УДК 531.224.5

В. И. Ванько, Е. С. Перелыгина

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ: ОБСУЖДЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе выясняется адекватность концепций касательного и приведенного модулей в теории квазистатического продольного изгиба упруго-пластических стержней (задача решается в геометрически линейной постановке).

E-mail: vvanko@mail.ru

Ключевые слова: *продольный изгиб, касательный модуль, приведенный модуль, гибкость стержня, метод коллокации, начальный прогиб.*

1. Л. Эйлер, заложивший основы теории продольного изгиба, вывел формулу критической силы, “силы колонны”, [1]:

$$P_{Э} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}. \tag{1}$$

Здесь E — модуль Юнга материала стержня, Н/м^2; L — длина, м; $I = \mathrm{const}$ — момент инерции (минимальное значение) поперечного сечения, м^4.

Рассмотрим упруго-пластический материал с линейным упрочнением (эффект Баушингера не учитывается), рис. 1.

Предположим, что под действием продольной силы, приложенной без эксцентриситета к идеально прямому стержню (при условии $p_t > p_*$, p_t — сила касательного модуля, p_* — сила, соответствующая пределу текучести), все его точки “вышли” в состояние AB. Тогда для вычисления критической силы в формуле (1) нужно модуль E

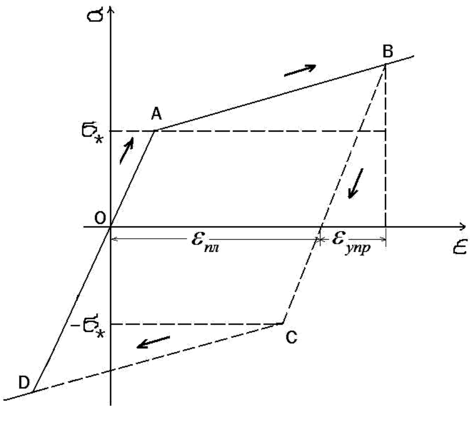


Рис. 1. Диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ для материала с линейным упрочнением

заменить модулем упрочнения (касательным модулем) E_t:

$$p_t = \pi^2 \frac{E_t I}{L^2}. \tag{2}$$

Первоначально к этому пришел Ф. Энгессер, [2]. Но его теория подверглась критике со стороны Ф.С. Ясинского, [3]: если стержень под воздействием критической силы p_t (возможная бифуркация) изгибается, материальные волокна сечений с выпуклой стороны стержня начнут разгружаться (состояние BC, рис. 1), и жесткость на изгиб, например, срединного по длине сечения станет больше значения, вычисленного по касательному модулю.

Следовательно, при силе p_t бифуркации в смысле Эйлера не будет.

Энгессер воспринял критику и ввел понятие приведенного модуля, который для прямоугольного сечения вычислил в виде, [4]:

$$E_K = \frac{4EE_t}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E_t}\right)^2}. \tag{3}$$

Т. Карман в своей докторской диссертации распространил понятия касательного и приведенного модулей на материалы с произвольной диаграммой $\sigma \sim \varepsilon$. Были поставлены эксперименты по продольному изгибу, до сих пор являющиеся образцовыми, [5].

Приводим интерпретацию идей Кармана, данную А.С. Вольмиром, [6].

Объединим формулы (1)–(3):

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 \frac{\tilde{E} I}{L^2}, \tag{4}$$

где $\tilde{E}$ принимает значения E, E_t, E_K в зависимости от обстоятельств.

Из формулы (4):

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 \frac{\tilde{E} F}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \sigma_{\text{кр}} = \pi^2 \frac{\tilde{E}}{\lambda^2}. \tag{5}$$

Здесь $F = \text{const}$ — площадь поперечного сечения, м^2; $\lambda = \dfrac{L}{r}$ — гибкость стержня; r — радиус инерции сечения, м.

Из (5) получим гибкость как функцию критического напряжения:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{\tilde{E}}{\sigma_{\text{кр}}}}. \tag{6}$$

В [6] приведены данные об авторском эксперименте по продольному изгибу дюралюминовых стержней прямоугольного сечения.

Пусть, например, напряжение σ_1 $\left(\sigma_1 = \dfrac{P_1}{F}\right)$ есть критическое напряжение (бифуркационное). На диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$ находится точка

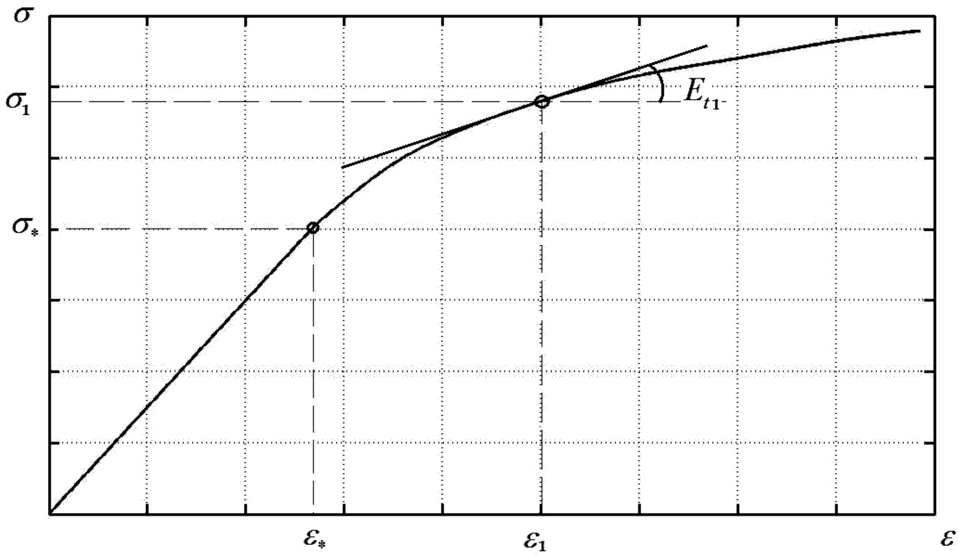


Рис. 2. Измерение касательного модуля в некоторой точке диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$

$(\varepsilon_1, \sigma_1)$ и в этой точке измеряется значение касательного модуля E_{t1}, рис. 2; по формуле (3) определяется E_{K1}.

Далее вычисляются "критические" гибкости, соответствующие значениям найденных модулей:

$$\lambda_{t1} = \pi\sqrt{\frac{E_{t1}}{\sigma_1}}; \quad \lambda_{K1} = \pi\sqrt{\frac{E_{K1}}{\sigma_1}}. \tag{7}$$

Действуя подобным образом, можно построить графики $\sigma_{\text{кр}} \sim \lambda$, по которым для стержня заданной гибкости можно оценить критическую силу. В литературе говорится о том, что экспериментальные точки $(\lambda,\sigma_{\text{кр}})$ ложатся ближе к кривой $\sigma_{\text{кр}} \sim \lambda_t$, [5, 6, 7].

Заметим, что при построении кривых $(\sigma_{\text{кр}}, \lambda_t)$ и $(\sigma_{\text{кр}}, \lambda_k)$ начальный прогиб стержня не учитывается [5, 6].

2. В работах [8, 9] приведены данные численных экспериментов, выполненных согласно методу последовательных нагружений, для стержней с начальным прогибом (неизбежным в реальных условиях) для любых законов $\sigma \sim \varepsilon$.

Обсуждаем результаты, полученные в работе [6]. Дана таблица значений $\sigma \sim \varepsilon$, соответствующая испытаниям на сжатие коротких образцов из дюралюмина Д16Т. Модуль упругости принят равным $E = 7,35 \times 10^{10}$ Н/м^2 ($E = 7,5 \times 10^9$ кгс/м^2, [6]), предел текучести $\sigma_* = 1,96 \times 10^8$ Н/м^2 ($\sigma_* = 2 \times 10^7$ кгс/м^2, [6]).

Интерполируем кубическими сплайнами данные таблицы, чтобы получить более подробный график $\sigma \sim \varepsilon$ и в каждой точке вычислим через разностную производную значение касательного модуля E_t. По формуле (3) получим значения приведенного модуля E_K.

Далее задаем последовательность начальных прогибов $\{w_{0k}\}_{k=\overline{1,n}}$; по вычислительной методике, изложенной в работах [8, 9], определяем безразмерные критические силы, т. е. силы, соответствующие исчерпанию несущей способности (наименьшие силы, при которых нарушается условие $I > p$, [8]):

$$\{w_{0k}\}_{k=\overline{1,n}} \Rightarrow \{\tilde{p}_k\}_{k=\overline{1,n}}. \tag{8}$$

В силу определения безразмерной нагрузки имеем:

$$\tilde{p} = \frac{P_{\text{кр}}}{P_{\text{Э}}} \Rightarrow P_{\text{кр}} = \tilde{p}\ P_{\text{Э}} = \tilde{p}\pi^2 \frac{EI}{L^2} = \tilde{p}\pi^2 \frac{EF}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \pi^2 \frac{\tilde{p}E}{\lambda^2}. \tag{9}$$

Задавая последовательность $\{\lambda_i\}$, получим в силу (9) значения критических напряжений, соответствующих данному начальному прогибу:

Таблица 1

Значения $\sigma_{\text{кр}}$ в зависимости от λ при начальном прогибе $w_{00} \sim 0{,}00001$

$w_{00} \sim 0.00001$	λ	62.25	56.08	50.8	43.76	37.6	32.32	26.16	20
	$\sigma_{\text{кр}}$, Н/м^2 $\times 10^8$	1.87	2	2.12	2.38	2.49	2.64	2.88	3.05

По этим данным строится диаграмма $\sigma_{\text{кр}} \sim \lambda$ (для данного “малого” значения начального прогиба).

На полученную диаграмму накладываем диаграмму из работы [6].

Производим аналогичные построения и сравнения, например, для “большого” начального прогиба:

Таблица 2

Значения $\sigma_{\text{кр}}$ в зависимости от λ при начальном прогибе $w_{00} \sim 0{,}01$

$w_{00} \sim 0.1$	λ	62.25	56.08	50.8	43.76	37.6	32.32	26.16	20
	$\sigma_{\text{кр}}$, Н/м^2 $\times 10^8$	1.87	2.06	2.3	2.51	2.74	2.94	3.15	3.33

Отмечаем тенденцию: при малых значениях $w_0 \sim 0.00001$ график $\sigma_{\text{кр}} \sim \lambda$ ближе к графику $\sigma_{\text{кр}} \sim \lambda_t$; при “больших” значениях $w_0 \sim 0.1$ — ближе к $\sigma_{\text{кр}} \sim \lambda_K$, рис. 3.

Отсюда делаем заключение: при “малых” значениях w_0 продольный изгиб происходит в основном без разгрузки (см. диаграмму $I \sim p$, рис. 4, *а*); при “больших” w_0 — свою роль играет разгрузка в срединном сечении, рис. 4, *б*.

Подобная тенденция выявлена и при изменении скорости нагружения: при фиксированном w_{00} и “быстром” нагружении, $\Delta p \sim 10^{-3}$ (здесь и далее под Δp подразумевается минимальное (по всем λ_i)

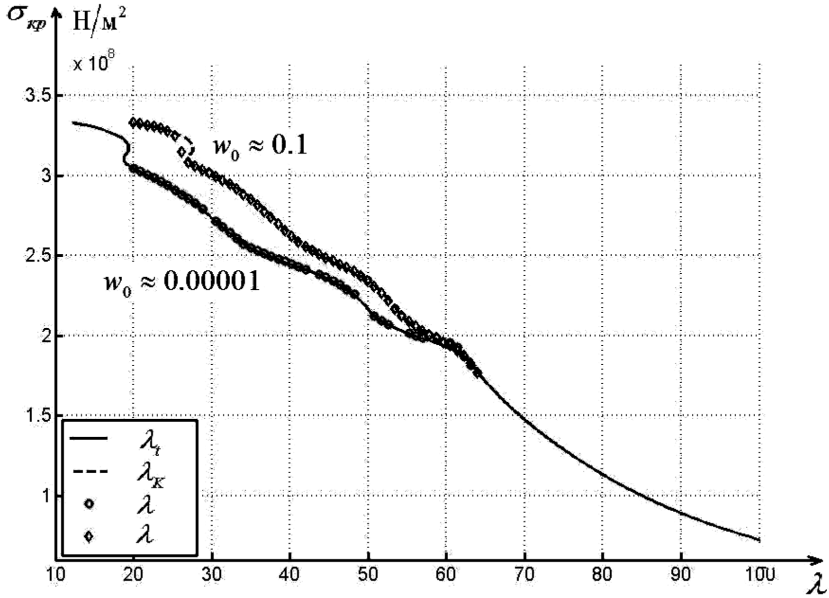


Рис. 3. График $\sigma_{\text{кр}} \sim \lambda$ в зависимости от начального прогиба

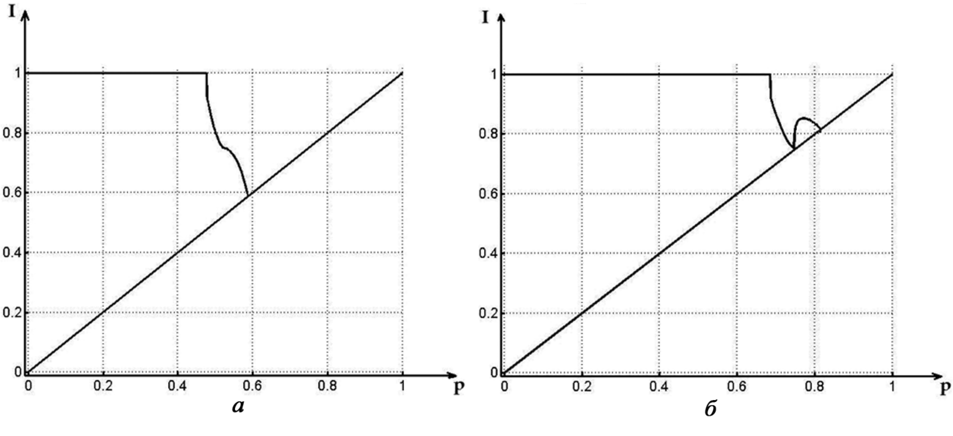
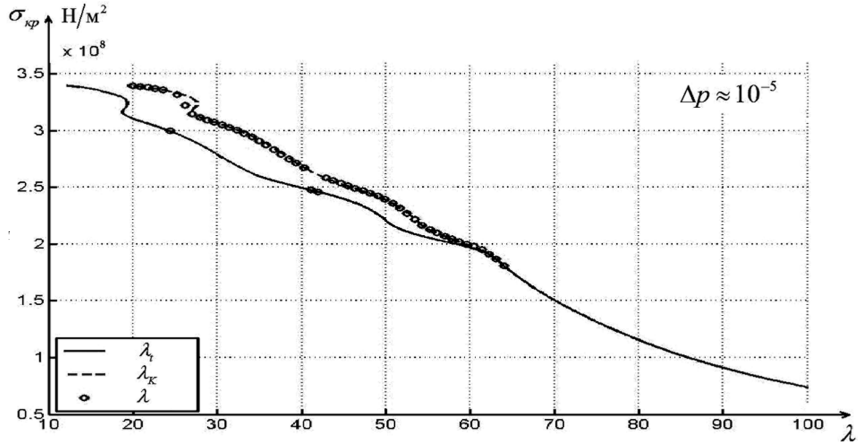


Рис. 4. Примеры графиков жесткость $\sim$ сила в зависимости от начального прогиба и от скорости нагружения

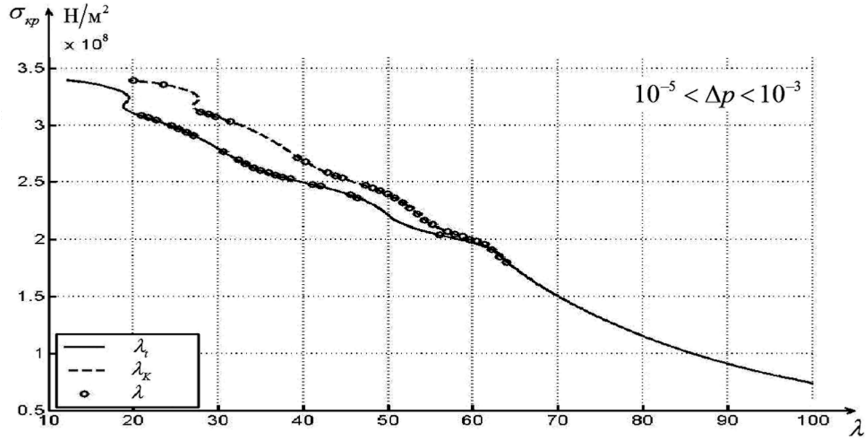
приращение безразмерной нагрузки), продольный изгиб протекает без разгрузки (концепция Шэнли), рис. 4, *а*; при медленном нагружении, $\Delta p \sim 10^{-5}$, точки срединного сечения проходят все стадии диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ (концепция Кармана), рис. 4, *б*.

В заключение обратим внимание на следующее.

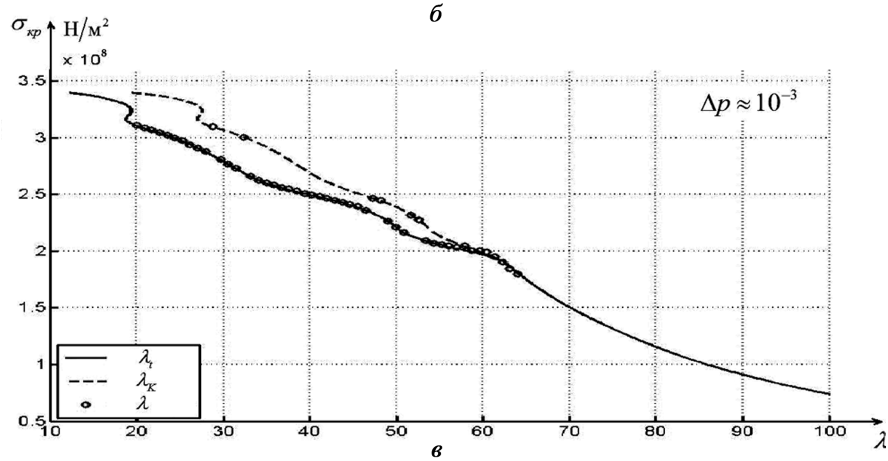
1) По сути своей касательно- и приведенно-модульный подходы аналогичны решению задачи методом коллокации по срединному сечению: по всему стержню считаем жесткости на изгиб по касательному или приведенному модулям.



а



б



в

Рис. 5. Графики $\sigma_{кр} \sim \lambda$ в зависимости от скорости нагружения

2) В работах [8, 9] дано обоснование использования метода коллокации в задачах продольного изгиба. В этом мы видим объяснение факта совпадения диаграмм $\sigma_{кр} \sim \lambda$ с $\sigma_{кр} \sim \lambda_t$ либо с $\sigma_{кр} \sim \lambda_K$.

Последнее зависит от величины начального прогиба и скорости нагружения.

3) Из определения устойчивости по Карману: во время изменения величины нагрузки принимаются меры к недопущению искривления и исследуется бифуркация при постоянной нагрузке [10].

Таким образом, в опытах Кармана скорость нагружения достаточно мала, поэтому наши точки (λ, $\sigma_{\text{кр}}$) ложатся на кривую (λ_K,$\sigma_{\text{кр}}$), рис. 5, *а*.

При увеличении скорости нагружения, “продолжающееся нагружение”, [11], точки (λ, $\sigma_{\text{кр}}$) группируются на кривой (λ_t,$\sigma_{\text{кр}}$), рис. 5, *в*.

Рис. 5, *б* дает промежуточный случай: точки (λ,$\sigma_{\text{кр}}$) практически равномерно распределены между диаграммами (λ_t,$\sigma_{\text{кр}}$) и (λ_K,$\sigma_{\text{кр}}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э й л е р Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. — М.-Л.: ГИТТЛ. — 1934. — 600 с.
2. E n g e s s e r F. Über Knickfestigkeit gerader Stäbe // Zeitschrift der Architect und Ingenieur Vereinigung zu Hannover. — 1889. — Band 35. — S. 455.
3. J a s i n s k i F. Zu den Knickfragen // Schweiz. Bauzeitung. — 1895. — Band 26, Heft 24 (см. Ясинский Ф. С. Избранные труды. – М.: ГТИ. – 1952. – 428 с.
4. E n g e s s e r F. Über Knickfestigkeit // Schweiz. Bauzeitung. — 1895. — Band 26, Heft 24.
5. K á r m á n Th., von Untersuchungen über Knickfestigkeit // Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure. — 1910. — Band 81 (См. Collected Works of Th. von Kármán. — Vol. 1. — 1902-1913. — London: Butterworths Scientific Publications. — 1956. – 531 p..)
6. В о л ь м и р А. С. Устойчивость упругих систем. — М.: ГИФМЛ. — 1963. — 879 с.
7. З у б ч а н и н о в В. Г. Устойчивость: Уч. пособие. Часть 1. — Тверь: Тв. политехн. ин-т. — 1995. — 200 с.
8. В а н ь к о В. И., Ш е с т е р и к о в С. А. Продольный изгиб и выпучивание // Инж. ж-л. МТТ. — 1967. — № 2. — с. 157—163.
9. П е р е л ы г и н а Е. С. О продольном изгибе упруго-пластического стержня // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия Естественные науки: Спецвыпуск Прикладная математика. — 2011. — с. 177—184.
10. Р а б о т н о в Ю. Н. Сопротивление материалов. — М.: ГИФМЛ. — 1962. — 455 с.
11. S h a n l e y F. Inelastic column theory // J. of the Aeronaut. Sci. (JAS). — 1947. — Vol. 14. — No. 5. – P. 261–267.

Статья поступила в редакцию 05.09.2012