

## Моделирование вязкоупругих характеристик пенопластов на основе многомасштабного конечно-элементного анализа

© Ю.И. Димитриенко, И.Д. Димитриенко, С.В. Сборщиков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Разработана методика расчета вязкоупругих характеристик пенопластов при установившихся циклических колебаниях, основанная на применении теории асимптотического осреднения периодических структур. Сформулированы локальные задачи вязкоупругости на ячейке периодичности. Методика позволяет вычислять полный набор компонент тензора комплексных модулей упругости пенопластов в заданном диапазоне частот. Приведен пример численного моделирования вязкоупругих характеристик пенопластов, который показал, что вязкоупругие свойства пенопластов, характеризуемые тангенсом угла потерь комплексных модулей упругости, могут иметь многоэкстремальный характер с наличием нескольких критических частот. Приведен пример трехмерного конечно-элементного расчета полей тензоров концентрации микронапряжений в стенках пенопласта. Для расчетов методом конечных элементов использовалось специализированное программное обеспечение, разработанное на кафедре вычислительной математики и математической физики МГТУ им. Н.Э. Баумана.*

**Ключевые слова:** *вязкоупругие характеристики, пенопласт, многомасштабное моделирование, метод асимптотического осреднения, комплексные модули упругости, тангенс угла потерь, метод конечных элементов, численное моделирование.*

**Введение.** Пенопласты широко используются в технике благодаря их высокоэффективным характеристикам: относительно высокой удельной жесткости при очень малой плотности, относительно низкой стоимости, а также широким возможностям по технологии применения. Пенопласты применяют в качестве заполнителей трехслойных композитных конструкций [1–3] в авиастроении, машиностроении, судостроении и других отраслях. С использованием пенопластов создают конструкции с высокими значениями удельной энергии рассеивания, высокими жесткостными характеристиками и низкой плотностью. Благодаря высоким удельным демпфирующим свойствам такие конструкции находят широкое применение в технике. Для проектирования трехслойных конструкций используют методы расчета не только упруго-прочностных характеристик пенопластов, но и их диссипативных свойств при циклических колебаниях [4–13]. Поскольку микроструктура пенопластов является существенно трехмерной, то точность классических инженерных методов для расчета упруго-диссипативных характеристик материалов, например смеси-

вого метода, оказывается недостаточно высокой. В этих случаях необходимо применять методы конечных элементов (МКЭ) микро-механического анализа, разработанные для гетерогенных материалов и композитов.

Цель настоящей работы — разработка методики расчета вязкоупругих характеристик пенопластов, основанной на конечно-элементном решении локальных задач [14] теории вязкоупругости при циклическом нагружении [5, 13], которые возникают при использовании метода асимптотического осреднения [14–16].

**Задача линейной вязкоупругости при циклических колебаниях.** Рассмотрим задачу механики линейно вязкоупругой среды [13] при гармонических колебаниях и относительно невысоких частотах, когда инерционными силами можно пренебречь:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = 0; \\ \boldsymbol{\sigma}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \xi) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*; \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u}^* + \nabla \otimes \mathbf{u}^{*\top}); \\ \boldsymbol{\sigma}^* \Big|_{\Sigma_1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}^*, \quad \mathbf{u}^* \Big|_{\Sigma_2} = \mathbf{u}^{e*}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\nabla$  — набла-оператор [17];  $\boldsymbol{\sigma}^*$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  — комплексные амплитуды тензоров напряжений и деформаций;  $\mathbf{u}^*$  — комплексная амплитуда вектора перемещений;  $\mathbf{S}^*$  — вектор амплитуд внешних усилий на части границы  $\Sigma_1$ ;  $\mathbf{u}^{e*}$  — вектор амплитуд заданных перемещений на части границы  $\Sigma_2$ ;  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали;  ${}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \xi)$  — тензор 4-го ранга — тензор комплексных модулей упругости, зависящий от приведенной частоты колебаний  $\tilde{\omega} = \omega a_\theta(\theta)$ ;  $a_\theta(\theta(\tau))$  — функция температурного сдвига;  $a_1, a_2$  — константы;  $\theta$  — температура;  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ ;  $\theta_0$  — начальное значение температуры,

$${}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) = {}^4\mathbf{C} - {}^4\mathbf{K}^*(\tilde{\omega}), \quad {}^4\mathbf{K}^*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} {}^4\mathbf{K}(\tau) e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau, \quad (2)$$

где  ${}^4\mathbf{C}$  — тензор модулей упругости;  ${}^4\mathbf{K}(\tau)$  — тензор ядер релаксации.

Для изотропных вязкоупругих материалов тензор модулей упругости имеет две независимые константы:  $K$  — модуль объемного сжатия и  $G$  — модуль сдвига, тензор ядер релаксации имеет две независимые функции:  $K_G(t)$ ,  $K_K(t)$  — ядра объемной и сдвиговой ре-

лаксации, причем для большинства твердых сред объемной релаксацией можно пренебречь [5, 13].

Тогда тензоры  ${}^4\mathbf{C}$  и  ${}^4\mathbf{K}(t)$  можно представить в следующем виде [13]:

$${}^4\mathbf{C} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2G\Delta; \quad {}^4\mathbf{K}(t) = 2K_G(t) \left( -\frac{1}{3} \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \Delta \right), \quad (3)$$

где  $\Delta$  — единичный тензор 4-го ранга;  $\mathbf{E}$  — метрический тензор.

После подстановки соотношений (2) в выражения (1) получаем

$${}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) = \left( K - \frac{2}{3}G^*(\tilde{\omega}) \right) \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2G^*(\tilde{\omega})\Delta. \quad (4)$$

Комплексный модуль сдвига:

$$G^*(\tilde{\omega}) = G - K_G^*(\tilde{\omega}); \quad K_G^*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} K_G(\tau) e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau, \quad (5)$$

Принимаем для функции релаксации  $K_G(t)$  модель экспоненциальных ядер [13]:

$$K_G(t) = \sum_{\gamma=1}^n A_\gamma e^{-t/\tau_\gamma}, \quad (6)$$

где  $A_\gamma$ ,  $\tau_\gamma$  — вязкоупругие константы материала — спектр релаксации и спектр времен релаксации соответственно.

Тогда для  $G^*$  — комплексного модуля сдвига в зависимости от приведенной частоты колебаний запишем следующее аналитическое выражение:

$$G^* = G' + iG'', \quad G' = G + \sum_{\gamma=1}^N \frac{A_\gamma}{1 + (\tilde{\omega}\tau_\gamma)^2}, \quad G'' = \sum_{\gamma=1}^n \frac{A_\gamma\omega\tau_\gamma}{1 + (\omega\tau_\gamma)^2}. \quad (7)$$

В рамках рассмотренной модели вязкоупругие характеристики изотропных материалов характеризуются следующим набором констант:  $G$ ,  $K$ ,  $A_\gamma$ ,  $\tau_\gamma$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\gamma = 1, \dots, N_m$ . Комплексный модуль упругости матрицы  $E^*$  и комплексный коэффициент Пуассона  $\nu^*$  вычисляются по формулам, формально совпадающим с формулами для упругих констант [4, 13]:

$$E^* = \frac{9KG^*}{3K + G^*}, \quad \nu^* = \frac{3K - 2G^*}{6K + 2G^*}. \quad (8)$$

**Метод асимптотического осреднения для вязкоупругих материалов с периодической структурой.** Пенопласты обладают ярко

выраженной микроструктурой, близкой к регулярной, с наличием большого числа повторяющихся ячеек — ячеек периодичности (ЯП). Для такой периодической структуры можно применить метод асимптотического осреднения [15, 18, 19]. Примем, что ЯП пенопласта состоит из двух компонентов: полимерного материала, из которого образованы стенки пенопласта, и пустоты (поры), которую будем моделировать также твердым веществом с фиктивными упругими характеристиками, существенно более низкими, чем соответствующие упругие характеристики полимера. Пусть на границах раздела  $\Sigma_S$  компонентов выполняются условия идеального контакта

$$[\boldsymbol{\sigma}^*] \cdot \mathbf{n} = 0; [\mathbf{u}^*] = 0, \quad (9)$$

где  $[\ ]$  — скачок функций. Тогда для композита в целом можно сформулировать задачу (6), но тензор комплексных модулей упругости  ${}^4\mathbf{C}^*$  будет зависеть еще и от координат, в качестве которых выберем локальные координаты  $\xi$  ЯП композита [14, 16, 18, 19], тогда  ${}^4\mathbf{C}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \xi)$ . Введем малый параметр  $k = l/L$ , где  $l$  — характерный размер ЯП,  $L$  — глобальный размер конструкции из ПКМ,  $\mathbf{x}$  — глобальные координаты, связанные с локальными координатами соотношением  $\xi = \mathbf{x}/k$ . Функции  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \xi)$  и  ${}^4\mathbf{C}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \xi)$  будем считать периодичными по  $\xi$ . Введем также обозначения для производных по  $\mathbf{x}$  и  $\xi$ :  $\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ;  $\nabla_{\xi} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ , где  $\mathbf{e}^i$  — векторы базиса. Имеет место следующее правило дифференцирования периодических функций:

$$\nabla = \nabla_{\mathbf{x}} + k^{-1} \nabla_{\xi}. \text{ Обозначим } \langle f(\mathbf{x}, \xi) \rangle = \frac{1}{V_{\xi} V_{\mathbf{x}}} \int_{V_{\xi}} \int_{V_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \xi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \text{ — оператор осреднения по ЯП.}$$

Тогда в соответствии с методом асимптотического осреднения представим перемещения  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \xi)$ , напряжения  $\boldsymbol{\sigma}^*$  и деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ , являющиеся решением задачи (3), в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра  $k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \xi) &= \mathbf{u}^{*(0)}(\mathbf{x}) + k\mathbf{u}^{*(1)}(\xi, \mathbf{x}) + k^2\mathbf{u}^{*(2)}(\xi, \mathbf{x}) + \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} + k\boldsymbol{\varepsilon}^{*(1)} + k^2 \dots, \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} + k\boldsymbol{\sigma}^{*(1)} + k^2 \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя разложения (10) в уравнения системы (1) и собирая в каждом уравнении члены при одинаковых степенях малого параметра  $k$ , получаем из условия равенства нулю членов при наименьших степенях параметра  $k$  следующую задачу вязкоупругости ЯП:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} &= 0; \\
 \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} &= {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}, \xi) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)}; \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* + \frac{1}{2}(\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{u}^{*(1)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{u}^{*(1)\top}); \\
 [\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}] \cdot \mathbf{n} &= 0, [\mathbf{u}^{*(1)}] = 0; \\
 [[\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}]] \cdot \mathbf{n} &= 0, [[\mathbf{u}^{*(1)}]] = 0; \\
 \langle \mathbf{u}^{*(1)} \rangle &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \frac{1}{2}(\nabla_x \otimes \mathbf{u}^{*(0)} + \nabla_x \otimes \mathbf{u}^{*(0)\top})$ ,  $[[\boldsymbol{\sigma}^{*(0)}]] \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $[[\mathbf{u}^{*(1)}]] = 0$  — условия периодичности функций на границах ЯП,  $\langle \mathbf{u}^{*(1)} \rangle = 0$  — условие нормировки.

Вследствие линейности задачи (11) ищем ее решение в компонентной форме в виде следующих сумм:

$$u_i^{*(1)} = \sum_{p,q=1}^3 u_{i(pq)}^*; \quad \varepsilon_{ij}^{*(0)} = \sum_{p,q=1}^3 \varepsilon_{ij(pq)}^*; \quad \sigma_{ij}^{*(0)} = \sum_{p,q=1}^3 \sigma_{ij(pq)}^*, \tag{12}$$

причем для функций  $u_{i(pq)}^{*(1)}$  для каждой комбинации индексов  $(p, q)$  выделяется линейная часть по локальным координатам:

$$u_{i(pq)}^* = -\bar{\varepsilon}_{pq}^* (\delta_{ip} \xi^q + \delta_{iq} \xi^p) + U_{i(pq)}^*(\xi^l), \tag{13}$$

где  $U_{i(pq)}^*(\xi^i)$  — искомые комплексно-значные функции, называемые псевдоперемещениями, для которых для каждой комбинации индексов  $(p, q)$  получаем следующую задачу  $L_{pq}$  на ячейке периодичности:

$$\begin{cases}
 \sigma_{ij(pq)/j}^* = 0, \text{ в } \tilde{V}_{\xi}; \\
 \sigma_{ij(pq)}^* = C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij(pq)}^*, \text{ в } \tilde{V}_{\xi} \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s; \\
 \varepsilon_{ij(pq)}^* = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j}^* + U_{j(pq)/i}^*), \text{ в } \tilde{V}_{\xi}; \\
 [U_{i(pq)}^*] = 0, [\sigma_{ij(pq)}^*] n_j = 0, \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi S},
 \end{cases} \tag{14}$$

где  $\tilde{\Sigma}_{\xi S}$  — поверхность раздела компонентов в 1/8 ЯП. Кроме того, к системе (14) присоединяются условия на координатных плоскостях  $\Sigma_s = \{\xi^s = 0\}$ , на торцевых поверхностях ЯП  $\Sigma'_s = \{\xi^s = 1/2\}$ ,  $s = 1, 2, 3$ , которые запишем следующим образом:

при  $(p = q)$   $U_{i(pq)}^* = 1/2\bar{\epsilon}_{pq}^*\delta_{ip}$ ,  $S_{j(pq)}^* = 0$ ,  $S_{k(pq)}^* = 0$ , на  $\Sigma'_i$   $i \neq j \neq k \neq i$ ,  
 $U_{i(pq)}^* = 0$ ,  $S_{j(pq)}^* = 0$ ,  $S_{k(pq)}^* = 0$ , на  $\Sigma_i$   $i \neq j \neq k \neq i$ ;  
 при  $(p \neq q)$   $U_{i(pq)}^* = (1/4)\bar{\epsilon}_{iq}^*\delta_{ip}$ ,  $S_{j(pq)}^* = 0$ ,  $U_{k(pq)}^* = 0$ , на  $\Sigma'_j$   $i, j = \{p, q\}$ ,  
 $S_{i(pq)}^* = 0$ ,  $S_{j(pq)}^* = 0$ ,  $U_{k(pq)}^* = 0$ , на  $\Sigma'_k$   $i \neq j \neq k \neq i$ , (15)  
 $U_{i(pq)}^* = 0$ ,  $S_{j(pq)}^* = 0$ ,  $U_{k(pq)}^* = 0$ , на  $\Sigma_j$   $i, j = \{p, q\}$ ,  
 $S_{i(pq)}^* = 0$ ,  $S_{j(pq)}^* = 0$ ,  $U_{k(pq)}^* = 0$ , на  $\Sigma_k$   $i \neq j \neq k \neq i$ ,

где  $S_{j(pq)}^* = \sigma_{ij(pq)}^* n_j$  — компоненты вектора напряжений;  $n_j$  — компоненты вектора нормали.

Вычисляя средние значения напряжений по ЯП  $\bar{\sigma}_{ij(pq)}^* = \langle \sigma_{ij(pq)}^* \rangle$ , можно найти компоненты эффективного тензора комплексных модулей упругости пенопласта:

$$\bar{C}_{ijpq}^* = \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)}^*}{\bar{\epsilon}_{pq}^*}, \quad (16)$$

который вследствие решения (12) связывает средние по ЯП напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}^{*(0)}$  и деформации  $\bar{\epsilon}_{pq}^*$ :

$$\bar{\sigma}_{ij}^* = \bar{C}_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl}^*. \quad (17)$$

Тензор амплитуд концентрации напряжений в пенопласте вычисляем по формулам

$$B_{ijkl}^* = \sum_{p,q} \frac{\sigma_{ij(pq)}^*}{\epsilon_{pq}^*} \bar{\Pi}_{pqkl}^*, \quad (18)$$

где  $\bar{\Pi}_{pqkl}^*$  — компоненты тензора эффективных комплексных податливостей, обратного  $\bar{C}_{ijkl}^*$ :  $\bar{\Pi}_{pqkl}^* = (\bar{C}_{ijkl}^*)^{-1}$ .

Для решения локальных задачи вязкоупругости  $L_{pq}$  (14), (15) применяли МКЭ, алгоритм которого подробно изложен в работе [14]. Для решения комплекснозначных систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в методе МКЭ, использовали метод сопряженных градиентов.

**Алгоритм расчета констант вязкоупругих характеристик пенопласта.** Рассмотрим эффективные определяющие соотношения вязкоупругости (13) и (15). Считаем, что эффективный тензор комплексных модулей упругости композита  ${}^4\bar{C}^*(\tilde{\omega})$  вычислен по этим

формулам для всех значений частоты  $\tilde{\omega}$  в рассматриваемом диапазоне  $\tilde{\omega}_{\min} < \tilde{\omega} < \tilde{\omega}_{\max}$ . Предложим алгоритм для восстановления по тензор-функции эффективного тензора ядер релаксации композита  ${}^4\bar{\mathbf{K}}(\tau)$ , который связан с ним соотношением вида (2):

$${}^4\bar{\mathbf{C}}^*(\tilde{\omega}) = {}^4\bar{\mathbf{C}} - {}^4\bar{\mathbf{K}}^*(\tilde{\omega}), \quad {}^4\bar{\mathbf{K}}^*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} {}^4\bar{\mathbf{K}}(\tau)e^{-i\tilde{\omega}\tau}d\tau. \quad (19)$$

Сделаем основное предположение, что тензор ядер релаксации композита  ${}^4\bar{\mathbf{K}}(\tau)$  также имеет экспоненциальный вид, как и исходные компоненты композита. Это предположение достаточно обосновано и может быть математически строго показано. Физически это предположение обосновано тем, что вязкоупругие процессы в композите как системные различных компонентов определяются вязкоупругими свойствами отдельных его компонентов. Для того чтобы записать тензор-функции композита  ${}^4\bar{\mathbf{K}}(\tau)$  в виде суммы экспонент, надо учесть тип анизотропии композита, который получается в результате решения локальных задач вязкоупругости и расчета по формулам (13) и (15).

Если композит является изотропным материалом с нерелаксирующим объемом, то тензор  ${}^4\bar{\mathbf{K}}(\tau)$  имеет вид (5):

$${}^4\bar{\mathbf{K}}(t) = 2\bar{K}_G(t)\left(-\frac{1}{3}\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \Delta\right). \quad (20)$$

Эффективное ядро релаксации аппроксимируем суммой экспонент

$$\bar{K}_G(t) = \sum_{\gamma=1}^N \bar{A}_\gamma e^{-t/\tau_\gamma}. \quad (21)$$

Тогда этой функции будет соответствовать комплексный модуль сдвига композита:

$$\bar{G}^* = \bar{G}' + i\bar{G}'' , \quad \bar{G}' = \bar{G} + \sum_{\gamma=1}^N \frac{\bar{A}_\gamma}{1 + (\tilde{\omega}\tau_\gamma)^2} , \quad \bar{G}'' = \sum_{\gamma=1}^n \frac{\bar{A}_\gamma \tilde{\omega}\tau_\gamma}{1 + (\tilde{\omega}\tau_\gamma)^2}. \quad (22)$$

Выберем далее в качестве спектра времен релаксации  $\tau_\gamma$  совокупность всех различных времен релаксации всех компонентов композита:  $\tau_\gamma, \gamma = 1, \dots, M, M = n_1 + \dots + n_N$ . Спектр релаксации композита  $\bar{A}_\gamma$  вычисляем из условия наилучшей аппроксимации комплексного модуля сдвига  $\bar{C}_{1212}^*(\tilde{\omega})$ , определенного численным способом по формулам (22) и (13):

$$\bar{C}_{1212}^*(\tilde{\omega}) = \bar{C}_{1212} + \sum_{\gamma=1}^N \frac{\bar{A}_{\gamma}}{1 + (\tilde{\omega}\tau_{\gamma})^2}. \quad (23)$$

Выбирая  $N$  значений частот  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N$  и записывая уравнение (23) для этих частот, получаем систему  $N$  уравнений для нахождения констант  $\bar{A}_{\gamma}$ :

$$\sum_{\gamma=1}^N H_{k\gamma} \bar{A}_{\gamma} = F_k,$$

где  $H_{k\gamma} = \frac{1}{1 + (\tilde{\omega}_k \tau_{\gamma})^2}$ ,  $F_k = \bar{C}_{1212}^*(\omega_k) - \bar{C}_{1212}$  — коэффициенты.

**Результаты численного моделирования полей амплитуд микронапряжений в пенопласте.** В соответствии с разработанной методикой проведено численное решение трехмерных локальных задач вязкоупругости для пенопласта. Для МКЭ расчетов применяли специализированное программное обеспечение, разработанное в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

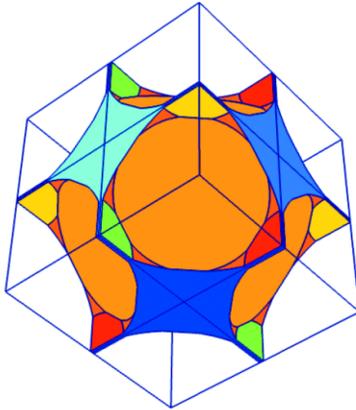
При численных расчетах использовали следующие значения характеристик полимерной матрицы эпоксифенольного типа:

$$G_m = 0,345 \text{ ГПа}, \nu_m = 0,45, n_m = 1, A_1 = 1 \text{ ГПа}, \tau_1 = 0,01 \text{ с},$$

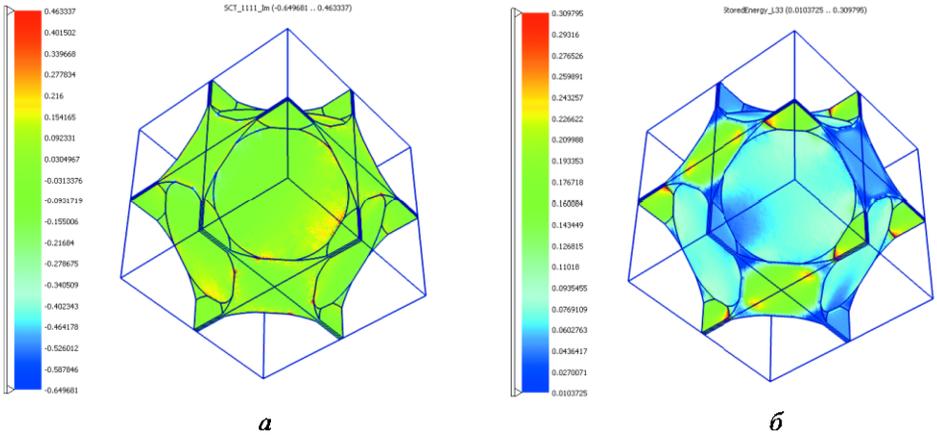
$$a_1 = 20 \text{ К}, a_2 = 300 \text{ К}.$$

Пористость пенопласта 0,9. На рис. 1 представлена геометрическая модель ЯП пенопласта для решения локальных задач вязкоупругости. Сетка содержала 214 523 тетраэдральных четырехузловых конечных элемента (КЭ).

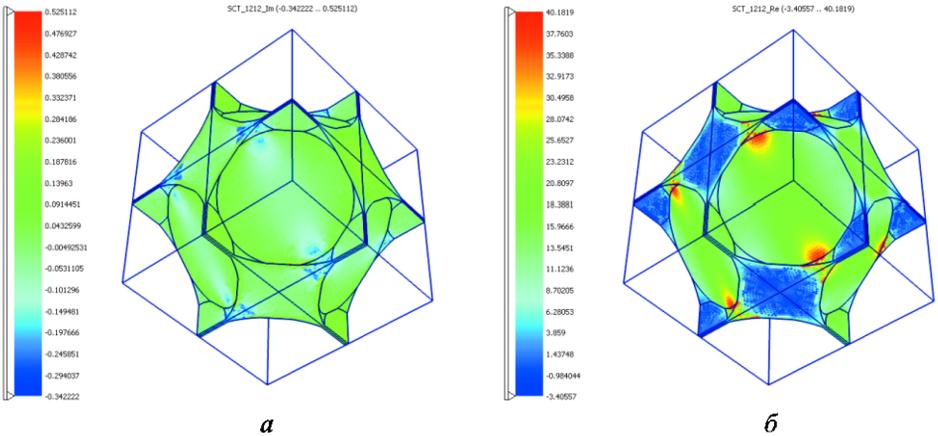
На рис. 2–4 приведены распределения действительных и мнимых компонент  $\text{Re } B_{ijkl}(\tilde{\omega}, \xi_k)$ ,  $\text{Im } B_{ijkl}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  тензора концентрации напряжений  ${}^4\mathbf{B}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  в ЯП пенопласта при частоте колебаний 2 Гц. Расчеты показывают, что действительные компоненты тензора концентрации напряжений незначительно изменяются с изменением частоты в отличие от мнимых компонент  $\text{Im } B_{ijkl}(\tilde{\omega}, \xi_k)$ , у которых значения могут изменяться достаточно существенно с увеличением частоты  $\tilde{\omega}$  колебаний. Так, максимум компонент  $\text{Im } B_{1212}(\tilde{\omega}, \xi_k)$ ,  $\text{Im } B_{2211}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  имеет наибольшие значения при максимальной рассматриваемой частоте колебаний, а компонента  $\text{Im } B_{1313}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  имеет максимум при частоте около 15 Гц.



**Рис. 1.** Модель ЯП пенопласта для расчетов характеристик вязкоупругости



**Рис. 2.** Распределение компонент  $Im B_{1111}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  (а) и  $Re B_{1111}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  (б) тензора концентрации напряжений в ЯП пенопласта при частоте 2 Гц



**Рис. 3.** Распределение компонент  $Im B_{1212}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  (а) и  $Re B_{1212}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  (б) тензора концентрации напряжений в ЯП пенопласта при частоте 2 Гц

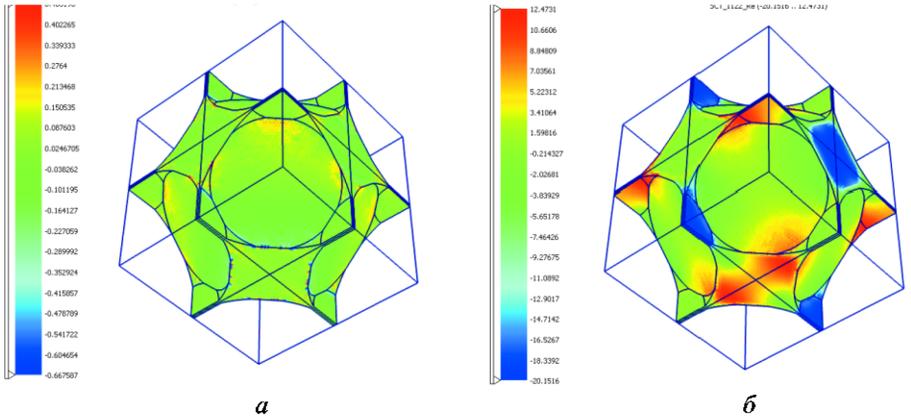


Рис. 4. Распределение компонент  $\text{Im } B_{1122}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  (а) и  $\text{Re } B_{1122}(\tilde{\omega}, \xi_k)$  (б) тензора концентрации напряжений в ЯП пенопласта при частоте 2 Гц

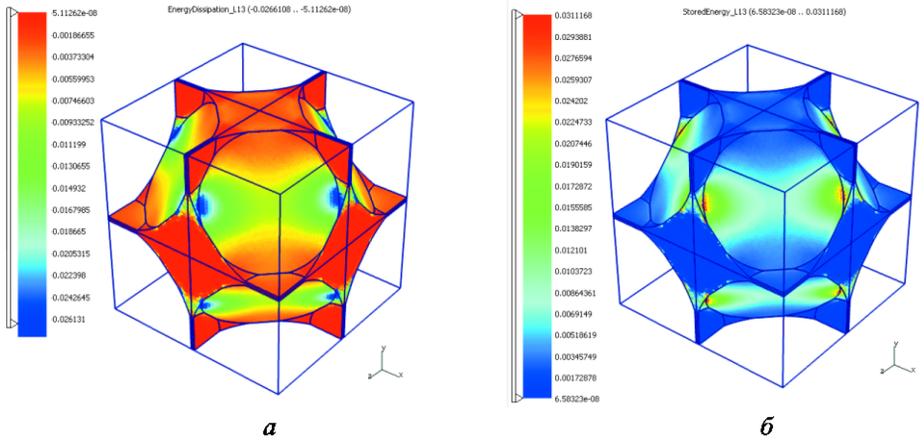


Рис. 5. Функция диссипации энергии  $w_{(pq)}^*$  (а) и удельная накопленная энергия  $\psi_{(pq)}$  (б) пенопласта при сдвиговых колебаниях (задача  $L_{13}$ ) при частоте 30 Гц

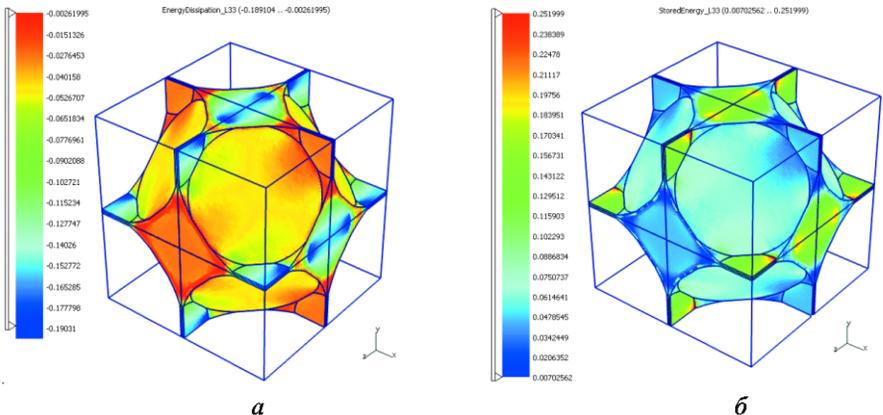


Рис. 6. Функция диссипации энергии  $w_{(pq)}^*$  (а) и удельная накопленная энергия  $\psi_{(pq)}$  (б) пенопласта при продольных колебаниях растяжения (задача  $L_{33}$ ) при частоте 30 Гц

На рис. 5, 6 приведены распределения функций диссипации (рассеяния) энергии  $w_{(pq)}^*$  и удельной накопленной энергии  $\Psi_{(pq)}$  пенопласта сред при моногармонических колебаниях, осредненных за один цикл колебаний, вычисленные для локальной задачи  $L_{pq}$ :

$$w_{(pq)}^* = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\Pi_{ijkl}^*) (\text{Re}(\sigma_{ij(pq)}^*) \text{Re}(\sigma_{kl(pq)}^*) + \text{Im}(\sigma_{ij(pq)}^*) \text{Im}(\sigma_{kl(pq)}^*)); \quad (24)$$

$$\Psi_{(pq)} = \frac{\omega}{2} \text{Re}(\Pi_{ijkl}^*) \text{Re}(\sigma_{ij(pq)}^*) \text{Re}(\sigma_{kl(pq)}^*),$$

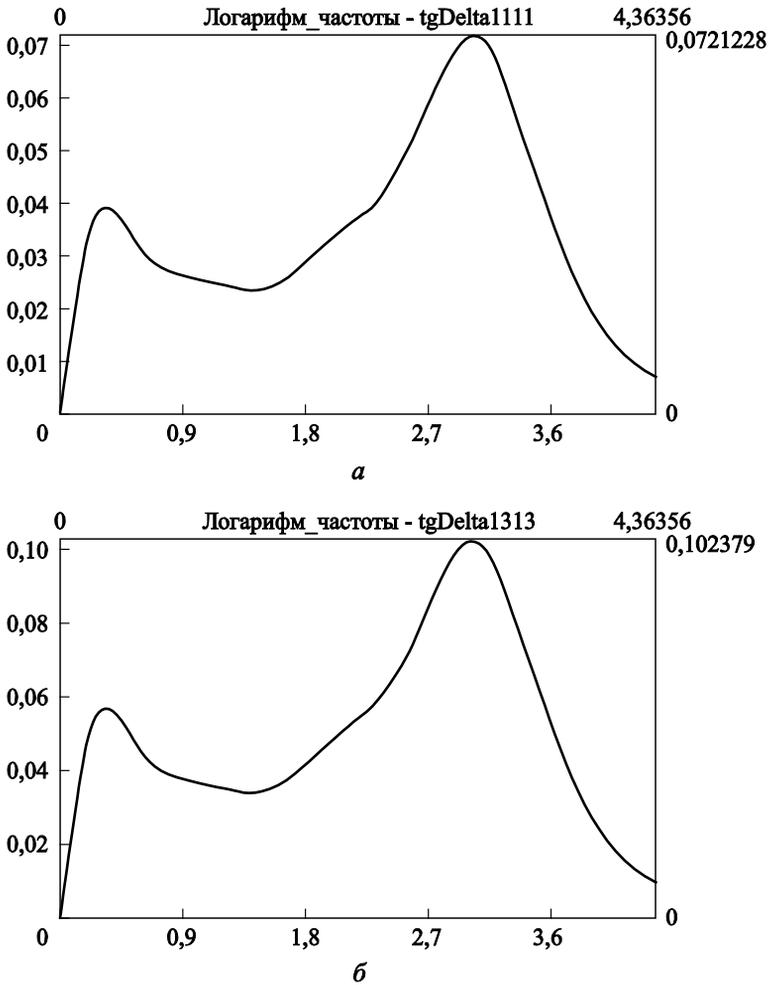
где  $\Pi_{ijkl}^*$  — тензор упругих податливостей компонентов, обратный  $C_{ijkl}^*$ ,  $\Pi_{pqkl}^* = (C_{ijkl}^*)^{-1}$ .

Максимальные значения накопленной энергии  $\Psi_{(pq)}$  и функции рассеивания  $w_{(pq)}^*$  достигаются на перемычках пенопластовых зерен, в зонах стыка соседних зерен, где реализуются максимальные значения напряжений  $\text{Re}(\sigma_{ij(pq)}^*)$ .

Рассчитаны также действительные и мнимые части компонент эффективного тензора комплексных модулей упругости:  $\bar{C}_{ijkl}^* = \text{Re}(\bar{C}_{ijkl}^*) + i \text{Im}(\bar{C}_{ijkl}^*)$ , а также вычислен тангенс угла потерь для каждой отдельной компоненты эффективного тензора комплексных модулей упругости:

$$\text{tg} \delta_{C_{ijkl}}(\omega) = \frac{\text{Im}(\bar{C}_{ijkl}^*(\omega))}{\text{Re}(\bar{C}_{ijkl}^*(\omega))}. \quad (25)$$

На рис. 7 приведены сравнительные зависимости тангенса угла потерь комплексных модулей упругости  $\text{tg} \delta_{C_{1313}}$  и  $\text{tg} \delta_{C_{1111}}$  пенопласта от частоты колебаний, полученные МКЭ по описанной выше методике. Расчеты проводили для частоты колебаний в диапазоне  $1 \dots 10^3$  Гц. Частотные зависимости тангенса угла потерь комплексных модулей упругости пенопласта типа Rohacell в этом диапазоне характеризуются наличием двух локальных максимумов при 2,7 и 965 Гц. Наибольшие значения тангенса угла потерь соответствуют частоте 965 Гц. Сдвиговые диссипативные свойства, характеризуемые  $\text{tg} \delta_{C_{1313}}$ , выше диссипативных свойств пенопласта при растяжении.



**Рис. 7.** Зависимости тангенсов угла потерь комплексного модуля упругости  $\text{tg}\delta_{C_{1111}}$  (а) и  $\text{tg}\delta_{C_{1313}}$  (б) пенопласта Rohacell от логарифма частоты колебаний (Гц)

**Заключение.** Разработанная методика расчета эффективных вязкоупругих характеристик композиционных материалов при установившихся циклических колебаниях, основанная на применении теории асимптотического осреднения периодических структур и МКЭ для решения локальных задач вязкоупругости на ЯП, позволяет вычислять полный набор тензора комплексных модулей упругости пенопластов в заданном диапазоне частот.

Установлено, что частотные зависимости тангенса угла потерь комплексных модулей упругости пенопласта типа Rohacell характеризуются наличием двух локальных максимумов при частоте колебаний 2,7 и 965 Гц. Наибольшие значения тангенса угла потерь соответствуют частоте 965 Гц. Сдвиговые диссипативные свойства выше диссипативных свойств пенопласта при растяжении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. *Расчет трехслойных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1984, 300 с.
- [2] Zhu H.X., Knott J. F., Mills N.J. Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells. *J. Mech. Phys. Solids*, 1997, vol. 45, pp. 319–343.
- [3] Szytniszewski S.T., Smith B.H., Hajjar J.F., Schafer B.W., Arwade S.R. The mechanical properties and modeling of a sintered hollow sphere steel foam. *Materials and Design*, 2014, vol. 54, pp. 1083–1094.
- [4] Ильющин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Москва, Наука, 1970, 356 с.
- [5] Победря Б.Е., Димитриенко Ю.И. Связанные задачи линейной термомеханики деформируемых твердых тел. *Успехи механики*, 1987, вып. 10, № 2, с. 97–137.
- [6] Hashin Z. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 32E, 1965, pp. 630–636.
- [7] Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity*. 2nd ed. New York, Academic Press, 1982, 356 p.
- [8] Imaoka S. Analyzing Viscoelastic materials. *ANSYS Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46–47.
- [9] Haasemann G., Ulbricht V. Numerical Evaluation of the Viscoelastic and Viscoplastic Behavior of Composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1–3, pp. 122–135.
- [10] Димитриенко Ю.И., Лимонов В.А. Влияние ориентации волокон на диссипативный разогрев и деформативность вязкоупругих композитов при циклическом нагружении. *Механика композит. материалов*, 1988, № 5, с. 797–805.
- [11] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Моделирование упруго-диссипативных характеристик слоисто-волоконистых композитов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 4 (28). URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html>
- [12] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2, с. 28–49.
- [13] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
- [14] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.
- [15] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984.
- [16] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sbornichikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. URL: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641>  
URL: <http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf>
- [17] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

- [18] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984.
- [19] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984.

Статья поступила в редакцию 05.10.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д., Сборщиков С.В. Моделирование вязкоупругих характеристик пенопластов на основе многомасштабного конечно-элементного анализа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 11. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-11-1555>

**Димитриенко Юрий Иванович** — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 300 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: [dimit.bmstu@gmail.com](mailto:dimit.bmstu@gmail.com)

**Димитриенко Ирина Донатовна** — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области механики гетерогенных сред, динамики многофазных сред. e-mail: [irina.dimit@gmail.com](mailto:irina.dimit@gmail.com)

**Сборщиков Сергей Васильевич** — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области численного моделирования в механике композитов. e-mail: [servasbor@gmail.com](mailto:servasbor@gmail.com)

## Modeling of viscoelastic foams characteristics based on the multiscale finite-element analysis

© Yu.I. Dimitrienko, I.D. Dimitrienko, S.V. Sborschikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The purpose of the research was to develop a method for calculating viscoelastic foams characteristics at steady cyclical fluctuations. The method is based on the theory of asymptotic averaging of periodic structures. We stated local viscoelasticity problems on the periodicity cell. The method developed allows us to calculate a complete set of components of the tensor of complex foams moduli of elasticity in a given frequency range. An example of a numerical simulation of viscoelastic foams characteristics shows that viscoelastic foams properties characterized by loss-angle tangent of the complex moduli of elasticity can be multiextremal by nature, with the presence of several critical frequencies. Furthermore, we give an example of a three-dimensional finite-element calculation of fields of the microstrain concentration tensors in the walls of the foam. For FEM calculations we used specialized software developed at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics of Bauman Moscow State Technical University.*

**Keywords:** viscoelastic characteristics, foam, multiscale modeling, method of asymptotic averaging, complex moduli of elasticity, loss-angle tangent, finite-element method, numerical simulation.

### REFERENCES

- [1] Kobelev V.N., Kovarskiy L.M., Timofeev S.I. *Raschet trekhsloynnykh konstruksiy* [Calculation of three-layer structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 300 p.
- [2] Zhu H.X., Knott J.F., Mills N.J. Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells. *J. Mech. Phys. Solids*, 1997, vol. 45, pp. 319–343.
- [3] Szyniszewski S.T., Smith B.H., Hajjar J.F., Schafer B.W., Arwade S.R. The mechanical properties and modeling of a sintered hollow sphere steel foam. *Materials and Design*, 2014, vol. 54, pp. 1083–1094.
- [4] Ilyushin A.A., Pobedriya B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviazkoupругosti* [Fundamentals of mathematical thermoviscoelasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 356 p.
- [5] Pobedriya B.E., Dimitrienko Yu.I. *Uspekhi mekhaniki — Achievements in mechanics*, 1987, iss. 10, no. 2, pp. 97–137.
- [6] Hashin Z. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *J. Appl. Mech. Trans. ASME.32E*. 1965, pp. 630–636.
- [7] Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity*, 2nd ed. New York, Academic Press, 1982, 356 p.
- [8] Imaoka Sh. Analyzing Viscoelastic materials. *ANSYS Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46–47.
- [9] Haasemann G, Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1–3, pp. 122–135.
- [10] Dimitrienko Yu.I., Limonov V.A. *Mekhanika kompozitnykh materialov — Mechanics of Composite Materials*, 1988, no. 5, pp. 797–805.

- [11] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, iss. 4 (28). Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html>
- [12] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 28–49.
- [13] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
- [14] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennyye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.
- [15] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov MSU Publ., 1984.
- [16] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. Available at: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641>  
URL: <http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf>
- [17] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 tomakh. Tom 1. Tenzorny analiz* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [18] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.
- [19] Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Heterogeneous media and vibration theory]. Moscow, Mir Publ., 1984, 472 p.

**Dimitrienko Yu.I.**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, Director of Research and Education Center of Supercomputer engineering modeling and development of software systems, BMSTU, member of the Academy of Engineering Sciences. Author of over 300 scientific papers in the field of continuum mechanics, computational mechanics, gas dynamics, mechanics and thermal mechanics of composites, mathematical modeling in materials science. e-mail: [dimit.bmstu@gmail.com](mailto:dimit.bmstu@gmail.com)

**Dimitrienko I.D.**, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Research Scientist at the Research and Education Center “Supercomputer engineering modeling and development of software systems”, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 scientific papers in the field of mechanics of heterogeneous media, dynamics of multiphase media. e-mail: [irina.dimit@gmail.com](mailto:irina.dimit@gmail.com)

**Sborschikov S.V.**, graduate student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 scientific works in the field of numerical simulation in mechanics of composites. e-mail: [servasbor@gmail.com](mailto:servasbor@gmail.com)