УДК 539.3 DOI 10.18698/2308-6033-2016-12-1557

Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Ю.В. Юрин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлены результаты разработки тонких многослойных анизотропных оболочек на основании общих уравнений трехмерной теории упругости путем введения асимптотических разложений по малому геометрическому параметру, без каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Рассмотрен случай моноклинных слоев оболочек, которые имеют не более 13 независимых упругих констант. Предложен алгоритм получения явных аналитических формул для расчета распределения компонент полного тензора напряжений по оболочке. Алгоритм основан на решении специальных локальных задач первого, второго и третьего приближения. Он позволил получить выражения для всех шести компонент тензора напряжений в компактной замкнутой форме в виде зависимости от деформаций, искривлений срединной поверхности оболочки, а также их производных по продольным координатам. Полученные формулы позволяют рассчитывать все компоненты тензора напряжений в оболочке без решения дополнительных задач, а используя только решения осредненной задачи теории оболочек.

Ключевые слова: *тензор напряжений, многослойные оболочки, тонкие моноклинные оболочки, композиты, метод асимптотического осреднения, асимптотическая теория оболочек.*

Введение. Для решения многих инженерных задач проектирования конструкций из композитных материалов необходимо достаточно точное вычисление компонент полного тензора напряжений в любой точке конструкции. Так, для расчета прочности при изгибе трехслойных композитных конструкций недостаточно имеющейся информации о значениях только изгибных напряжений: следует знать распределение по толщине напряжений межслойного сдвига, а иногда и поперечных нормальных напряжений. В связи с низкой прочностью на сдвиг и поперечный отрыв трехслойные сотовые конструкции при некоторых видах нагружения могут разрушаться именно из-за этих межслоевых и поперечных напряжений [1]. Поперечные нормальные и межслоевые напряжения имеют также чрезвычайно важное значение в механизмах расслоения теплозащитных композитных конструкций [2], многослойных оболочек при длительных температурно-влажностных воздействиях, при интенсивных излучениях и других видах нагружения.

Известно много работ [3–9], авторами которых предпринята попытка вычислить все компоненты тензора напряжений. Однако их подавляющее большинство основано на определенных допущениях относительно неизвестных функций — перемещений и напряжений, которые тем не менее с математической точки зрения не имеют достаточного обоснования. В работах [10–15] предложены теории тонких пластин и оболочек, в том числе с двумерной микроструктурой — гофрированными, сотовыми и сетчатыми конструкциями. Для их обоснования использован метод асимптотического осреднения (метод гомогенизации), хорошо зарекомендовавший себя при осреднении композитов с трехмерной периодической структурой [16–19]. В этих источниках введено допущение о линейном характере перемещений по толщине. Авторами работ [20–22] разработано асимптотическое осреднение тонких многослойных плоских пластин, в котором, однако, априори не сделано предположение о линейности распределения перемещений, но оно позволяет получить явное выражение для всех шести компонент тензора напряжений в тонких пластинах. В статье [23] проведено сравнение численных решений, полученных с помощью разработанной асимптотической теории многослойных тонких пластин и непосредственного численного решения задачи трехмерной теории упругости. Полученные результаты показали высокую точность разработанного метода асимптотического осреднения. Авторами работы [24] этот метод развит для случая криволинейных тонких многослойных оболочек.

Цель настоящей статьи заключается в дальнейшей разработке асимптотической теории многослойных тонких композитных оболочек, направленной на получение явных аналитических соотношений для всех шести компонент тензора напряжений в оболочках.

Уравнения трехмерной теории упругости в криволинейных координатах. В трехмерном пространстве R^3 с декартовыми координатами x_i рассмотрим поверхность Σ_0, заданную с помощью ортогональных координат $q_k(x_i)$ в виде $q_3(x_i) = 0,$ где $x_i \in \Sigma_{x_0} \subset R^2$ — область изменения значений декартовых координат.

Рассмотрим оболочку — тело, которому соответствует область $V \subset R^3,$ ограниченная внешней Σ^+ и внутренней Σ^- поверхностями, уравнения которых имеют вид $q_3 = -h/2,$ $q_3 = h/2,$ а также торцевой поверхностью $\Sigma_T,$ уравнение которой в криволинейных ортогональных координатах q_k имеет вид $F(q_1, q_2) = 0.$ Соотношение $q_i = q_i(x_j)$ между криволинейными q_i и декартовыми координатами x_j будем считать гладкими функциями. Параметр h — толщина оболочки, поверхность $q_3 = 0$ — срединная поверхность оболочки $\Sigma_0,$

она пересекает торцевую поверхность по контуру $\partial\Sigma_0$. Предположим, что координатные линии q_1 и q_2 ориентированы по линиям главной кривизны срединной поверхности оболочки, а линия q_3 — по нормали к этой поверхности. Все криволинейные координаты считаем размерными величинами — длинами дуг по соответствующим координатным направлениям.

В криволинейных координатах q_i уравнения равновесия тела (оболочки) имеют вид [25]:

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(H_\beta H_3\sigma_{\alpha\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(H_\alpha H_3\sigma_{\alpha\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_\alpha H_\beta\sigma_{\alpha3}\right)-$$

$$-\sigma_{\beta\beta}H_3\frac{\partial H_\beta}{\partial q_\alpha}-\sigma_{33}H_\beta\frac{\partial H_3}{\partial q_\alpha}+\sigma_{\alpha\beta}H_3\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta}+\sigma_{\alpha3}H_\beta\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_3}-H_\beta H_3 f_\alpha=0;$$

$$\alpha,\beta=1,2;\ \ \alpha\neq\beta; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1H_2\sigma_{33}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2H_3\sigma_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_1H_3\sigma_{23}\right)-$$

$$-\sigma_{11}H_2\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\sigma_{22}H_1\frac{\partial H_2}{\partial q_3}+\sigma_{13}H_2\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\sigma_{23}H_1\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-H_1H_2f_3=0, \qquad (2)$$

где H_α — параметр Ламе оболочки; $\sigma_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряжений в ортогональных координатах q_i; f_α — компоненты вектора плотности массовых сил.

Соотношения Коши, связывающие деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ композита с перемещениями u_α, в этой криволинейной системе координат q_i имеют вид [25]:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}=\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q_\alpha}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta}u_\beta+\frac{1}{H_\alpha H_3}\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_3}u_3;$$

$$2\varepsilon_{12}=\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{u_1}{H_1}\right)+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{u_2}{H_2}\right);$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial u_3}{\partial q_3}+\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}u_1+\frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}u_2;$$

$$2\varepsilon_{\alpha3}=\frac{H_\alpha}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{u_\alpha}{H_\alpha}\right)+\frac{H_3}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{u_3}{H_3}\right), \qquad (3)$$

где $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ — компоненты тензора малых деформаций; u_α — компоненты вектора перемещений в криволинейных координатах q_i.

Оболочку примем многослойной, все слои которой ортогональны направлению q_3 и являются линейно-упругими и моноклинными [26], т. е. содержат не более 13 независимых упругих констант с главными осями криволинейной анизотропии, совпадающими с координатными линиями q_i. Тогда определяющие соотношения оболочки, связывающие деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$, имеют следующий вид в криволинейной системе координат q_i:

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL} + C_{IJ33}\varepsilon_{33};\, \sigma_{I3} = 2C_{I3K3}\varepsilon_{K3};\, \sigma_{33} = C_{33KL}\varepsilon_{KL} + C_{3333}\varepsilon_{33}, \quad (4)$$

где C_{ijkl} — модули упругости слоев оболочки; здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами латинского алфавита I, J, K, L, M и строчными греческими $\alpha, \beta,$ принимают значения 1, 2, причем $\alpha \neq \beta$, а индексы i, j, k, l — значения 1, 2, 3.

На внешней и внутренней поверхностях оболочки считаем заданными: давление $\tilde{p}_\pm$; на торцевой поверхности $\Sigma_т$ — перемещение u_{ei}; на границе Σ_S раздела слоев оболочки — условия идеального контакта слоев оболочки:

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\tilde{p}_\pm \delta_{i3}; \qquad \Sigma_T : u_i = u_{ei}; \qquad \Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0; \qquad [u_i] = 0, \quad (5)$$

где $[u_i]$ — скачок функций.

Основные допущения асимптотической теории. Введем несколько основных допущений.

1. Рассмотрим очень тонкую оболочку, для которой выполняется соотношение

$$æ = h / L << 1, \quad (6)$$

где æ — малый параметр; L — диаметр срединной поверхности Σ_0.

Введем глобальные безразмерные криволинейные координаты $\overline{q}_k$ и локальную ξ координату:

$$\overline{q}_k = q_k / L, \qquad \xi = \overline{q}_3 / æ. \quad (7)$$

Далее все функции рассмотрим как зависящие от безразмерных координат $u_i(\overline{q}_\alpha, \xi)$, $\alpha = 1, 2$ и предположим их безразмерными. Воспользуемся следующим правилом дифференцирования от безразмерных координат:

$$\frac{\partial}{\partial q_j} u_i\ (\overline{q}_\alpha, \xi) = \frac{\partial}{\partial \overline{q}_j} \overline{u}_i\ (\overline{q}_\alpha, \xi) + \frac{1}{æ} \delta_{j3} \frac{\partial}{\partial \xi} \overline{u}_i\ (\overline{q}_\alpha, \xi), \tag{8}$$

где $\overline{u}_i = u_i / L$ — безразмерные перемещения.

Безразмерными примем также все напряжения $\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / E_0$, модули упругости $\overline{C}_{ijkl} = C_{ijkl} / E_0$ и давления $\overline{\overline{p}}_\pm = \tilde{p}_\pm / E_0$, разделив их на характерное значение модуля упругости E_0. Черту над безразмерными величинами опустим.

Введем еще два ограничения.

2. Рассмотрим только случай малого значения давления на внешних поверхностях оболочки:

$$\tilde{p}_\pm = -æ^3 p_\pm, \tag{9}$$

где $p_\pm$ — конечные значения безразмерного давления, $p_\pm = O(1)$.

3. Примем, что тонкая оболочка не содержит резких изломов геометрической формы, в том смысле, что следующие производные от параметров Ламе имеют порядок более высокий, чем $O(1)$ по отношению к параметру $æ$ [24]:

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial \xi} = æ H_{\alpha 3}; \quad H_{\alpha 3} = O(1); \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial \overline{q}_\beta} = O(1); \quad H_3 = 1. \tag{10}$$

Тогда формулы (3) с учетом равенств (10) можно записать таким образом:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha} + O_1 O_2 H_{\alpha,\beta} u_\beta + O_\alpha H_{\alpha 3} u_3;$$

$$2\varepsilon_{12} = H_1 O_2 (u_1 O_1)_{,2} + H_2 O_1 (u_2 O_2)_{,1};$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{æ} u_{3/3};\ 2\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{æ} u_{\alpha/3} + O_\alpha (u_{3,\alpha} - H_{\alpha 3} u_\alpha), \tag{11}$$

где $O_\alpha = 1 / H_\alpha$ — обратные параметры Ламе; $u_{i/3}(\overline{q}_\alpha, \xi) = \dfrac{\partial u_i}{\partial \xi}$, $u_{i,j}(\overline{q}_\alpha, \xi) = \dfrac{\partial u_i}{\partial \overline{q}_j}$ — производные по глобальным координатам $\overline{q}_k$ и локальной ξ координате.

Асимптотические разложения для многослойной оболочки. Компоненты тензора модулей упругости $C_{\alpha\beta}(\xi)$, как предполагается, зависят от координаты ξ, так как этот тензор различен для разных слоев оболочки. Поэтому задача, отображенная в формулах (2)–(6), содержит определение локальной координаты ξ, а также малого параметра æ в граничных условиях (коэффициент при давлении в формуле (9)). Таким образом, ее решение представим в виде асимптотического разложения по параметру æ как функции, зависящей от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} æ^n u_{ij}^{(n)} = u_k^{(0)}(\overline{q}_\alpha) + æ u_k^{(1)}(\overline{q}_\alpha, \xi) + æ^2 u_k^{(2)}(\overline{q}_\alpha, \xi) + \\ + æ^3 u_k^{(3)}(\overline{q}_\alpha, \xi) + \dots \quad (12)$$

Подставив разложение (12) в соотношения Коши (11), воспользуемся при этом правилами дифференцирования функций локальных координат (8) и получим асимптотическое разложение для следующих деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} æ^n \varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + æ\varepsilon_{ij}^{(1)} + æ^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots \quad (13)$$

Здесь

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + O_1 O_2 H_{\alpha,\beta} u_\beta^{(n)} + u_3^{(n)} H_{\alpha 3} O_\alpha,$$

$$2\varepsilon_{12}^{(n)} = H_1 O_2 (u_1^{(n)} O_1)_{,2} + H_2 O_1 (u_2^{(n)} O_2)_{,1},$$

$$\varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)},$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} = u_{\alpha/3}^{(n+1)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(n)} - O_\alpha H_{\alpha 3} u_\alpha^{(n)}, \ \ n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Подставив формулу (13) в закон Гука (4), получаем асимптотическое разложение для напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} æ^n \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(0)} + æ\sigma_{ij}^{(1)} + æ^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots \quad (15)$$

Здесь

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJ33}\varepsilon_{33}^{(n)}, \ \ \sigma_{I3}^{(n)} = 2C_{I3K3}\varepsilon_{K3}^{(n)},$$

$$\sigma_{33}^{(n)} = C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{3333}\varepsilon_{33}^{(n)}. \quad (16)$$

Формулировка локальных задач. Подставив разложения (12) и (15) в уравнения равновесия и граничные условия систем (1), (2), получаем

$$\frac{1}{æ}N_{\alpha}^{(-1)}+N_{\alpha}^{(0)}+æN_{\alpha}^{(1)}+æ^{2}N_{\alpha}^{(2)}+\ldots=0;\qquad \alpha,\ \beta=1,2;$$

$$\frac{1}{æ}N_{3}^{(-1)}+N_{3}^{(0)}+æN_{3}^{(1)}+æ^{2}N_{3}^{(2)}+\ldots=0;$$

$$\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3}^{(0)}+æ\sigma_{i3}^{(1)}+æ^{2}\sigma_{i3}^{(2)}+\ldots=-æ^{3}p_{\pm}\delta_{i3};$$

$$\Sigma_{T}:\ u_{i}=u_{i}^{(0)}+æu_{i}^{(1)}+æ^{2}u_{i}^{(2)}+æ^{3}u_{i}^{(3)}+\ldots=u_{ei}. \qquad (17)$$

В формулах (17) обозначены следующие величины:

$$N_{\alpha}^{(-1)}=H_1H_2\sigma_{\alpha 3/3}^{(0)},\qquad N_{3}^{(-1)}=H_1H_2\sigma_{33/3}^{(0)};$$

$$N_{\alpha}^{(n)}=(H_{\beta}\sigma_{\alpha\alpha}^{(n)})_{,\alpha}+(H_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}^{(n)})_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}-H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(n)}+$$
$$+(H_{\alpha}H_{\beta 3}+2H_{\beta}H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(n)}+H_1H_2\sigma_{\alpha 3/3}^{(n+1)}-H_{\beta}f_{\alpha}^{(n)},\qquad \alpha,\ \beta=1,2;$$

$$N_{3}^{(n)}=(\sigma_{13}^{(n)}H_2)_{,1}+(\sigma_{23}^{(n)}H_1)_{,2}-\sigma_{11}^{(n)}H_2H_{13}-\sigma_{22}^{(n)}H_1H_{23}+$$
$$+\ \sigma_{33}^{(n)}(H_{13}H_2+H_1H_{23})+H_1H_2\sigma_{33/3}^{(n+1)}-H_1H_2f_3^{(n)};$$

$$f_3^{(0)}=f_3,\ f_{\alpha}^{(0)}=f_{\alpha},\ f_3^{(n)}=0,\ f_{\alpha}^{(n)}=0,\ n>0\quad \alpha,\ \beta=1,2. \qquad (18)$$

Приравняв в уравнениях равновесия члены $N_{\alpha}^{(-1)}$, $N_{3}^{(-1)}$ при $æ^{-1}$ к нулю, а члены $N_{\alpha}^{(n)}$, $N_{3}^{(n)}$ при остальных степенях от $æ$ к некоторым величинам $h_{\alpha}^{(n)}$, $h_{3}^{(n)}$, не зависящим от ξ, получаем рекуррентную последовательность локальных задач L_n. Локальная задача L_0 имеет вид

$$\sigma_{i3/3}^{(0)}=0;$$

$$\sigma_{IJ}^{(0)}=C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)}+C_{IJ33}\varepsilon_{33}^{(0)};\ \sigma_{I3}^{(0)}=2C_{I3K3}\varepsilon_{K3}^{(0)};\ \sigma_{33}^{(0)}=C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(0)}+C_{3333}\varepsilon_{33}^{(0)};$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)}=O_{\alpha}u_{\alpha,\alpha}^{(0)}+H_{\alpha,\beta}O_1O_2u_{\beta}^{(0)}+H_{\alpha 3}O_{\alpha}u_3^{(0)};$$

$$2\varepsilon_{12}^{(0)}=H_1O_2(u_1^{(0)}O_1)_{,2}+H_2O_1(u_2^{(0)}O_2)_{,1};$$

$$\varepsilon_{33}^{(0)}=u_{3/3}^{(1)};\qquad 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(0)}=u_{\alpha/3}^{(1)}-H_{\alpha 3}O_{\alpha}u_{\alpha}^{(0)}+O_{\alpha}u_{3,\alpha}^{(0)};$$

$$\Sigma_{3\pm}:\sigma_{i3}^{(0)}=0;$$

$$\Sigma_{S}:[\sigma_{i3}^{(0)}]=0;\quad [u_i^{(1)}]=0;\qquad <u_i^{(1)}>=0. \qquad (19)$$

Локальные задачи L_n, n>1 имеют следующий вид:

$$(H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} +$$

$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} + H_1 H_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(n)} - H_\beta f_\alpha^{(n)} = h_\alpha^{(n-1)};\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2;$$

$$(H_2 \sigma_{13}^{(n-1)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(n-1)})_{,2} - H_2 H_{13}\sigma_{11}^{(n-1)} - H_1 H_{23}\sigma_{22}^{(n-1)} +$$

$$+\ (H_{13}H_2 + H_1 H_{23})\sigma_{33}^{(n-1)} + H_1 H_2 \sigma_{33/3}^{(n)} - H_\beta f_3^{(n)} = h_3^{(n-1)};$$

$$\sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJ33}\varepsilon_{33}^{(n)};\ \sigma_{I3}^{(n)} = 2C_{I3K3}\varepsilon_{K3}^{(n)};\ \sigma_{33}^{(n)} = C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{3333}\varepsilon_{33}^{(n)};$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + H_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(n)} + H_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(n)};$$

$$2\varepsilon_{12}^{(n)} = O_2 u_{1,2}^{(n)} + O_1 u_{2,1}^{(n)} - O_1 O_2 (H_{1,2} u_1^{(n)} + H_{2,1} u_2^{(n)});$$

$$\varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)};$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} = u_{\alpha/3}^{(n+1)} - H_{\alpha 3} O_\alpha u_\alpha^{(n)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(n)};$$

$$\Sigma_{3\pm}:\ \sigma_{i3}^{(n)} = S_{i\pm}^{(n)};$$

$$\Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(n)}] = 0; \quad [u_i^{(n+1)}] = 0; \quad < u_i^{(n+1)} >= 0. \tag{20}$$

В формулах (20) введена операция осреднения по толщине оболочки $< u_i^{(n)} >= \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(n)} d\xi,$ а также обозначена функция граничных условий: $S_{i\pm}^{(n)} = 0,$ если $n = 1, 2, 4, 5, ...;$ $S_{i\pm}^{(n)} = -p_\pm \delta_{i_3},$ если $n = 3$. Уравнения равновесия (17) после введения функций $h_\alpha^{(n)}, h_3^{(n)}$ принимают вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} æ^n h_i^{(n)} = h_i^{(0)} + æ h_i^{(1)} + æ^2 h_i^{(2)} + ... = 0. \tag{21}$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (19) при n = 0 являются функции $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ (напряжения $\sigma_{ij}^{(n)} = 0,\ n < 0$). Они зависят от локальных координат ξ_l и входных данных этой задачи — перемещений $u_j^{(0)}(x_J)$. Решением задачи (21) при n = 1 для первого приближения являются функции $u_j^{(2)},\ \varepsilon_{kl}^{(1)},\ \sigma_{ij}^{(1)},$ а $u_j^{(1)},\ \varepsilon_{kl}^{(0)},\ \sigma_{ij}^{(0)}$ в этой задаче — входные данные. В задаче (21) для второго приближения при $n=2$ функции $u_j^{(3)}$, $\varepsilon_{kl}^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$ — неизвестные, а $u_j^{(2)}$, $\varepsilon_{kl}^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$ — входные данные и т. д.

Решение задачи нулевого приближения. Ввиду того, что задачи (19) являются одномерными по локальной переменной ξ, их решение можно найти аналитически. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче нулевого приближения имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(0)}=0; \forall\xi: -0,5<\xi<0,5. \tag{22}$$

Подставив (22) во вторую и третью группу определяющих соотношений в системе (19), получаем: $C_{I3K3}\varepsilon_{K3}^{(0)}=0,\ C_{33KL}\varepsilon_{KL}^{(0)}+C_{3333}\varepsilon_{33}^{(0)}=0.$ Отсюда следует, что в нулевом приближении деформации межслойного сдвига во всех слоях являются нулевыми, а поперечная деформация — ненулевая

$$\varepsilon_{K3}^{(0)}=0;\ \ \varepsilon_{33}^{(0)}=-Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)};\ \ Z_{3KL}=C_{3333}^{-1}C_{33KL}. \tag{23}$$

Подставив в (23) выражения для деформаций $\varepsilon_{K3}^{(0)}$ $\varepsilon_{33}^{(0)}$ из (19), получаем:

$$\begin{gathered} u_{\alpha/3}^{(1)}=H_{\alpha3}O_\alpha u_\alpha^{(0)}-O_\alpha u_{3,\alpha}^{(0)}; \qquad \alpha=1,2; \\ u_{3/3}^{(1)}=-Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)}. \end{gathered} \tag{24}$$

После интегрирования этих уравнений с учетом условий $<u_i^{(1)}>=0$ находим перемещения $u_i^{(1)}$:

$$\begin{gathered} u_\alpha^{(1)}=-\xi O_\alpha(u_{3,\alpha}^{(0)}+H_{\alpha3}u_\alpha^{(0)}); \\ u_3^{(1)}=U_{3KL}^{(1)}\varepsilon_{KL}^{(0)}. \end{gathered} \tag{25}$$

Здесь учтено, что деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}(\overline{q}_J)$, согласно выражению (15), не зависят от величины ξ. Также здесь введено обозначение для следующей операции:

$$U_{3KL}^{(1)}=-<Z_{3KL}>_\xi;\ <Z_{iKL}>_\xi=\int_{-0,5}^{\xi}Z_{iKL}d\xi-<\int_{-0,5}^{\xi}Z_{iKL}d\xi>. \tag{26}$$

Подставив выражения (23) в первую группу определяющих соотношений системы (19), находим напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$:

$$\sigma_{IJ}^{(0)}=C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(0)};\ \ C_{IJKL}^{(0)}=C_{IJKL}-C_{IJ33}Z_{3KL}. \tag{27}$$

Решение локальных задач L_n высших приближений. Решение уравнений равновесия (вторая группа уравнений в системе (20)) вместе с граничными условиями на Σ_s и $\xi = -0,5$ имеет вид

$$\sigma_{\alpha 3}^{(n)} = -O_1 O_2 \int_{-0,5}^{\xi} ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + $$

$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(n-1)}) d\xi + O_1 O_2 (h_\alpha^{(n-1)} + $$

$$+ H_\beta f_\alpha^{(n-1)})(\xi + 0,5), \ n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{28}$$

$$\sigma_{33}^{(n)} = -O_1 O_2 \int_{-0,5}^{\xi} ((H_2 \sigma_{13}^{(n-1)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(n-1)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - $$

$$- H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} + (H_{13} H_2 + H_1 H_{23}) \sigma_{33}^{(n-1)}) d\xi + O_1 O_2 (h_3^{(n-1)} + $$

$$+ H_1 H_2 f_3^{(n-1)})(\xi + 0,5) + S_{3-}^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{29}$$

Условия существования решений для (28), (29) задачи (20), удовлетворяющих граничным условиям Σ_{3+} : $\sigma_{i3}^{(n)} = S_{i+}^{(n)}$, на внешней поверхности $\xi = 0,5$, приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций $h_\alpha^{(n)}, h_3^{(n)}$:

$$h_\alpha^{(n)} + H_\beta f_\alpha^{(n)} = < ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(n)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(n)} + $$

$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(n)}) >;$$

$$O_1 O_2 (h_3^{(n)} + H_1 H_2 f_3^{(n)}) = O_1 O_2 < (H_2 \sigma_{13}^{(n)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(n)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(n)} - $$

$$- H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(n)} + (H_{13} H_2 + H_1 H_{23}) \sigma_{33}^{(n)} > + \Delta S_3^{(n)}, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

где $\Delta S_3^{(n)} = S_{3+}^{(n)} - S_{3-}^{(n)}$.

С учетом формул (30) выражения для напряжений $\sigma_{i3}^{(m)}$ в формулах (28)–(29) принимают вид

$$\sigma_{\alpha 3}^{(n)} = -O_1 O_2 \{((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} + $$

$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(n-1)})\}_\xi;$$

$$\sigma_{33}^{(n)} = -O_1 O_2 \{(H_2 \sigma_{13}^{(n-1)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(n-1)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} + $$

$$+ (H_{13} H_2 + H_1 H_{13}) \sigma_{33}^{(n-1)}\}_\xi + (S_{3-}^{(n)} + \Delta S_3^{(n)} (\xi + 0,5)). \tag{31}$$

Здесь обозначен оператор

$$\{f(q_I,\xi)\}_\xi = \int_{-0,5}^{\xi} \left(f(q_I,\xi) - < f(q_I,\xi) > \right) d\xi. \qquad (32)$$

С помощью определяющих соотношений для сдвиговых и поперечных напряжений в системе уравнений (20) находим сдвиговые и поперечные деформации:

$$2\varepsilon_{K3}^{(n)} = C_{I3K3}^{-1}\sigma_{I3}^{(n)};$$

$$\varepsilon_{33}^{(n)} = C_{3333}^{-1}\sigma_{33}^{(n)} - Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)}. \qquad (33)$$

Из кинематических соотношений (шестая и седьмая группы уравнений) системы (20) с учетом формул (30) и условий нормировки $< u_i^{(n+1)*} >= 0$ находим перемещения высоких приближений $u_3^{(n)}$, $u_I^{(n)}$:

$$u_3^{(n)} =< \varepsilon_{33}^{(n-1)} >_\xi = - < Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(n-1)} >_\xi + < C_{3333}^{-1}\sigma_{33}^{(n-1)} >_\xi, \;\; n = 1, 2, 3, ...;$$

$$u_\alpha^{(n)} = 2 < \varepsilon_{\alpha 3}^{(n-1)} >_\xi + H_{\alpha 3} O_\alpha < u_\alpha^{(n-1)} >_\xi - O_\alpha < u_{3,\alpha}^{(n-1)} >_\xi, \;\; n = 2, 3, ... \qquad (34)$$

Выражение решения первого приближения через нулевое приближение. С практической точки зрения для достижения приемлемой инженерной точности вычислений для напряжений σ_{IJ} достаточно ограничиться только нулевым и первым приближениями $\sigma_{IJ}^{(0)}$ и $\sigma_{IJ}^{(1)}$, для сдвиговых напряжений σ_{I3} минимально необходимым является второе приближение, а для поперечных напряжений σ_{33} — третье приближение. Найдем для них явные формулы через функции нулевого приближения.

Подставив выражения (22) и (27) в (31), получаем для сдвиговых напряжений $\sigma_{\alpha 3}^{(1)}$ и нормальных напряжений $\sigma_{33}^{(1)}$ первого приближения следующие формулы, выражающие их через деформации нулевого приближения $\varepsilon_{KL}^{(0)}$:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -O_1 O_2 (\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}\}_\xi (H_\beta \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\alpha} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_\xi (H_\alpha \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\beta} +$$

$$+ (\{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_\xi H_{\alpha,\beta} - \{C_{\beta\beta KL}^{(0)}\}_\xi H_{\beta,\alpha})\varepsilon_{KL}^{(0)}), \;\; \alpha = 1, 2; \qquad (35)$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = (O_1 H_{13} \{C_{11KL}^{(0)}\}_\xi + O_2 H_{23} \{C_{22KL}^{(0)}\}_\xi)\varepsilon_{KL}^{(0)}. \qquad (36)$$

Здесь учтено, что деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и параметры Ламе H_β не зависят от координаты ξ, а зависят от нее только модули упругости $C_{ijkl}^{(0)}$.

В свою очередь, полагаем, что эти модули $C_{ijkl}^{(0)}$ не зависят от глобальных координат $\bar{q}_I$.

Дифференцируя в выражении (35) по частям произведения функций $(H_\beta \varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\alpha}$ и приводя подобные, формулы (35) и (36) перепишем в следующем более компактном виде:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -C_{\alpha 3KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)};$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = C_{33KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)}. \qquad (37)$$

Здесь введены обозначения для функций от локальной и глобальных координат:

$$C_{\alpha 3KL}^{(1)} = O_1 O_2 (\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)}\}_\xi) H_{\beta,\alpha} + 2\{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_\xi H_{\alpha,\beta});$$

$$R_{\alpha KLJ}^{(1)} = O_1 O_2 (\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}\}_\xi H_\beta \delta_{\alpha J} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\}_\xi H_\alpha \delta_{\beta J});$$

$$C_{33KL}^{(1)} = O_1 H_{13} \{C_{11KL}^{(0)}\}_\xi + O_2 H_{23} \{C_{22KL}^{(0)}\}_\xi. \qquad (38)$$

Выразим деформации $\varepsilon_{K3}^{(1)}$ и $\varepsilon_{33}^{(1)}$ из соотношений (33) при $n = 1$:

$$2\varepsilon_{K3}^{(1)} = C_{I3K3}^{-1} \sigma_{K3}^{(1)};$$

$$\varepsilon_{33}^{(1)} = C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(1)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)}, \qquad (39)$$

где использовано обозначение из (23).

Подставив (39) в третью группу формул системы (20), находим аналог формул (27) для первого приближения:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + Z_{3IJ} \sigma_{33}^{(1)}. \qquad (40)$$

Подставив выражения (37) в равенство (40), получаем формулу

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + G_{IJKL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)}. \qquad (41)$$

В формуле (41) обозначены функции:

$$G_{IJKL}^{(1)} = Z_{3IJ} C_{33KL}^{(0)}. \qquad (42)$$

Выразим деформации $\varepsilon_{KL}^{(1)}$ первого приближения через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и перемещения нулевого приближения. Для этого воспользуемся первой и второй формулами в системе (14) и подставим в них формулы (25). Тогда после приведения подобных получаем:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)} = \xi \eta_{\alpha\alpha} + \Phi_{\alpha\alpha KL} \varepsilon_{KL}^{(0)};$$

$$\varepsilon_{12}^{(1)} = \xi \eta_{12} + \Phi_{12KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}. \qquad (43)$$

В системе формул (43) введены обозначения для деформаций кривизны оболочки:

$$-\eta_{\alpha\alpha} = O_\alpha (O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} + H_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}))_{,\alpha} + O_1 O_2 O_\beta H_{\alpha,\beta} (u_{3,\beta}^{(0)} + H_{\beta 3} u_\beta^{(0)});$$

$$-2\eta_{12} = H_1 O_2 (O_1^2 (u_{3,1}^{(0)} + H_{13} u_1^{(0)}))_{,2} + H_2 O_1 (O_2^2 (u_{3,2}^{(0)} + H_{23} u_2^{(0)}))_{,1}, \qquad (44)$$

а также обозначены компоненты тензора $\Phi_{\alpha\alpha KL}$:

$$\Phi_{\alpha\alpha KL} = O_\alpha H_{\alpha 3} U_{3KL}; \;\; \Phi_{12KL} = 0. \qquad (45)$$

Формулы (43) можно записать в едином тензорном виде

$$\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \xi \eta_{IJ} + \Phi_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)}. \qquad (46)$$

Подставив выражение (46) в равенство (41), получаем итоговую формулу для напряжений первого приближения $\sigma_{IJ}^{(1)}$ через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и кривизны η_{KL} нулевого приближения:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{IJKL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)}. \qquad (47)$$

В формуле (47) введены обозначения:

$$C_{IJKL}^{(1)} = G_{IJKL}^{(1)} + C_{IJMN}^{(0)} \Phi_{MNKL}. \qquad (48)$$

Использовав формулы (34), находим перемещения второго приближения:

$$u_3^{(2)} = -< Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} >_\xi + < C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(1)} >_\xi, \qquad n = 1, 2, 3, \dots ;$$

$$u_\alpha^{(2)} =< C_{\alpha 3K3}^{-1} \sigma_{K3}^{(1)} >_\xi + H_{\alpha 3} O_\alpha < u_\alpha^{(1)} >_\xi - O_\alpha < u_{3,\alpha}^{(1)} >_\xi, \qquad n = 2, 3, \dots . \; (49)$$

С учетом уравнений (25), (37) и (46) эти выражения запишем в виде

$$u_3^{(2)} = U_{3KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - J_{3KL} \eta_{KL};$$

$$u_\alpha^{(2)} = -< \xi >_\xi H_{\alpha 3} O_\alpha^2 (u_{3,\alpha}^{(0)} + H_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}) - U_{\alpha KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - K_{\alpha KLJ} \varepsilon_{KL,J}^{(0)}. \qquad (50)$$

В выражениях (50) обозначены:

$$U_{3KL}^{(2)} = -< Z_{3KL} \Phi_{KLIJ} >_\xi + < C_{3333}^{-1} C_{33KL}^{(1)} >_\xi;$$

$$U_{\alpha KL}^{(2)} =< C_{\alpha 3I3}^{-1} C_{I3KL}^{(1)} >_\xi;$$

$$J_{3KL} =< Z_{3KL} \xi >_\xi; \;\; K_{\alpha KLJ} =< C_{\alpha 3I3}^{-1} R_{IKLJ}^{(1)} >_\xi + O_\alpha < U_{3KL}^{(1)} >_\xi \delta_{\alpha J}. \qquad (51)$$

Выражение решения второго приближения через нулевое приближение. Из формул (31) при $n = 2$ получаем выражение для сдвиговых и поперечных напряжений:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -O_1 O_2 \{((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} + H_\alpha \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} + 2H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(1)} +$$
$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(1)})\}_\xi;$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = -O_1 O_2 \{(H_2 \sigma_{13}^{(1)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(1)})_{,2} - H_2 H_{13}\sigma_{11}^{(1)} - H_1 H_{23}\sigma_{22}^{(1)} +$$
$$+ (H_{13} H_2 + H_1 H_{23})\sigma_{33}^{(1)}\}_\xi. \qquad (52)$$

Подставив в (52) выражения (37) для $\sigma_{33}^{(1)}\ \sigma_{\alpha 3}^{(1)}$ и выражение (47) для $\sigma_{IJ}^{(1)}$, после группировки слагаемых получаем искомые соотношения между сдвиговыми $\sigma_{\alpha 3}^{(2)}$ и поперечными $\sigma_{33}^{(2)}$ напряжениями второго приближения и деформациями нулевого приближения:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -C_{\alpha 3KL}^{(2)}\varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha 3KLJ}^{(2)}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} - N_{\alpha 3KL}\eta_{KL} - V_{\alpha 3KLJ}\eta_{KL,J};$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = C_{33KL}^{(2)}\varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{33KLJ}^{(2)}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{33KLJM}^{(2)}\varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + N_{33KL}^{(2)}\eta_{KL}. \qquad (53)$$

В (53) обозначены следующие тензоры:

$$C_{\alpha 3KL}^{(2)} = O_1 O_2 (\{(C_{\alpha\alpha KL}^{(1)} - C_{\beta\beta KL}^{(1)})\xi\}_\xi H_{\beta,\alpha} + 2\{C_{\alpha\beta KL}^{(1)}\xi\}_\xi H_{\alpha,\beta} -$$
$$- (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\{C_{\alpha 3KL}^{(1)}\}_\xi);$$

$$R_{\alpha 3KLJ}^{(2)} = O_1 O_2 (\{C_{\alpha\alpha KL}^{(1)}\xi\}_\xi H_\beta \delta_{\alpha J} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(1)}\xi\}_\xi H_\alpha \delta_{\beta J} -$$
$$- (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\{R_{\alpha KLJ}^{(1)}\}_\xi);$$

$$N_{\alpha 3KL} = O_1 O_2 (\{(C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})\xi\}_\xi H_{\beta,\alpha} + 2\{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\xi\}_\xi H_{\alpha,\beta});$$

$$V_{\alpha 3KLJ} = O_1 O_2 (\{C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}\xi\}_\xi H_\beta \delta_{\alpha J} + \{C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\xi\}_\xi H_\alpha \delta_{\beta J});$$

$$C_{33KL}^{(2)} = O_1 O_2 (\{C_{13KL}^{(1)}\}_\xi H_{2,1} + \{C_{23KL}^{(1)}\}_\xi H_{1,2} + \{C_{11KL}^{(1)}\}_\xi H_2 H_{13} +$$
$$+ \{C_{22KL}^{(1)}\}_\xi H_1 H_{23} - (H_2 H_{13} + H_1 H_{23})\{C_{33KL}^{(1)}\}_\xi);$$

$$R_{33KLJ}^{(2)} = O_1 O_2 (\{C_{13KL}^{(1)}\}_\xi H_2 \delta_{1J} + \{C_{23KL}^{(1)}\}_\xi H_1 \delta_{2J} +$$
$$+ \{R_{1KLJ}^{(1)}\}_\xi H_{2,1} + \{R_{2KLJ}^{(1)}\}_\xi H_{1,2});$$

$$E_{33KLJM}^{(2)} = O_1 O_2 (\{R_{1KLJ}^{(1)}\}_\xi H_2 + \{R_{2KLJ}^{(1)}\}_\xi H_1);$$

$$N_{33KL}^{(2)} = O_1 O_2 (\{C_{11KL}^{(0)}\xi\}_\xi H_2 H_{13} + \{C_{22KL}^{(0)}\xi\}_\xi H_1 H_{23}). \qquad (54)$$

Выразим деформации $\varepsilon_{K3}^{(2)}$ и $\varepsilon_{33}^{(2)}$ из соотношений (33) при $n = 2$:

$$2\varepsilon_{K3}^{(2)} = C_{I3K3}^{-1}\sigma_{K3}^{(2)};$$

$$\varepsilon_{33}^{(2)} = C_{3333}^{-1}\sigma_{33}^{(2)} - Z_{3KL}\varepsilon_{KL}^{(2)}, \tag{55}$$

где использовано обозначение из (23).

Подставив (55) в третью группу формул системы (20), находим аналог формулы (27) для второго приближения:

$$\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(2)} + Z_{3IJ}\sigma_{33}^{(2)}. \tag{56}$$

Выразим деформации $\varepsilon_{KL}^{(2)}$ второго приближения через деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ и перемещения нулевого приближения. Для этого воспользуемся первой и второй формулами в системе уравнений (14) при $n = 2$:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(2)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(2)} + O_1 O_2 H_{\alpha,\beta} u_\beta^{(2)} + u_3^{(2)} H_{\alpha 3} O_\alpha;$$

$$2\varepsilon_{12}^{(2)} = H_1 O_2 (u_1^{(2)} O_1)_{,2} + H_2 O_1 (u_2^{(2)} O_2)_{,1} \tag{57}$$

и подставим в них выражения (50) для перемещений $u_3^{(2)}, u_\alpha^{(2)}$. Тогда после приведения подобных получаем:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(2)} = <\xi>_\xi \eta_{\alpha\alpha}^{(2)} - L_{\alpha\alpha KL}^{(2)}\eta_{KL} - \Phi_{\alpha\alpha KL}^{(2)}\varepsilon_{KL}^{(0)} - B_{\alpha\alpha KLJ}^{(2)}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} - K_{\alpha\alpha KLJM}^{(2)}\varepsilon_{KL,JM}^{(0)};$$

$$2\varepsilon_{12}^{(2)} = 2<\xi>_\xi \eta_{12}^{(2)} - 2\Phi_{12KL}^{(2)}\varepsilon_{KL}^{(0)} - 2B_{12KLJ}^{(2)}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} - 2K_{12KLJM}^{(2)}\varepsilon_{KL,JM}^{(0)}. \tag{58}$$

Здесь обозначены

$$L_{\alpha\alpha KL}^{(2)} = H_{\alpha 3} O_\alpha J_{3KL}^{(2)}, \;\; L_{12KL}^{(2)} = 0;$$

$$\Phi_{\alpha\alpha KL}^{(2)} = O_1 O_2 H_{\alpha,\beta} U_{\alpha KL}^{(2)} - H_{\alpha 3} O_\alpha U_{3KL}^{(2)};$$

$$2\Phi_{12KL}^{(2)} = O_2 H_1 (O_1 U_{1KL}^{(2)})_{,2} + O_1 H_2 (O_2 U_{2KL}^{(2)})_{,1};$$

$$B_{\alpha\alpha KLJ}^{(2)} = O_\alpha U_{\alpha KL}^{(2)}\delta_{\alpha J} + O_1 O_2 H_{\alpha,\beta} K_{\alpha KLJ};$$

$$2B_{12KLJ}^{(2)} = O_2 O_1 (H_1 U_{1KL}^{(2)}\delta_{2J} + H_2 U_{2KL}^{(2)}\delta_{1J}) + O_2 H_1 K_{1KLJ,2} + O_1 H_2 K_{2KLJ,1};$$

$$K_{\alpha\alpha KLJM}^{(2)} = O_\alpha K_{\alpha KLJ}\delta_{\alpha M};$$

$$2K_{12KLJM}^{(2)} = O_2 H_1 K_{1KLJ}\delta_{2M} + O_1 H_2 K_{2KLJ}\delta_{1M} \tag{59}$$

и введены обозначения для деформаций кривизны оболочки второго приближения:

$$-\eta_{\alpha\alpha}^{(2)} = O_\alpha (H_{\alpha 3} O_\alpha^2 (u_{3,\alpha}^{(0)} + H_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}))_{,\alpha} + O_1 O_2 H_{\alpha,\beta} H_{\beta 3} O_\beta^2 (u_{3,\beta}^{(0)} + H_{\beta 3} u_\beta^{(0)});$$

$$-2\eta_{12}^{(2)} = O_2 H_1 (H_{13} O_1^2 (u_{3,1}^{(0)} + H_{13} u_1^{(0)}))_{,2} +$$
$$+ O_1 H_2 (H_{23} O_2^2 (u_{3,2}^{(0)} + H_{23} u_2^{(0)}))_{,1}. \qquad (60)$$

Формулы (58) можно записать в едином тензорном виде

$$\varepsilon_{SP}^{(2)} = <\xi>_\xi \eta_{SP}^{(2)} - L_{SPKL}^{(2)} \eta_{KL} - \Phi_{SPKL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - B_{SPKLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - K_{SPKLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)}. \qquad (61)$$

Подставив выражение (53) для $\sigma_{33}^{(2)}$ и выражение (61) для $\varepsilon_{SP}^{(2)}$ в равенство (56), получаем формулу

$$\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJSP}^{(0)} (<\xi>_\xi \eta_{SP}^{(2)} - L_{SPKL}^{(2)} \eta_{KL} - \Phi_{SPKL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - B_{SPKLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - K_{SPKLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)}) +$$
$$+ Z_{3IJ} (C_{33KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{3KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{KLJM} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + N_{33KL} \eta_{KL}). \qquad (62)$$

Введя обозначения

$$C_{IJKL}^{(2)} = C_{IJSP}^{(0)} \Phi_{SPKL}^{(2)} - Z_{3IJ} C_{33KL}^{(2)};$$

$$R_{IJKLM}^{(2)} = C_{IJSP}^{(0)} B_{SPKLM}^{(2)} - Z_{3IJ} R_{3KLM}^{(2)};$$

$$E_{IJKLMN} = C_{IJSP}^{(0)} K_{SPKLMN}^{(2)} - Z_{3IJ} E_{KLMN};$$

$$N_{IJKL} = C_{IJSP}^{(0)} L_{SPKL}^{(2)} - Z_{3IJ} N_{33KL}, \qquad (63)$$

запишем формулу (62) в итоговом компактном виде

$$\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL}^{(0)} <\xi>_\xi \eta_{KL}^{(2)} - C_{IJKL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{IJKLM}^{(2)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} -$$
$$- E_{IJKLMN} \varepsilon_{KL,MN}^{(0)} - N_{IJKL} \eta_{KL}. \qquad (64)$$

Выражение решения третьего приближения через нулевое приближение. Из формул (31) при $n = 3$ получаем выражение для поперечных напряжений третьего приближения:

$$\sigma_{33}^{(3)} = -O_1 O_2 \{(H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(2)} +$$
$$+ (H_{13} H_2 + H_1 H_{23}) \sigma_{33}^{(2)}\}_\xi - (p_\pm \delta_{i3} + \Delta p(\xi + 0,5)). \qquad (65)$$

Все входящие в формулу (65) напряжения второго приближения уже вычислены, и их можно выразить по формулам (53) и (64). После подстановки этих формул получаем окончательно:

$$\sigma_{33}^{(3)} = C_{33KL}^{(3)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{33KLJ}^{(3)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{33KLJM}^{(3)} \varepsilon_{KL,JM}^{(3)} + N_{33KL}^{(3)} \eta_{KL} +$$
$$+ V_{33KLM}^{(3)} \eta_{KL,M} + W_{KL}^{(3)} \eta_{KL}^{(2)} - (p_\pm + \Delta p(\xi + 0,5)). \qquad (66)$$

В уравнении (66) обозначены тензоры:

$$C^{(3)}_{33KL} = O_1 O_2 (\{C^{(2)}_{13KL}\}_\xi H_{2,1} + \{C^{(2)}_{23KL}\}_\xi H_{1,2} - H_2 H_{13} \{C^{(2)}_{11KL}\}_\xi -$$
$$- H_1 H_{23} \{C^{(2)}_{22KL}\}_\xi - (H_{13} H_2 + H_1 H_{23}) \{C^{(2)}_{33KL}\}_\xi);$$

$$R^{(3)}_{33KLM} = O_1 O_2 (\{R^{(2)}_{13KLM}\}_\xi H_{2,1} + \{R^{(2)}_{23KLM}\}_\xi H_{1,2} - H_2 H_{13} \{R^{(2)}_{11KLM}\}_\xi -$$
$$- H_1 H_{23} \{R^{(2)}_{22KLM}\}_\xi - (H_{13} H_2 + H_1 H_{23}) \{R^{(2)}_{33KLM}\}_\xi);$$

$$E^{(3)}_{33KLJM} = -O_1 O_2 (H_2 H_{13} \{E^{(2)}_{11KLJM}\}_\xi + H_1 H_{23} \{E^{(2)}_{22KLJM}\}_\xi +$$
$$+ (H_{13} H_2 + H_1 H_{23}) \{E^{(2)}_{33KLJM}\}_\xi);$$

$$N^{(3)}_{33KL} = O_1 O_2 (\{N^{(2)}_{13KL}\}_\xi H_{2,1} + \{N^{(2)}_{23KL}\}_\xi H_{1,2} - H_2 H_{13} \{N^{(2)}_{11KL}\}_\xi -$$
$$- H_1 H_{23} \{N^{(2)}_{22KL}\}_\xi - (H_{13} H_2 + H_1 H_{23}) \{N^{(2)}_{33KL}\}_\xi);$$

$$V^{(3)}_{33KLM} = O_1 O_2 (\{V^{(2)}_{13KLM}\}_\xi H_{2,1} + \{V^{(2)}_{23KLM}\}_\xi H_{1,2});$$

$$W^{(3)}_{KL} = O_1 O_2 (H_2 H_{13} \{< \xi >_\xi C^{(0)}_{11KL}\}_\xi + H_1 H_{23} \{< \xi >_\xi C^{(0)}_{22KL}\}_\xi). \qquad (67)$$

Явный вид компонент полного тензора напряжений в композитной многослойной оболочке. Подставив формулы (27) и (47) в асимптотическое разложение (15) и сохранив члены до первого порядка относительно æ, получим следующее выражение для компонент σ_{IJ} тензора напряжений через деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ и кривизны нулевого приближения:

$$\sigma_{IJ} = \hat{C}^{(1)}_{IJKL} \varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{C}^{(0)}_{IJKL} \xi \eta_{KL}. \qquad (68)$$

Подставив формулы (37) и (53) в то же асимптотическое разложение (15) и сохраняя члены по второго порядка относительно æ, получаем следующее выражение для сдвиговых компонент σ_{I3} тензора напряжений через деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ и кривизны нулевого приближения:

$$-\sigma_{\alpha 3} = \hat{C}^{(2)}_{\alpha 3KL} \varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{R}^{(2)}_{\alpha 3KLJ} \varepsilon^{(0)}_{KL,J} + \hat{N}_{\alpha 3KL} \eta_{KL} + \hat{V}_{\alpha 3KLJ} \eta_{KL,J}. \qquad (69)$$

Подставив формулы (37) и (53), (66) в асимптотическое разложение (15) и сохраняя члены вплоть до третьего порядка относительно æ, получаем выражение для поперечной компоненты σ_{33} тензора напряжений через деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ и кривизны нулевого приближения:

$$\sigma_{33} = \hat{C}^{(3)}_{33KL}\varepsilon^{(0)}_{KL} + \hat{R}^{(3)}_{33KLJ}\varepsilon^{(0)}_{KL,J} + \hat{E}^{(3)}_{33KLJM}\varepsilon^{(3)}_{KL,JM} + \hat{N}^{(3)}_{33KL}\eta_{KL} + \\ + \hat{V}^{(3)}_{33KLM}\eta_{KL,M} + \hat{W}^{(3)}_{KL}\eta^{(2)}_{KL} - (p_{\pm} + \Delta p(\xi + 0,5)). \qquad (70)$$

В формулах (68)–(70) обозначены тензоры, зависящие только от упругих характеристик слоев оболочки, толщин слоев и параметров Ламе срединной поверхности оболочки:

$$\hat{C}^{(1)}_{IJKL} = C^{(0)}_{IJKL} + æC^{(1)}_{IJKL}, \quad \hat{C}^{(0)}_{IJKL} = æC^{(0)}_{IJKL};$$

$$\hat{C}^{(2)}_{\alpha 3KL} = æC^{(1)}_{\alpha 3KL} + æ^2 C^{(2)}_{\alpha 3KL}, \qquad \hat{R}^{(2)}_{\alpha 3KLJ} = æR^{(1)}_{\alpha 3KLJ} + æ^2 R^{(2)}_{\alpha 3KLJ};$$

$$\hat{N}_{\alpha 3KL} = æ^2 N_{\alpha 3KL}, \qquad \hat{V}_{\alpha 3KLJ} = æ^2 V_{\alpha 3KLJ};$$

$$\hat{C}^{(3)}_{33KL} = æ\ C^{(1)}_{33KL} + æ^2 C^{(2)}_{33KL} + æ^3 C^{(3)}_{33KL}, \quad \hat{R}^{(3)}_{33KLJ} = æ^2 R^{(2)}_{33KLJ} + æ^3 R^{(3)}_{33KLJ};$$

$$\hat{E}^{(3)}_{33KLJM} = æ^2 E^{(2)}_{33KLJM} + æ^3 E^{(3)}_{33KLJ}, \quad \hat{N}^{(3)}_{33KL} = æ^2 N^{(2)}_{33KL} + æ^3 N^{(3)}_{33KL};$$

$$\hat{V}^{(3)}_{33KLM} = æ^3 V^{(3)}_{33KLM}, \quad \hat{W}^{(3)}_{KL} = æ^3 W^{(3)}_{KL}. \qquad (71)$$

Формулы (68)–(70) дают выражение для полного тензора (всех шести компонент) напряжений в многослойной композитной оболочке через деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ и кривизны нулевого приближения $\eta^{(0)}_{KL}$, а также кривизны второго приближения, которые согласно выражениям (60), отображаются через перемещения нулевого приближения $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$.

Осредненные уравнения равновесия многослойных оболочек. Перемещения нулевого приближения $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$ вычисляют с помощью решения осредненной системы уравнений для всей оболочки:

$$(H_\beta T_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (H_\alpha T_{\alpha\beta})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta} - H_{\beta,\alpha} T_{\beta\beta} = 0;$$

$$(H_\beta M_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (H_\alpha M_{\alpha\beta})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} - H_{\beta,\alpha} M_{\beta\beta} - H_1 H_2 Q_\alpha = 0;$$

$$(H_2 Q_1)_{,1} + (H_1 Q_2)_{,2} - H_2 H_{13} T_{11} - H_1 H_{23} T_{22} - H_1 H_2 \Delta\overline{p} = 0. \qquad (72)$$

Вывод этих уравнений на основе асимптотической теории представлен в работе [24]. В системе уравнений (72) обозначено $\Delta\overline{p} = æ^2 \Delta p$. Уравнения совпадают с классическими осредненными уравнениями теории оболочек Кирхгофа — Лява и Тимошенко [25], но усилия T_{IJ}, моменты M_{IJ} и перерезывающие сил Q_I в оболочке, входящие в систему (72), определяются специальным образом, в виде асимптотических разложений:

$$T_{IJ} = <\sigma_{IJ}^{(0)}> + æ <\sigma_{IJ}^{(1)}> + \ldots;$$

$$M_{IJ} = æ <\xi\sigma_{IJ}^{(0)}> + æ^2 <\xi\sigma_{IJ}^{(1)}> + \ldots;$$

$$Q_I = æ <\sigma_{I3}^{(1)}> + æ^2 <\sigma_{I3}^{(2)}> + \ldots . \qquad (73)$$

Подставив выражения (27) и (47) для напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$ в формулы (73), получаем с точностью до значения порядка малости, указанного в формулах (73):

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL}\eta_{KL};$$

$$M_{IJ} = \bar{B}_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL}\eta_{KL}, \qquad (74)$$

где обозначены мембранные жесткости оболочки $\bar{C}_{IJKL}$, смешанные жесткости B_{IJKL}, $\bar{B}_{IJKL}$ и изгибные жесткости D_{IJKL}:

$$\bar{C}_{IJKL} = <C_{IJKL}^{(0)}> + æ <C_{IJKL}^{(1)}>; \; D_{IJKL} = æ^2 <\xi^2 C_{IJKL}^{(0)}>;$$

$$B_{IJKL} = æ <\xi C_{IJKL}^{(0)}>; \; \bar{B}_{IJKL} = æ <\xi C_{IJKL}^{(0)}> + æ^2 <\xi C_{IJKL}^{(1)}>. \qquad (75)$$

От классических выражений для жесткостей тонких оболочек выражения (75) отличаются: 1) наличием жесткостей первого порядка $æ <C_{IJKL}^{(1)}>$ и $æ^2 <\xi C_{IJKL}^{(1)}>$, которые обычно малы по сравнению с соответствующими жесткостями нулевого порядка $<C_{IJKL}^{(0)}>$ и $æ <\xi C_{IJKL}^{(0)}>$; 2) слагаемыми $C_{IJ33}Z_{3KL}$ в выражениях (27) для жесткостей нулевого приближения, учитывающими пуассоновские эффекты. Поправки обоих типов могут вносить изменения в жесткости оболочек.

Вместе с кинематическими соотношениями (44) и (19) (третья и четвертая группа уравнений этой системы) уравнения (72) и (74) образуют замкнутую систему относительно трех перемещений $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ и двух перерезающих сил Q_α, которые являются функциями только двух переменных — продольных координат $\bar{q}_\alpha$. После решения этой системы, например, численными методами, можно найти все шесть компонент тензора напряжений как функции уже всех трех координат: $\bar{q}_\alpha$ и ξ, используя для этого только аналитические явные формулы (68)–(70) и не решая при этом никаких дополнительных задач. Полученные выражения (68)–(70) представляют собой асимптотически точные выражения напряжений в общей трехмерной теории упругости.

Выводы. На основе ранее разработанной асимптотической теории тонких многослойных моноклинных анизотропных оболочек предложен алгоритм получения явных аналитических формул для расчета распределения компонент полного тензора напряжений по оболочке, в том числе по ее толщине. Решены локальные задачи теории оболочек первого, второго и третьего приближений, которые позволили получить выражения для всех шести компонент тензора напряжений в компактной замкнутой форме в виде зависимости от деформаций, искривлений срединной поверхности оболочки, а также их производных по продольным координатам, которые вычисляют с помощью решения осредненных уравнений асимптотической теории оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.

[2] Димитриенко Ю.И. *Механика композиционных материалов при высоких температурах*. Москва, Машиностроение, 1997, 366 с.

[3] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.

[4] Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross–sections. *Computational mecanics*, 2001, vol. 27. pp. 199–207.

[5] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams‖. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, p. 255–272.

[6] Tornabene F. Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 200 (2011), pp. 931–952.

[7] Гондлях А.В. Адаптация итерационно-аналитического многослойного конечного элемента в систему ABAQUS. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, 2012, № 3/7 (57), с. 62–68.

[8] Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.

[9] Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит. *Прикладная математика и механика*, 2003, т. 67, вып. 3, с. 472–483.

[10] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20 (4), p. 333–350.

[11] Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине. *Докл. АН СССР*, 1987, т. 294, № 5, с. 1061–1065.

[12] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore; London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.

[13] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2004, 228 p.

[14] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.

[15] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*. 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.

[16] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 336 с.

[17] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 356 с.

[18] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984. 471 с.

[19] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.

[20] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.

[21] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.

[22] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.

[23] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html

[24] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Шалыгин И.С. Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5 (29). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-5-1405

[25] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4: Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 580 с.

[26] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 576 с.

Статья поступила в редакцию 01.11.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Расчет полного тензора напряжений в тонких моноклинных композитных оболочках на основе метода асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 12. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-12-1557

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 350 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 50 научных работ в области механики композитов, асимптотических методов, механики контактного взаимодействия. e-mail: eagubareva@mail.ru

Юрин Юрий Викторович — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области механики композитов. e-mail: yvyurin@yandex.ru

Explicit formulas for the calculation of the complete tensor of the stresses in the monoclinic thin composite shells based on the asymptotic homogenization method

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, Yu.V. Yurin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents the results of further development of the previously proposed by the authors' new asymptotic theory of thin multilayer anisotropic shells. The theory is constructed on the equations of the general three-dimensional theory of elasticity by introducing small geometric parameter asymptotic expansions without any hypotheses on stresses and displacements distribution over the thickness. The case of monoclinic layers having at the most 13 independent elastic constants is considered. An algorithm for obtaining explicit analytic formulas for the calculation of the complete stress tensor component distribution over the shell is proposed. The algorithm is based on solving specific local problems of the first, second and third approximations. It allows obtaining expressions for all six components of the stress tensor in a compact closed form, as a function of strain, curvature of the middle surface of the shell, as well as their derivatives with respect to the longitudinal coordinates. These formulas allow calculating all stress tensor components in the shell without additional tasks, using only the solutions of the averaged problem of shell theory.

Keywords: *stress tensor, multilayer thin monoclinic shells, composites, the method of asymptotic averaging, asymptotic theory of shells*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Prozorovskiy A.A., Gubareva E.A., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonyuk N.N., Krylov V.D., Grigoryev M.M. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.

[2] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of Composites under High Temperatures*. Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publ., 1999, 347 p. [In Russ.: Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1997, 366 p.].

[3] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov — Mechanics of Composite Materials*, 1989, vol. 24, no. 4, pp. 698–704.

[4] Gruttmann F., Wagner W. *Computational Mechanics*, 2001, vol. 27, p. 199–207.

[5] Ghugal Y.M., Shmipi R.P. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2001, vol. 20, no. 3, pp. 255–272.

[6] Tornabene F. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 2011, vol. 200, issues 9–12, pp. 931–952.

[7] Gondlyakh A.V. *Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy — Eastern European Advanced Technology Magazine*, 2012, vol. 3/7 (57), pp. 62–68.

[8] Zveryaev E.M., Makarov G.I. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 308–321.

[9] Zveryaev E.M. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, vol. 67, no. 3, pp. 472– 483.

[10] Kohn R.V., Vogelius M. *International Journal of Solids and Structure*, 1984, vol. 20 (4), pp. 333–350.

[11] Panasenko G.P., Reztsov M.V. *Doklady AN SSSR — Reports of AN USSR,* 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065.

[12] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore; London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.

[13] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2004, 228 p.

[14] Sheshenin S.V. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2006, no. 6, pp. 71–79.

[15] Nazarov S.A, Svirs G.H, Slutskiy A.S. *Matematicheskiy Sbornik — Mathematics Collection,* 2011, vol. 202, no. 8, pp. 41–80.

[16] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov MGU Publ., 1984, 324 p.

[17] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 356 p.

[18] *Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag Publ., 1980 [In Russ.: Sanches-Palensiya E. Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy. Moscow, Mir Publ., 1984, 471 p.].

[19] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.

[20] Dimitrienko Yu.I. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2012, no. 3. pp. 86–100.

[21] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy — Mechanics of Composite Materials and Structures,* 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.

[22] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E., Sborshchikov S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical modeling and Computational Methods,* 2014, no.1 (1), pp. 36–57.

[23] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, issue 12. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html

[24] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E., Shalygin I.S. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, issue 5 (29). DOI: 10.18698/2308–6033-2015-5-1405

[25] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 m. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. In 4 vol. Vol. 4. Fundamentals of Solid Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 580 p.

[26] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Calculus of Tensors]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 576 p.

Dimitrienko Yu. I. (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Director of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development, Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 350 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Gubareva E.A. (b. 1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Cand. Sci. (Phys.&Math.), Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of 50 scientific publications in the field of composite mechanics, asymptotic analysis, contact mechanics. e-mail: eagubareva@mail.ru

Yurin Yu.V. (b. 1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. Postgraduate student (Ph.D.), Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of composite mechanics. e-mail: yvyurin@yandex.ru