УДК 378

Е. А. Власова

УСЛОВНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведены рекомендации к составлению олимпиадных и вступительных заданий по математике для школьников по теме “Решение показательных уравнений”.

E-mail: skupova189@yandex.ru

Ключевые слова: *показательное уравнение, условно эквивалентное преобразование.*

При проверке письменных работ абитуриентов, выполненных ими на вступительных экзаменах и олимпиадах по математике, довольно часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда явно неправильное решение задачи дает правильный ответ. Большинство таких ситуаций не вызывает какого-либо неоднозначного толкования среди преподавателей-математиков, проверяющих и оценивающих данные работы. Как правило, в этих работах абитуриент совершает произвольные, им самим придуманные, математически не обоснованные (не эквивалентные) преобразования (т. е. как говорят, “неправильно решает задачу”), а правильный ответ получается совершено случайно. Оценивание таких решений не вызывает никаких сомнений: случайно полученный правильный ответ в расчет не берется, и абитуриент получает за задачу “ноль” или “минус”.

Однако в практике проверки вступительных и олимпиадных работ довольно регулярно встречаются ситуации, когда при решении определенного типа задач (уравнений) различные абитуриенты в разные годы совершают примерно одни и те же неправильные (математически не эквивалентные) преобразования, и при этом получают правильные ответы. Если подходить к проверке этих работ совершенно формально, то проверяющий, как и выше, имеет полное право посчитать, что правильный ответ получен случайно, и оценить задачу низшим баллом “ноль”. Однако регулярная повторяемость этих ситуаций настораживает, и наводит на мысль, что здесь что-то не так. Попробуем в этом разобраться.

Примером такой ситуации является следующая. Уравнение в действительных числах

$$2^{x+1} - 2^{2-x} = 7 \qquad (1)$$

некий абитуриент “решает” следующим, как ему, видимо, кажется “хитрым и простым”, способом. Во-первых, этот абитуриент замечает, что в правой части этого уравнения можно сделать неожиданное, но тем не менее безупречное математическое преобразование:

$$2^{x+1} - 2^{2-x} = 2^3 - 2^0.$$

А затем абитуриент, видимо, руководствуясь девизом “Математика — это просто!”, отбрасывает одинаковые основания показательных функций, и сразу получает уравнение:

$$(x + 1) - (2 - x) = 3 - 0,$$

решением которого является единственное значение $x = 2$. Два действия — и задача “решена”. Это действительно правильный ответ к этой задаче (см. ниже ее правильное решение), однако с математической точки зрения само решение уравнения является совершенно неправильным, некорректным. Более того, “решая” задачу таким способом, абитуриент демонстрирует явное незнание того, какие преобразования в математике допустимы (верны), а какие не допустимы (не верны), т. е. демонстрирует свою слабую математическую подготовку.

Действительно, при выполнении анализируемого преобразования абитуриент, осознанно или неосознанно воспользовался следующим свойством (преобразованием)

$$2^x - 2^y = 2^t - 2^s \quad \Longrightarrow \quad x - y = t - s, \tag{2}$$

которое, очевидно, в общем случае не является верным (выполняется не при всех действительных значениях x, y, t и s). Здесь абитуриента, очевидно, подвело знание им правильного свойства возрастающей показательной функции 2^x, для которой

$$2^x = 2^t \quad \Longrightarrow \quad x = t, \tag{3}$$

а еще его убежденность в “простоте” математики: если свойство (3) верно, то почему бы не быть верным и очень похожему свойству (2).

Между тем, правильное решение задачи (1) таково[1]:

$$2^{x+1} - 2^{2-x} = 7, \quad 2 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} = 7, \quad \boxed{2^x = y > 0},$$

$$2y - \frac{4}{y} - 7 = 0, \quad 2y^2 - 7y - 4 = 0, \quad y_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{4} = \left\{4; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Корень $y_2 = -1/2 < 0$ является посторонним, и потому $y = 4$, и значит

$$2^x = 4, \quad 2^x = 2^2, \quad x = 2.$$

Как уже было отмечено выше, приведенное неправильное (математически неграмотное) решение абитуриента и данное правильное

[1] В л а с о в а Е. А., О б л а к о в а Т. В. Учебное пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 303 с.

(математически грамотное) решение приводят к одинаковому ответу: $x = 2$. Но может быть правильный ответ абитуриента при его явно неправильном решении является простой случайностью, и потому в этом нет никакой проблемы?

Однако давайте "решим методом" нашего гипотетического абитуриента еще одну похожую задачу:

$$5^{x+4} - 5^{3-x} = -78124.$$

Для этого число в правой части уравнения представим следующим образом: $-78124 = 1 - 78125 = 5^0 - 5^7$, и получим эквивалентное уравнение

$$5^{x+4} - 5^{3-x} = 5^0 - 5^7.$$

Далее наш абитуриент отбросил бы одинаковые основания показательных функций, и сразу получил бы уравнение

$$(x+4) - (3-x) = 0 - 7,$$

решением которого является единственное значение $x = -4$.

И снова оказывается, что это правильный ответ к задаче. Действительно,

$$5^{x+4} - 5^{3-x} = -78124, \quad 625 \cdot 5^x - \frac{125}{5^x} = -78124, \quad \boxed{5^x = y > 0},$$

$$625y - \frac{125}{y} + 78124 = 0, \quad 625y^2 + 78124y - 125 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{-39062 \pm \sqrt{1525917969}}{625} = \frac{-39062 \pm 39063}{625} = \left\{-125; \frac{1}{625}\right\}.$$

Корень $y_2 = -625 < 0$ является посторонним поэтому $y = 1/625$, а это значит

$$5^x = \frac{1}{625}, \quad 5^x = 5^{-4}, \quad x = -4.$$

При этом на сколько правильное решение сложнее неправильного.

Так что же, может быть "метод" нашего гипотетического абитуриента всегда дает правильный ответ? И тогда этот "метод" являет собой новый правильный способ математических преобразований, еще не известный математикам-профессионалам? Конечно же, нет. Например, если мы "решим методом" нашего гипотетического абитуриента уравнение

$$2^{x+1} - 2^{2-x} = 1, \tag{4}$$

лишь слегка отличающееся от уравнения (1), то получим

$$2^{x+1} - 2^{2-x} = 2^1 - 2^0, \quad (x+1) - (2-x) = 1 - 0, \quad x = 1.$$

Между тем, правильное решение уравнения (4) дает совершенно другой результат:

$$2^{x+1} - 2^{2-x} = 1, \quad 2 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} = 1, \quad \boxed{2^x = y > 0},$$

$$2y - \frac{4}{y} - 1 = 0, \quad 2y^2 - y - 4 = 0, \quad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4} =$$

$$= \left\{ \frac{1+\sqrt{33}}{4}, \frac{1-\sqrt{33}}{4} \right\}.$$

Корень $y_2 = (1 - \sqrt{33})/4 < 0$ является посторонним, и потому $y = (1 + \sqrt{33})/4$, и значит

$$2^x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}, \quad x = \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{33}}{4} \right) = 0,7537...$$

Причина того, что "метод" нашего гипотетического абитуриента в одних случаях дает правильный результат (при этом очень быстро и красиво), а в других случаях дает неправильный результат, заключается в том, что этот "метод" содержит в себе математическое преобразование выражений (уравнений), являющееся не (безусловно) эквивалентным, а лишь **условно эквивалентным**. Другими словами, это преобразование в общем случае является неверным (неэквивалентным), и становится верным (эквивалентным) лишь **при выполнении определенных условий**. При этом наш абитуриент либо вовсе не подозревает, что примененное им (по наитию) преобразование является лишь условно эквивалентным, либо знает это, но не знает условий, при которых это преобразование становится эквивалентным, либо, наконец, знает условия, но не удосужился проверить их выполнение.

Если слегка обобщить, то "метод" нашего гипотетического абитуриента заключается в следующем. Он без всяких на то оснований считает, что уравнение в действительных числах x

$$k^{a+x} - k^{b-x} = k^c - k^d, \quad (k > 0,\ k \neq 1) \tag{5}$$

эквивалентно следующему простому линейному уравнению, получающемуся из (5) путем "отбрасывания ненужного" основания k показательной функции k^x:

$$(a + x) - (b - x) = c - d. \tag{6}$$

Поскольку линейное уравнение (6) имеет единственное решение $x = (-a + b + c - d)/2$, то тогда (согласно данному "методу") исходное уравнение (5) имеет единственное решение

$$x = \frac{-a + b + c - d}{2}.$$

На самом деле, переход (преобразование, если его можно таковым считать) от (5) к (6) является не безусловно эквивалентным (верным) преобразованием, а лишь условно эквивалентным. При этом условие этой эквивалентности содержится в следующем утверждении.

Утверждение. Для всякого действительного числа $k > 0$, $k \neq 1$, уравнение

$$k^{a+x} - k^{b-x} = k^c - k^d \tag{7}$$

относительно действительного переменного x эквивалентно уравнению

$$(a + x) - (b - x) = c - d, \tag{8}$$

получающемуся из него путем отбрасывания основания k и имеющему единственное решение

$$x = \frac{-a + b + c - d}{2}, \tag{9}$$

тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия на параметры a, b, c и d этого уравнения:

$$a + b = c + d \quad \text{или} \quad c = d. \tag{10}$$

Доказательство.

А) Пусть сначала $c = d$. Тогда мы имеем уравнение $k^{a+x} = k^{b-x}$, единственным решением которого, очевидно, является число $x = (-a+ + b)/2 = (-a + b + c - d)/2$, которое также является и единственным решением уравнения $(a+x)-(b-x) = 0$ $(= c-d)$. Поэтому уравнения (7) и (8) эквивалентны.

Б) Пусть теперь $c \neq d$. Докажем **достаточность** условия $a+b = c+ + d$ для эквивалентности уравнений (7) и (8). Из этого условия получаем $a = -b + c + d$, и потому решение (9) линейного уравнения (8) принимает вид

$$x = \frac{-a + b + c - d}{2} = \frac{(b - c - d) + b + c - d}{2} = b - d.$$

Тогда

$$x + a = (b - d) + a = (b - d) + (-b + c + d) = c,$$
$$b - x = b - (b - d) = d,$$

и уравнение (7) превращается в тождество:

$$k^c - k^d = k^c - k^d.$$

Таким образом, решение (9) уравнения (8) также является и решением уравнения (7).

Остается доказать, что уравнение (7) не имеет других решений. Это очевидно, поскольку функция $k^{a+x} - k^{b-x}$ является возрастающей (если $k > 1$) или убывающей (если $k < 1$), и значит любое свое значение она принимает только один раз.

Докажем **необходимость** условия $a+b=c+d$ для эквивалентности уравнений (7) и (8). Пусть эти уравнения эквивалентны. Это означает, что единственное решение (9) уравнения (8) является также и единственным решением уравнения (7). Значит при $x=(-a+b+c-d)/2$ уравнение (7) становится истинным равенством чисел:

$$(k^{a+x}-k^{b-x})\Big|_{x=\frac{-a+b+c-d}{2}} = k^c - k^d,$$

$$k^{a+\frac{-a+b+c-d}{2}} - k^{b-\frac{-a+b+c-d}{2}} = k^c - k^d,$$

$$k^{\frac{a+b+c-d}{2}} - k^{-\frac{-a-b+c-d}{2}} = k^c - k^d, \quad k^{\frac{a+b+c-d}{2}} - k^{\frac{a+b-c+d}{2}} = k^c - k^d,$$

$$k^{\frac{a+b}{2}}\left(k^{\frac{c-d}{2}} - k^{\frac{-c+d}{2}}\right) = k^c - k^d. \tag{11}$$

Поскольку $c \neq d$, то $(c-d)/2 \neq (-c+d)/2$, и $k^{\frac{c-d}{2}} \neq k^{\frac{-c+d}{2}}$. Тогда из (11) получаем:

$$k^{\frac{a+b}{2}} = \frac{k^c-k^d}{k^{\frac{c-d}{2}} - k^{\frac{-c+d}{2}}}, \quad k^{\frac{a+b}{2}} = \frac{k^{\frac{c+d}{2}+\frac{c-d}{2}} - k^{\frac{c+d}{2}-\frac{c-d}{2}}}{k^{\frac{c-d}{2}} - k^{\frac{-c+d}{2}}},$$

$$k^{\frac{a+b}{2}} = \frac{k^{\frac{c+d}{2}}\left(k^{\frac{c-d}{2}} - k^{-\frac{c-d}{2}}\right)}{k^{\frac{c-d}{2}} - k^{\frac{-c+d}{2}}}, \quad k^{\frac{a+b}{2}} = k^{\frac{c+d}{2}}, \quad a+b=c+d.$$

Утверждение доказано.

Следствие. Если условие (10) выполняется, то решение уравнения вида (7) быстрым “методом отбрасывания” оснований k и непосредственного получения линейного уравнения вида (8) является верным (корректным, законным).

В заключение отметим следующее. Когда автор-составитель задач решает дать на экзамене или олимпиаде уравнение вида (7), то можно предположить, что параметры a, b, c и d для этого уравнения он выбирает довольно произвольно, или, иначе говоря, случайным образом. Другими словами, вектор параметров (a, b, c, d) случайным образом выбирается из четырехмерного арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, или, во всяком случае, из значительного его подмножества, имеющего значительную (не нулевую) меру. А это означает, при случайном выборе вектора параметров уравнения (7) вероятность попасть этому вектору в гиперпространства, определяемые уравнениями $a+b=c+$ $+\,d$ или $c=d$, равна нулю. Но тогда уравнения вида (7) с условием (10) на практике либо вовсе не должны появляться, либо это должно происходить крайне редко. Однако, как мы отмечали в начале статьи, уравнения вида (7) с условием (10) в олимпиадной и вступительной практике появляются довольно регулярно. В чем причина этого “парадокса”?

Причиной является... доброта составителей задач, которые жалея абитуриентов, как правило, стараются подобрать такие параметры задачи, чтобы она имела “хорошие” ответы. Под “хорошими” ответами понимают целые или рациональные числа. Но как оказывается, именно выполнение условий (10) гарантирует рациональность решения уравнения (7) с рациональными параметрами a, b, c и d. В самом деле, решая уравнение (7) с произвольными параметрами a, b, c и d, и применяя только законные математические преобразования, получаем

$$k^{a+x} - k^{b-x} = k^c - k^d, \quad /\text{замена } y = k^x/,$$

$$k^a y^2 - (k^c - k^d)y - k^b = 0,$$

$$y_{1/2} = \frac{k^c - k^d \pm \sqrt{(k^c - k^d)^2 + 4k^{a+b}}}{2k^a},$$

$$k^x = \frac{k^c - k^d + \sqrt{(k^c - k^d)^2 + 4k^{a+b}}}{2k^a}.$$

Нетрудно видеть, что автор-составитель задачи может добиться рациональности решения x двумя способами: за счет равенства $c = d$ или за счет равенства $a + b = c + d$. В первом случае имеем тривиальное уравнение $k^{a+x} - k^{b-x} = 0$ с очевидным решением $x = (b - a)/2$. Во втором случае получаем

$$y_{1/2} = \frac{k^c - k^d \pm (k^c + k^d)}{2k^a} = \left\{k^{c-a}, -k^{d-a}\right\},$$

$$k^x = k^{c-a}, \quad x = c - a.$$

Таким образом, автор-составитель задачи, исходя из невинного казалось бы желания чуть-чуть упростить труд абитуриенту (сделать рациональными решения уравнений), незаметно для себя упрощает труд абитуриенту чрезмерно: решение задачи потенциально средней трудности сводится к двум элементарным действиям, одно из которых является в принципе неверным, а верным лишь условно (в данном контексте). Однако абитуриент, как правило, этого контекста не видит, выполняет неправильные математические преобразования, но получает правильный ответ. И при грамотном апеллировании этот абитуриент, не имеющий представления о правильных математических преобразованиях, может получить хороший балл за эту задачу.

Вывод: при включении в экзамены и олимпиады задачи вида (7) следует избегать выполнения условий (10).

Статья поступила в редакцию 05.09.2012