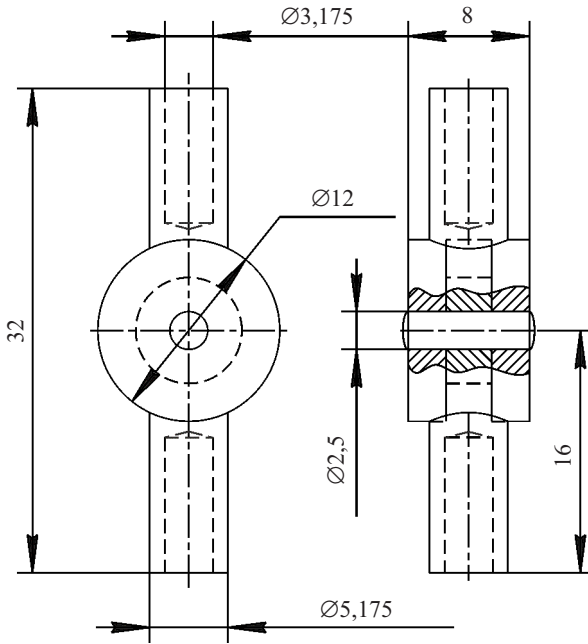


Рис. 4. Шарнирный узел маятника

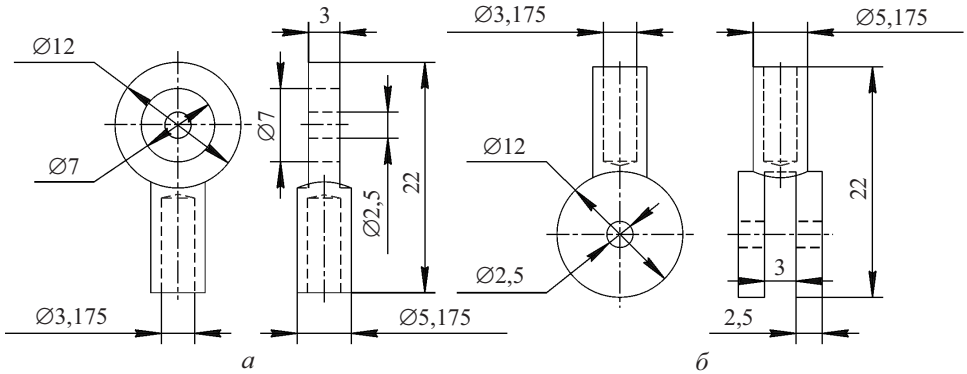


Рис. 5. Шарнирные элементы маятника:  
 а — корневой; б — концевой

Из двух вариантов номиналов толщин трубок по результатам моделирования в SW однозвенного маятника выбрана толщина 0,711 мм (внутренний диаметр трубки 1,753 мм). При использовании этого размера получено очень хорошее согласование собственных частот: 1,227 Гц (эксперимент в [1]) и 1,228 Гц (расчет по параметрам, найденным в SW). Параметры первого звена, определенные из условия совпадения собственных частот твердотельной модели маятника и прямого маятника из статьи [1], приведены в табл. 1, 2.



Таблица 1

**Масса, г, элементов маятника и всего маятника (расчет в SW)**

Номер звена	Трубка	Шарнир звена		Сумма
		корневой	концевой	
1	4,762	3,896	5,735	14,393
2	4,762	3,896	5,735	14,393
3	4,762	3,896	—	8,658
Сумма	14,286	11,688	11,470	37,444

Таблица 2

**Инерционные и геометрические параметры звеньев тройного маятника (расчет в SW)**

Номер звена	$m_i$ , г	$l_i$ , мм	$l_{ci}$ , мм	$I_i$ , г/мм <sup>2</sup>
1	14,393	190	107,253	93241,292
2	14,393	190	107,253	93241,292
3	8,658	184	53,741	30819,423

Примечание:  $m_i$  — масса звена маятника;  $l_i$  — длина звена маятника;  $l_{ci}$  — расстояние от оси корневого шарнира звена до центра масс звена;  $I_i$  — центральный момент инерции звена.

После уточнения параметров одинарного маятника были построены твердотельные модели двойного и тройного маятников и получены их собственные частоты колебаний. Модели в SW строились по размерам трубчатых элементов (см. рис. 3) и чертежам шарнирных узлов (см. рис. 3–5), совпадающих с найденными для одинарного маятника.

Расчетные и экспериментальные низшие собственные частоты двойного и тройного маятников оказались очень близкими (табл. 3). Высшие частоты заметно различались (расхождение значений для тройного маятника составило 35 %). Таким образом, предположение о неточности экспериментального определения высших собственных частот при использовании параметрических резонансов подтвердилось.

Таблица 3

**Расчетные и экспериментальные собственные частоты маятников, Гц**

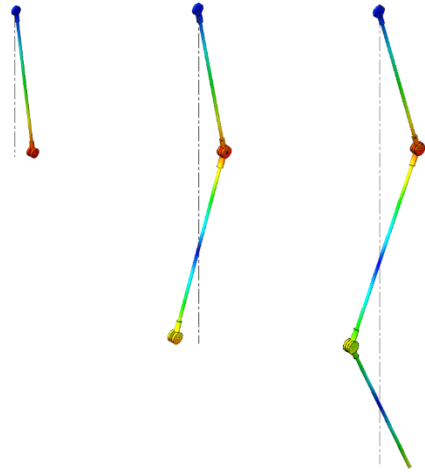
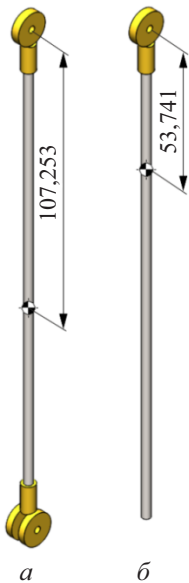
Количество звеньев в маятнике	Эксперимент в [1]	Моделирование в SW
1	1,227	1,228
2	0,935/2,510	0,937/2,078
3	0,824/3,660	0,825/2,711

Примечание. Для двойных и тройных маятников в числителе указаны низшие собственные частоты, в знаменателе — высшие.

Результаты расчетов в SW масс отдельных элементов маятников и маятников в целом, по которым получены приведенные в табл. 3 собственные частоты, представлены в табл. 1. В табл. 2 сведены инерционные и геометрические параметры звеньев, необходимые для расчетов.

На рис. 6 изображены звенья тройного маятника, созданные в SW, указаны положения центров масс и расстояния  $l_{ci}$  от оси корневого шарнирного узла до центра масс звена.

На рис. 7 в качестве иллюстрации приведены собственные формы колебаний одинарного, двойного и тройного маятников. Собственные формы колебаний двойного и тройного маятников показаны для высших собственных маятниковых частот.



**Рис. 6.** Положение центра масс звеньев маятника, отсчитываемое от оси корневого шарнира (прямой маятник):  
 а — корневое и среднее звенья;  
 б — концевое звено

**Рис. 7.** Собственные формы маятниковых колебаний, соответствующие высшим собственным частотам (расчет в SW)

Представим области устойчивости, полученные по маятниковой теореме [14] с использованием уточненных значений собственных частот для двойного и тройного маятников, на диаграмме (рис. 8).

При сопоставлении результатов, полученных в эксперименте и расчетом, видно, что области устойчивости после уточнения параметров стали значительно больше (см. рис. 2, 8). Все экспериментальные точки для двойного и большинство значений для тройного обращенных маятников попадают в уточненные области устойчивости.

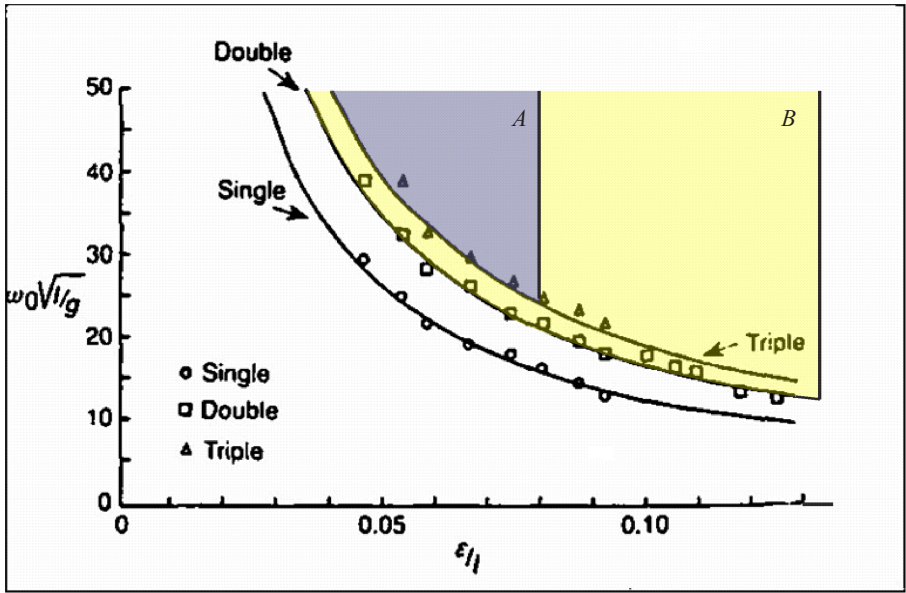


Рис. 8. Уточненные области устойчивости маятников D.J. Acheson, T. Mullin:  
 A — тройного; B — двойного

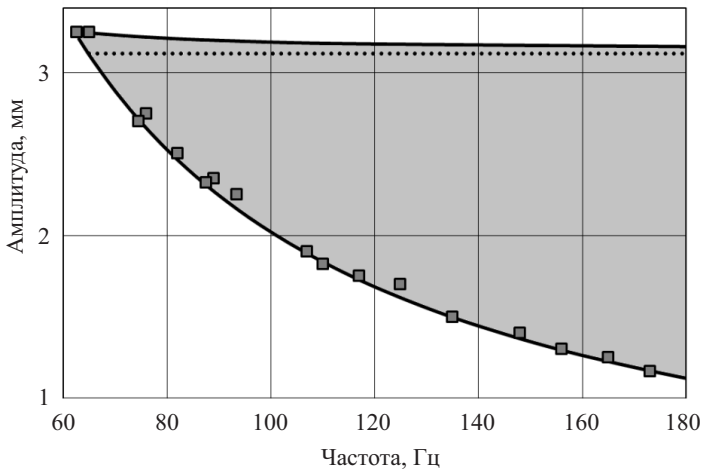
Режим динамической неустойчивости не наблюдался D.J. Acheson, T. Mullin потому, что для двойного маятника перехода через динамическую границу не было, а для тройного переход был слишком незначительным, чтобы скомпенсировать погрешности расчета, вызванные введенными допущениями.

По полученным уточненным результатам можно сделать вывод о работоспособности маятниковой теоремы D.J. Acheson.

**Дополнительная проверка маятниковой теоремы и проверка достоверности полученных расчетных результатов.** Выполним дополнительную проверку маятниковой теоремы D.J. Acheson. Для этого используем расчетные и экспериментальные области устойчивости обращенного тройного маятника с проверенными геометрическими и физико-механическими параметрами [15]. Достоверность параметров маятника доказана, поскольку при их определении с помощью различных инструментов получены одинаковые значения.

В работе [15] границы области устойчивости определены с использованием теории Флоке. Эти результаты представлены на диаграмме (рис. 9) сплошными линиями; экспериментально полученные данные отмечены маркерами. Результаты, найденные с применением проверяемой маятниковой теоремы, отображены пунктирной линией.

По вертикальной оси на рис. 9 отложена амплитуда параметрического возбуждения в миллиметрах, по горизонтальной — частота возбуждения в герцах.



**Рис. 9.** Диаграмма устойчивости тройного обращенного маятника с параметрами из [15]

Нижняя криволинейная граница области устойчивости (квазистатическая), полученная по маятниковой теореме, совпадает с результатами, полученными по теории Флоке. Верхняя прямолинейная граница области устойчивости (динамическая граница), определенная с помощью формулы (1), имеет некоторые расхождения с верхней криволинейной границей, определенной по теории Флоке.

Дополнительная проверка показала, что теорема D.J. Acheson работает, но определяет верхнюю динамическую границу области устойчивости с некоторыми отклонениями от истинных значений. Лучшие результаты (с меньшей погрешностью) получаются для маятников со значительно различающимися высшей и низшей собственными частотами. Чем больше это различие, тем ближе верхняя граница к прямой линии. Таким образом, область применения теоремы ограничена маятниковыми системами из нескольких звеньев с сильно различающимися высшей и низшей собственными частотами.

**Заключение.** Получены геометрические и инерционные параметры, необходимые для динамических расчетов и решения задачи устойчивости трех маятников из известной статьи D.J. Acheson и T. Mullin в журнале Nature. Найдена причина радикального расхождения расчетных и экспериментальных результатов для областей устойчивости двойного и тройного маятников в статье D.J. Acheson и T. Mullin: низкая точность экспериментального определения высших собственных частот колебаний двойного и тройного прямых маятников, полученная через параметрические резонансы.

Границы области устойчивости двойного и тройного маятников, рассчитанные по маятниковой теореме D.J. Acheson с использовани-

ем уточненных высших собственных частот двойного и тройного маятников, приблизились к экспериментальным результатам для динамической граничной линии области устойчивости. Большая часть экспериментальных результатов попала на границы расчетной области устойчивости. Согласованными расчетными результатами, полученными в данной статье, и экспериментальными результатами D.J. Acheson и T. Mullin подтверждена работоспособность маятниковой теоремы D.J. Acheson.

Справедливость приведенных выводов доказана дополнительной проверкой, сопоставлением расчетных и экспериментальных областей устойчивости для тройного маятника из статьи академика В.Н. Челомея.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Acheson D.J., Mullin T. Upside-down pendulums. *Nature*, 1993, 366, pp. 215–216.
- [2] Blekhman I.I. *Vibrational Mechanics (Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications)*. Singapore, World Scientific Publishing Co., 2000, 510 p.
- [3] Thomsen J.J. *Vibrations and Stability. Advanced Theory, Analysis and Tools*. 2nd ed. Berlin, Springer-Verlag, 2013, 404 p.
- [4] Shaikhet L. *Lyapunov Functions and Stability of Stochastic Difference Equations*. London; New York, Springer-Verlag, 2011, 370 p.
- [5] Awrejcewicz J., Lamarque C.-H. *Bifurcation and Chaos in Nonsmooth Mechanical Systems*. Singapore, Word Scientific Publishing Co., 2003, 564 p.
- [6] Meyers R.A., ed. *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*. New York, Springer Science + Business Media, 2012, 1858 p.
- [7] Polster B. *The Mathematics of Juggling*. New York, Springer-Verlag, 2003, 225 p.
- [8] Stephenson A. On a New Type of Dynamical Stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, 1908, vol. 52, no. 8, part II, pp. 1–10.
- [9] Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом. *Успехи физических наук*, 1951, т. 44, № 1, с. 7–20.
- [10] Kalmus H.P. The inverted pendulum. *Amer. J. Phys.*, 1970, vol. 38, pp. 874–878.
- [11] Стрижак Т.Г. *Метод усреднения в задачах механики*. Киев; Донецк, Выща шк., 1982, 254 с.
- [12] Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями. *Докл. АН СССР*, 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
- [13] Стрижак Т.Г. *Асимптотический метод нормализации (метод усреднения и метод нормальных форм)*. Киев, Выща шк., 1984, 280 с.
- [14] Acheson D.J. A pendulum theorem. *Proc. Roy. Soc. London*, 1993, Ser. A, vol. 443, pp. 239–245.
- [15] Грибков В.А., Хохлов А.О. Устойчивость тройного инвертированного физического маятника из статьи академика В.Н. Челомея 1983 г. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2015, № 6, с. 33–49.

Статья поступила в редакцию 09.01.2017

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Грибков В.А., Гордин Я.Д. О причинах расхождения результатов расчета и эксперимента при определении границ устойчивости обращенных стабилизируемых маятников (по материалам статьи D.J. Acheson, T. Mullin в журнале Nature). *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 2.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-2-1592>

**Грибков Владимир Арсеньевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов — динамика и устойчивость движения механических систем. e-mail: zenit-ab@mail.ru

**Гордин Ярослав Денисович** — студент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, стипендиат Президента Российской Федерации. Область научных интересов — динамика движения и динамика конструкций летательных аппаратов. e-mail: yaroslav.gordin@gmail.com

# On the causes of divergence of calculation results and experiment when determining stability boundaries for the inverted pendulums (by the article of D.J. Acheson and T. Mullin in *Nature*)

© V.A. Gribkov, Ya.D. Gordin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*The article analyses the results published by D.J. Acheson, T. Mullin in the journal "Nature". The famous article covered the experimental and calculated determination of the stability boundaries for single, double and triple inverted pendulums vibration stabilized. It marked a radical discrepancy between the results of calculations and experiments to double and triple pendulums (lack of coordination between the calculated and experimental boundaries of the stability boundaries). The aim of the paper is to find the causes that led to a significant difference in the position of the calculated and experimental stability boundaries of double and triple inverted pendulum, as well as checking the operability and effectiveness of D.J. Acheson pendulum theorem.*

*Checking calculation of the boundaries of sustainability was not possible due to lack of some parameters required for solving the problem of pendulum systems. Through the parameters given in the article, using the range of sizes in the core tubular elements pendulums, with the help of numerical experiments in SOLIDWORKS we restored the missing dimensions and inertial characteristics. D.J. Acheson pendulum theorem, using natural frequencies of direct pendulums we received updated stability region. For double and triple pendulums we specified range of the stability region closer to the experimental in a significant range of the excitation parameters. Thus we confirmed performance of D.J. Acheson pendulum theorem. It is proved that the radical divergence between the calculated and experimental boundaries of sustainability in the article by D.J. Acheson and T. Mullin caused a large error in determining the higher natural vibration frequencies of double and triple pendulums (all own frequencies were determined experimentally using the main parametric resonance of pendulums).*

**Keywords:** *inverted physical pendulum, N-linked pendulum, parametric excitation, dynamic stability, experiment*

## REFERENCES

- [1] Acheson D.J., Mullin T. Upside-down pendulums. *Nature*, 1993, 366, pp. 215–216.
- [2] Blekhnman I.I. *Vibrational Mechanics (Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications)*. Singapore et al, World Scientific Publishing Co., 2000, 510 p.
- [3] Thomsen J.J. *Vibrations and Stability. Advanced Theory, Analysis and Tools*. 2nd ed. Berlin, Springer-Verlag, 2013, 404 p.
- [4] Shaikhet L. *Lyapunov Functions and Stability of Stochastic Difference Equations*. London, New York, Springer-Verlag, 2011, 370 p.
- [5] Awrejcewicz J., Lamarque C.-H. *Bifurcation and Chaos in Nonsmooth Mechanical Systems*. Singapore, Word Scientific Publishing Co., 2003, 564 p.
- [6] Meyers R.A., ed. *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*. New York, NY. Springer Science+Business Media, 2012, 1858 p.
- [7] Polster B. *The Mathematics of Juggling*. New York, Springer-Verlag, 2003, 225 p.

- [8] Stephenson A. On a New Type of Dynamical Stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, 1908, vol. 52, no. 8, part II, pp. 1–10.
- [9] Капика P.L. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk — Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)*, 1951, vol. 44, no. 1, pp. 7–20. (in Russian).
- [10] Kalmus H.P. The inverted pendulum. *Amer. J. Phys.*, 1970, vol. 38, pp. 874–878.
- [11] Strizhak T.G. *Metod usredneniya v zadachah mekhaniki* [Averaging method in mechanics problems]. Kiev, Doneck, Vishcha shkola Publ., 1982, 254 p. (in Russian).
- [12] Chelomey V.N. *Dokl. AN SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67 (in Russian).
- [13] Strizhak T.G. *Asimptoticheskij metod normalizacii. (Metod usredneniya i metod normalnyh form)* [The asymptotic method of normalizing (averaging method and the method of normal forms)]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1984, 280 p. (in Russian).
- [14] Acheson D.J. A pendulum theorem. *Proc. Roy. Soc. London*, 1993, Ser. A, vol. 443, pp. 239–245.
- [15] Gribov V.A., Khokhlov A.O. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2015, no. 6, pp. 33–49. (in Russian).

**Gribov V.A.**, Cand Sc. (Eng), associate professor of the Department “Aerospace systems”, Bauman Moscow State Technical University. Research interests — the dynamics and stability of motion of mechanical systems. e-mail: zenit-ab@mail.ru

**Gordin Ya.D.**, a student of the Department “Aerospace systems”, Bauman Moscow State Technical University. Grant holder of the President of the Russian Federation. Research interests — the dynamics of the flight of aircraft, the dynamics of aircraft constructions. e-mail: yaroslav.gordin@gmail.com