

Моделирование деформирования упругого основания в составной цилиндрической оболочке

© В.М. Дубровин, Т.А. Бутина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод расчета упругих характеристик (коэффициентов податливости) сплошного упругого основания, являющегося связующим звеном между внутренней и внешней цилиндрическими оболочками, которые образуют составную оболочку. При расчете учитываются геометрия обеих оболочек и физико-механические свойства материала упругого основания, представляя плоскую задачу теории упругости в виде системы с конечным числом степеней свободы в поперечном направлении при сохранении бесконечного числа степеней свободы в продольном направлении. Разработанная обобщенная модель упругого основания дает возможность построить ряд более простых расчетных схем упругого основания, таких как однослойная модель с одной характеристикой, с двумя характеристиками; модель, в которой учитывается затухание напряжений по высоте упругого основания; многослойная модель с различными упругими характеристиками по высоте упругого основания.

Ключевые слова: составная оболочка, внутренняя оболочка, внешняя оболочка, сплошное упругое основание, обобщенная модель, однослойная модель, метод перемещений, условие равновесия, коэффициент податливости.

Введение. Составная цилиндрическая оболочка — конструкция, состоящая из внешней и внутренней оболочек, между которыми располагается упругий слой (сплошное упругое основание). Конструктивная схема составной оболочки представлена на рис. 1. Внешняя оболочка подвергается воздействию поперечных нагрузок, упругое основание передает его воздействие на внутреннюю оболочку. Уровень и динамика этого воздействия определяются как параметрами воздействия, так и характеристиками упругого основания.

Как показано в работах [1–4], для определения поперечных нагрузок на внутреннюю оболочку со схемой крепления, работающей по принципу сплошного упругого основания, необходимо знать коэффициент упругой податливости этого основания, определяемый геометрией внешней и внутренней оболочек, а также физико-механическими свойствами материала упругого основания.

Математическая модель работы упругого основания при воздействии поперечных нагрузок на составную оболочку. При решении задачи предполагается, что упругим основанием является упругий наполнитель толщиной H , расположенный между двумя жесткими слоями. Правомерность такого предположения основана на

том, что в данном случае определяется деформативность самого упругого заполнителя. Предполагается, что материал заполнителя удовлетворяет основным соотношениям теории упругости, а упругие характеристики заполнителя при динамическом нагружении соответствуют характеристикам при статическом нагружении [5–7].

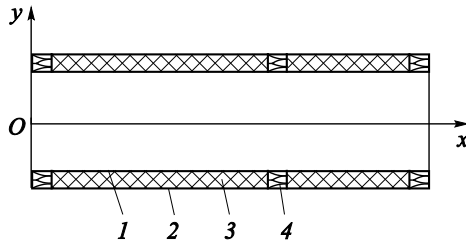


Рис. 1. Конструктивная схема составной оболочки с упругим основанием:
1, 2 — внутренняя и внешняя оболочки; 3 — упругое основание; 4 — дискретная упругая опора

Выделим по образующей оболочки элементарную полоску шириной δ , предполагая, что вследствие малости δ кривизной полоски можно пренебречь. Поперечными сечениями выделим участок единичной длины $dx = 1$. Рассмотрим равновесие выделенного элемента (рис. 2). Задача определения деформации выделенного элемента сводится к плоской задаче теории упругости, так как любой из участков выделенной длины находится в одинаковых условиях и работает аналогично соседним участкам.

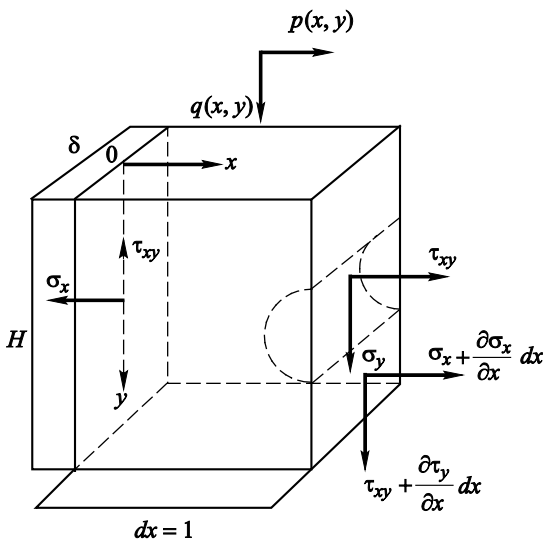


Рис. 2. Схема сил и моментов, действующих на элемент упругого основания

Задача о плоском напряженном состоянии представляет собой двумерную задачу теории упругости. Для ее решения можно воспользоваться как методом перемещений, так и методом напряжений [2–11]. В первом случае в качестве основных неизвестных принимаются перемещения произвольной точки выделенного элемента $u(x, y)$, $\vartheta(x, y)$ по координатам x, y . Они определяются из условий равновесия упругой системы. Этот метод в строительной механике называется методом деформаций. Во втором случае за основные неизвестные принимаются напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в произвольной точке выделенного элемента, которые определяются из условий неразрывности деформаций рассматриваемой системы. Этот метод аналогичен методу сил, применяемому в строительной механике статически неопределимых стержневых систем.

Решение задачи будем искать методом перемещений. Примем для рассматриваемого элемента продольное перемещение точки $u(x, y)$ и поперечное — $\vartheta(x, y)$. Перемещения считаются положительными, если их направления совпадают с положительными направлениями координатных осей.

В общем случае плоской задачи теории упругости напряжения связаны с деформациями следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma,\end{aligned}\tag{1}$$

где σ_x, σ_y — нормальные напряжения по осям x, y ; τ_{xy}, τ_{yx} — касательные напряжения; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала упругого заполнителя; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — линейные деформации по осям x, y ; γ — деформация сдвига.

Деформации упругого заполнителя определяют через перемещения:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) выделенного элемента представим искомые перемещения в виде конечных разложений:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m U_i(x, y)\varphi_i(y), \quad i = 1, 2, \dots, m;\tag{2}$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^n V_k(x, y) \psi_i(y), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В формулах (2) функции $U_i(x)$ и $V_k(x)$ будем считать неизвестными, функции $\varphi_i(y)$, $\psi_i(y)$ определяются из физических соображений. Причем размерность функций $U_i(x)$ и $V_k(x)$ принимаем равной размерности исходных функций $u(x)$ и $v(x)$, в то время как функции $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(y)$ являются безразмерными. По физическому смыслу функции $U_i(x)$ и $V_k(x)$ — обобщенные перемещения, так как каждая из m функций $U_i(x)$ для каждого сечения $x = \text{const}$ упругого тела обобщенно характеризует продольное перемещение $u(x, y)$. Аналогично и для функций $V_k(x)$. Распределение продольных и поперечных перемещений по сечениям $x = \text{const}$ характеризуется функциями $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(y)$, т. е. эти функции можно назвать функциями поперечного распределения перемещений.

Функции $\varphi_i(y)$, $\psi_i(y)$, аппроксимирующие деформированное состояние упругого основания, могут быть выбраны из условия их линейной независимости и соответствия физическому содержанию задач. Представление исходных перемещений в виде разложений (2) при конечных числах m и n означает сведение упругого элемента к системе с конечным числом степеней свободы в поперечном направлении при сохранении бесконечного числа степеней свободы в продольном направлении. Такие системы носят название дискретно-континуальных в отличие от расчетных моделей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, т. е. представляемыми как двумерные деформируемые тела, имеющие бесконечное число степеней свободы по обоим переменным. Использование разложения (2) позволяет свести исходную двумерную задачу к одномерной задаче отыскания функций $U_i(x)$ и $V_k(x)$.

Определение обобщенных перемещений. Для определения $U_i(x)$ и $V_k(x)$ используем условия равновесия выделенного элемента. Под условием равновесия понимаем равенство нулю суммарной работы всех внутренних и внешних сил на виртуальных перемещениях. По отношению к выделенному элементу роль внешних сил играют напряжения σ_x , $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, τ_{xy} , $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$, возникающие от взаимодействия элемента с отброшенными частями, а также заданная нагрузка, компоненты которой в направлении осей x и y соответственно равны $p(x, y)$ и $q(x, y)$.

В общем случае уравнение равновесия примет вид [12–14]

$$\int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} U dF - \int \tau_{xy} \gamma dF + \int p u dy = 0; \quad (3)$$

$$\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v dF - \int \sigma_y \xi_2 dF + \int q v dy = 0,$$

где $dF = \delta_1 dy$ — дифференциал площади поперечного сечения выделенного элемента.

Напряжения в соответствии с формулами (1) при представлении перемещений (2) можно записать следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\sum_{i=1}^m U_i \varphi_i + \mu \sum_{k=1}^n V_k \psi'_k \right];$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\sum_{k=1}^n V_k \psi'_k + \mu \sum_{i=1}^m U'_i \varphi_i \right]; \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\sum_{i=1}^m U_i \varphi'_i + \sum_{k=1}^n V'_k \psi'_k \right].$$

Учитывая соотношения (4), из уравнения равновесия можно получить $m + n$ обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $U_i(x)$ и $V_k(x)$ вида

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} U_i'' - \frac{1-\mu}{2} \sum_{i=1}^m b_{ij} U_i + \sum_{k=1}^n \left(\mu t_{ik} - \frac{1-\mu}{2} C_{ik} \right) V'_k + \frac{1-\mu^2}{E} p_j = 0;$$

$$-\sum_{i=1}^m \left(\mu t_{hi} - \frac{1-\mu}{2} C_{hi} \right) U'_i + \frac{1-\mu}{2} \sum_{k=1}^n r_{hk} V''_k - \sum_{k=1}^n s_{hk} V + \frac{1-\mu}{E} q_h = 0. \quad (5)$$

В уравнениях (5) введены следующие коэффициенты:

$$a_{ij} = a_{ji} = \int \varphi_i \varphi_j dF, \quad b_{ij} = b_{ji} = \int \varphi'_i \varphi'_j dF, \quad C_{ik} = \int \varphi'_i \psi_k dF;$$

$$C_{hi} = \int \psi'_k \varphi_i dF, \quad t_{ik} = \int \varphi_i \psi'_k dF, \quad t_{hk} = \int \psi'_k \varphi_k dF;$$

$$r_{hk} = r_{kh} = \int \psi_h \psi_k dF, \quad s_{hk} = s_{kh} = \int \psi'_h \psi'_k dF.$$

Физический смысл этих коэффициентов может быть интерпретирован как своего рода обобщенные моменты инерции. Свободные члены p_j , q_n в уравнениях (5) при заданных компонентах нагрузок

$p(x, y)$, $q(x, y)$ определяются как обобщенные продольные и поперечные погонные (отнесенные к единице длины) силы:

$$p_j = \int p(x, y)\varphi_j dy; \quad q_n = \int q(x, y)\psi_n dy.$$

Величины p_j и q_n представляет собой работу заданных продольных и поперечных нагрузок соответственно перемещениям φ_i и ψ_n . При рассмотрении работы упругого основания массовые силы, распределенные по высоте основания, можно не учитывать, предполагая, что упругое основание работает только под нагрузкой, приложенной к ее поверхности. В этом случае свободные члены уравнений (5) имеют вид

$$p_j = p(x)\varphi_j(0); \quad q_n = q(x)\psi_n(0),$$

где $p(x)$, $q(x)$ — сдвигающие и нормальные поверхностные силы; $\varphi_j(0)$, $\psi_n(0)$ — значение функций $\varphi_j(y)$ и $\psi_n(y)$ на поверхности упругого основания при $y = 0$.

Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) позволяет определить НДС упругого основания, принимаемого за линейно-деформированную среду конечной толщины H , в условиях плоской деформации. При ограниченном числе членов в разложении (2) решение системы уравнений (5) можно рассматривать как известное приближение к точному решению теории упругости. Вместе с тем можно считать, что дифференциальные уравнения (5) характеризуют некоторую обобщенную модель упругого основания, построенную на базе общего вариационного метода. Действительно, выбирая для ограниченного числа функций φ_i и ψ_k различные выражения, будем получать ряд моделей упругого основания, приближенных с точки зрения теории упругости, но достаточно точных с точки зрения практических задач. Увеличивая число членов в разложении (2), можно повысить точность решения. Однако такое увеличение обуславливает повышение порядка системы уравнений (5), т. е. ведет к усложнению решения. Более рационально можно повысить точность решения путем выбора функций распределения поперечных перемещений φ_i и ψ_k в соответствии с конкретными представлениями о возможном характере распределения перемещений по высоте упругого основания.

В рассматриваемом случае задача может быть значительно упрощена в связи с тем, что основную роль в работе упругого оснований играют поперечные перемещения (по оси y). Поэтому продольными перемещениями (по оси x) по сравнению с поперечными можно пренебречь. Кроме того, из условия задачи очевидно, что

можно пренебречь продольными усилиями в упругом основании по сравнению с поперечными усилиями.

Тогда приближенно можно принять

$$u(x, y) = 0; \quad v(x, y) = \sum_{k=1}^n V_k(x) \psi_k(y); \quad p(x, y) = 0.$$

С учетом последних соотношений деформации упругого основания можно записать в виде

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = \sum_{k=1}^n V_k(x) \psi'_k(y); \quad \gamma = \sum_{k=1}^n V'_k(x) \psi_k(y). \quad (6)$$

Тогда уравнение равновесия (3) примет следующий вид:

$$\frac{1-\mu}{2} \sum_{k=1}^n r_{hk} V''_k(x) - \sum_{k=1}^n s_{hk} V_k(x) + \frac{1-\mu^2}{E} q_n = 0, \quad h = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

где $r_{hk} = \int \psi_n \psi_k dF$; $s_{hk} = \int \psi'_n \psi'_k dF$.

Уравнение (7) описывает определенную модель упругого основания, в основу которой положена гипотеза о том, что продольные перемещение в упругом основании отсутствуют. Такая модель способна распределять нагрузку, т. е. способна вследствие связности работать и за пределами приложения нагрузки. Схематически она может быть представлена как система упругих элементарных столбиков (пружин), между которыми существуют внутренние связи, вовлекающие в работу соседние пружины. Схема работы такого упругого основания представлена на рис. 3. Свойства модели (7) зависят от характера функции $\psi_k(y)$ и числа членов, принятых в разложении (2). Это означает, что модель (7), полученная как частный случай обобщенной модели (5), в свою очередь позволяет путем введения дополнительных гипотез построить ряд более простых расчетных схем упругого основания.

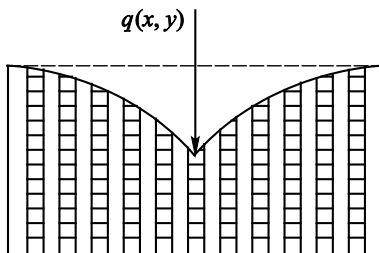


Рис. 3. Схема работы упругого основания

Однослойная и многослойные модели упругого оснований. В том случае, когда упругий наполнитель представляет собой деформируемый слой небольшой мощности ($H \ll R$), а поперечные перемещения по подошве этого слоя отсутствуют, можно принять

$$v(x, y) = V_1(x)\psi_1(y); \quad \psi_1(y) = \frac{H - y}{H}. \quad (8)$$

Таким образом, предполагается, что вертикальные перемещения по высоте упругого основания распределяются линейно, а функция представляет собой осадку поверхности наполнителя.

В рассматриваемом случае вместо системы уравнений (7) будем иметь одно уравнение равновесия:

$$\frac{1 - \mu}{2} r_{11} V_1'' - s_{11} V_1 + \frac{1 - \mu^2}{E} q_1 = 0, \quad (9)$$

где $r_{11} = \int_0^H \psi_1^2 dF = \frac{\delta_1 H}{3}$; $s_{11} = \int_0^H \psi_1'^2 dF = \frac{\delta_1'}{H}$.

Модель упругого основания, определяемая уравнением (9), называется моделью с двумя характеристиками, или однослойной моделью. Напряжения в такой модели в соответствии с общим случаем (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} V_1 \psi_1' = - \frac{E}{(1 - \mu^2) H} V_1(x); \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} V_1' \psi_1 = \frac{E}{2(1 + \mu)} \frac{H - y}{H} V_1'(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнений (10) следует, что нормальные напряжения в однослойной модели постоянные по высоте слоя, а касательные — изменяются по линейному закону. Если толщина слоя H значительна (сопоставима с R), выбор функции $\psi_1(y)$ в виде (8) описывает НДС упругого основания достаточно приближенно, так как в этом случае уже нельзя считать нормальные напряжения постоянными по всей высоте слоя. Для получения решения задачи достаточной точности, не увеличивая число членов в разложении (2), функцию $\psi_1(y)$ следует выбирать так, чтобы она учитывала затухание напряжений по высоте упругого основания.

Тогда можно записать $\psi_1(y)$ в виде [15, 16]

$$\psi_1(y) = \frac{sh\gamma(H - y)}{sh\gamma H}, \quad (11)$$

где γ — коэффициент, характеризующий затухание напряжений по высоте упругого основания. Работа упругого основания при этом будет описываться уравнением (9), коэффициенты r_{11} и s_{11} которого определяют с учетом выражения (11). В том случае, если продольными перемещениями в основании пренебречь нельзя, а упругое основание представляет собой достаточно тонкий слой, перемещения по подошве которого отсутствуют, можно принять

$$u(x, y) = U_1(x)\varphi_1(y); \quad v(x, y) = V_1(x)\psi_1(y);$$

$$\varphi_1(y) = \psi_1(y) = \frac{H - y}{H}.$$

Система уравнений (5) в этом случае будет иметь вид

$$a_{11}U_1'' - \frac{1-\mu}{2}b_{11}U_1 + \left(\mu t_{11} - \frac{1-\mu}{2}c_{11}\right)V_1' + \frac{1-\mu^2}{E}p_1 = 0;$$

$$-\left(\mu t_{11} - \frac{1-\mu}{2}c_{11}\right)U_1' - \frac{1-\mu}{2}r_{11}V_1'' - s_{11}V_1 + \frac{1-\mu^2}{E}q_1 = 0. \quad (12)$$

Коэффициенты в уравнениях (12) определяются в соответствии с формулами (6). Если упругое основание представляет собой достаточно толстый слой, можно положить

$$\psi_1(y) = \varphi_1(y) = \frac{sh\gamma(H - y)}{sh\gamma H}$$

либо принять для каждой из этих функций другой закон изменения, отражающий физическое содержание задачи.

Если упругое основание представляет собой упругий массив, состоящий по высоте из нескольких слоев с различными упругими характеристиками, функции $\varphi_i(y)$ и $\psi_k(y)$ можно определить из условий их непрерывности и граничных условий при $y = 0$, $y = H$ с сохранением общей схемы решения задачи. Такой подход позволяет учитывать неоднородность упругого основания по его высоте и решать задачу при многослойном упругом основании [1, 13, 17].

Таким образом, плоская обобщенная модель упругого основания, свойства которого описываются уравнениями (5), дает возможность путем соответствующего выбора функции $\varphi_i(y)$ и $\psi_k(y)$ получить множество различных схем упругого основания, с различной степенью точности отражающих конкретную реальную задачу. Поскольку важнейшей особенностью расчета конструкции составной оболочки с упругим наполнителем является правильный выбор модели упругого

основания, применение вариационного метода предоставляет широкие возможности.

В частности, для практического использования можно рассматривать одну из наиболее простых моделей упругого основания — модель с двумя упругими характеристиками, которая описывается уравнением (9). Учитывая, что внешняя нагрузка $q(x)$ приложена только к поверхности упругого основания, $q_1(x)$ определяем по формуле

$$q_1(x) = q(x)\psi_1(0). \quad (13)$$

Поскольку из физических соображений следует, что рассматривается тонкий слой упругого основания ($H \ll R$), то согласно формулам (8) и (13), имеем $\psi_1(0) = 1$ и, следовательно, $q_1(x)$ совпадает с поверхностной нагрузкой $q(x)$.

После некоторых преобразований уравнение (9) может быть сведено к виду

$$2tV_1'' - kV_1 + q = 0, \quad (14)$$

где $k = \frac{Es_{11}}{1-\mu^2}$; $t = \frac{Er_{11}}{4(1+\mu)}$; k , t — коэффициенты упругой податливости упругого основания (коэффициенты постели).

При этом коэффициент k определяет работу упругого основания на сжатие, коэффициент t — на сдвиг. Коэффициент t означает, что поперечные перемещения возникают в упругом основании не только под местом приложения нагрузки, но и за его пределами. Следует отметить, что в том случае, когда упругое основание работает только на сжатие без сдвига (усилиями сдвига пренебрегаем по сравнению с усилиями сжатия либо упругое основание выполнено таким образом, что обеспечивается выполнение такого условия), то оно может быть приведено к известной модели Винклера, характеризующейся лишь одним коэффициентом упругой податливости K .

Действительно, положив в исходных уравнениях равновесия (3) $\tau_{xy} = 0$ и выполнив аналогичные преобразования, будем иметь вместо (9) и (14) соотношение

$$-s_{11}V_1 + \frac{1-\mu^3}{E}q = 0$$

или

$$-kV_1 + q = 0.$$

Последнее соотношение описывает известную гипотезу Винклера, определяющую соответствие между деформациями упругого основания и реакциями опор этого основания.

Выводы

1. Предложенный метод моделирования работы упругого основания позволяет свести плоскую задачу теории упругости к системе с конечным числом степеней свободы в поперечном направлении при сохранении бесконечного числа степеней свободы в продольном направлении, т. е. к одномерной задаче определения обобщенных перемещений.

2. Предложенная обобщенная модель упругого основания дает возможность путем введения дополнительных гипотез построить ряд более простых расчетных схем упругого основания, в том числе:

- однослойной модели с одной характеристикой (модель Винклера);
- однослойной модели с двумя характеристиками;
- модели, учитывающей затухание напряжений по высоте упругого основания;
- многослойной модели с различными упругими характеристиками по высоте упругого основания.

3. Наличие многообразия моделей упругого основания обеспечивает возможность выбора различных расчетных схем, позволяющих с необходимой степенью точности решать задачу деформирования сплошного упругого основания в составе оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов В.З., Леонтьев Н.Н. *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*. Москва, Изд-во физико-математической литературы, 1960, 490 с.
- [2] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 624 с.
- [3] Димитриенко Ю.И. *Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
- [4] Работнов Ю.Н. *Проблемы механики деформируемого твердого тела. Избранные труды*. Москва, Наука, 1991, 194 с.
- [5] Бушуев А. Ю., Фарафонов Б. А. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 2 (2), с. 101–114.
- [6] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborshikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. URL: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641>
<http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf>
- [7] Окопный Ю.А., Родин В.П., Чарков И.П. *Механика материалов и конструкций*. Москва, Машиностроение, 2001, 407 с.
- [8] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, 456 с.

- [9] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, 1993, 400 с.
- [10] Жилин П.А. *Актуальные проблемы механики*. СПб, Изд-во политехн. ун-та, 2006, 306 с.
- [11] Мухелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Москва, Наука, 1966, 708 с.
- [12] Бутина Т.А., Дубровин В.М. О моделировании поведения пористых материалов в элементах многослойных конструкций при кратковременных нагрузках. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7 (19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-844
- [13] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Моделирование упругопластического поведения материала при импульсном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 3 (27). DOI: 10.18698/2308-6033-2014-3-1231
- [14] Бакулин В.Н. *Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек*. Москва, Наука, 1998, 462 с.
- [15] Фролов К.В. *Избранные труды*. Москва, Наука, 2007, 526 с.
- [16] Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при воздействии ударной сосредоточенной нагрузки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9 (21). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-957
- [17] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Устойчивость цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 2. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-2-44

Статья поступила в редакцию 26.09.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование деформирования упругого основания в составной цилиндрической оболочке. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 11. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-11-1553>

Дубровин Виктор Митрофанович родился в 1935 г., окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета в 1958 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» и «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Область научных интересов: динамика, прочность и устойчивость деформируемых систем, ползучесть конструкционных материалов. e-mail: vmdubrovinv1934@mail.ru

Бутина Татьяна Александровна родилась в 1950 г., окончила факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Награждена медалями им. М.В. Келдыша и им. Ю.А. Гагарина. e-mail: butinata@mail.ru

Simulation of elastic foundation deformation in composite cylindrical shell

© V.M. Dubrovin, T.A. Butina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the elastic properties calculation method (compliance coefficients) of continuous elastic foundation, which is the link between the inner and outer cylindrical shells forming the composite shell. The method takes into account the two shells geometry and the physical-mechanical properties of the elastic foundation material. The method described presents the plane problem of the elasticity theory as a system with the finite number of degrees of freedom in the transverse direction, while maintaining the infinite number of degrees of freedom in the longitudinal direction.

Keywords: composite shell, inner shell, outer shell, continuous elastic foundation, generalized model, single-layer model, displacement method, equilibrium condition, compliance factor.

REFERENCES

- [1] Vlasov V.Z., Leontev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on the elastic foundation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1960, 490 p.
- [2] Dimitrienko Yu.I. *Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 624 p.
- [3] Dimitrienko Yu.I. *Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Universal continuum laws of mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [4] Rabotnov Yu.N. *Problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela* [The problems of solid mechanics]. Selected works. Moscow, Nauka Publ., 1991, 194 p.
- [5] Bushuev A.Yu., Farafonov B.A. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 2, pp. 101–114.
- [6] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. Available at: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641>
<http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf>
- [7] Okopny Yu.A., Rodin V.P., Charkov I.P. *Mekhanika materialov i konstruksiy* [Mechanics of Materials and Structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2001, 407 p.
- [8] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 1. Tenzornyy analiz* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [9] Feodosev V.I. *Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected problems and questions about the strength of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1993, 400 p.
- [10] Zhilin P.A. *Aktualnye problemy mekhaniki* [Actual Problems in Mechanics]. St. Petersburg Polytechnic University Publ., 2006, 306 p.

- [11] Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 708 p.
- [12] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 7 (19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-844
- [13] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, iss. 3 (27). DOI: 10.18698/2308-6033-2014-3-1231
- [14] Bakulin V.N. *Dinamicheskie zadachi nelineynoy teorii mnogosloynnykh obolochek* [Dynamic problems of the nonlinear theory of multilayer shells]. Moscow, Nauka Publ., 1998, 462 p.
- [15] Frolov K.V. *Izbrannyye trudy* [Selected works]. Moscow, Nauka Publ., 2007, 526 p.
- [16] Dubrovin V.M., Butina T.A. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 9 (21). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-9-957
- [17] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, iss. 2. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-2-44

Dubrovin V.M. (b. 1935) graduated from Mechanics and Mathematics Department, Saratov State University in 1958. Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics and of the Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Specialist in the field of strength and stability of deformable systems. Research interests include dynamics of deformable systems, strength and stability of deformable systems; creep of structural materials. Author of five inventions through a private subject. e-mail: vmdubrovin1934@mail.ru

Butina T.A. (b. 1950) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 1974, Department of Management and Applied Mathematics. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Specialist in the field of strength and stability of deformable systems. Awarded by M.V. Keldysh and Yu.A. Gagarin medals. e-mail: butina_ta@mail.ru