

## Моделирование напряженно-деформированного состояния композиционных оболочек с дефектами

© Ю.В. Захарова, Л.Г. Лохматова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Рассмотрена актуальная задача моделирования напряженно-деформированного состояния композиционных оболочек с дефектами. Данная тема является перспективной, так как в настоящее время оболочки из композиционных материалов часто выступают в качестве элементов различных силовых конструкций, а появления дефектов практически невозможно избежать даже на стадии изготовления. Предложена математическая модель деформирования цилиндрических оболочек из композиционных материалов с дефектами, основанная на гипотезе Тимошенко. Рассмотрены дефекты типа непроклея. С помощью данной модели описан алгоритм решения задачи о напряженно-деформированном состоянии цилиндрической оболочки с дефектами. Для численного решения поставленной задачи использовался метод конечных элементов. Представленные результаты численного моделирования позволили установить закономерности влияния локальных несовершенств структуры на напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки из композиционных материалов с дефектами типа непроклея.*

**Ключевые слова:** *напряженно-деформированное состояние, цилиндрическая оболочка, композиционные материалы, модель оболочек Тимошенко, непроклеи.*

**Введение.** В современных силовых конструкциях находят широкое применение волокнистые композиционные материалы, представляющие собой твердое полимерное связующее, армированное высокопрочными и высокожесткими волокнами [1, 2]. Элементы конструкций (стержни, пластины, оболочки) из подобных материалов имеют требуемые механические свойства при высокой удельной прочности и жесткости. Такие элементы конструкций применяются в ракетно-космической технике, авиационной промышленности, автомобилестроении и в других отраслях [3–6]. Изучение различных свойств конструкций, изготовленных из подобных материалов, является перспективным направлением.

Кроме того, изготовленные из композиционных материалов изделия существенно легче металлических аналогов, вследствие чего в последнее время сформировалась тенденция увеличения габаритов таких конструкций. Увеличение размеров изделия и его составных элементов непосредственно связано с ростом вероятности появления в них технологических дефектов [7–10], существенно влияющих на прочностные свойства всего изделия.

В настоящее время для решения задач о напряженно-деформируемом состоянии (НДС) изделия используется метод конечных элементов (МКЭ) [11–16]. В данной работе с помощью МКЭ решена задача моделирования НДС цилиндрической оболочки из композиционного материала с дефектами, рассматриваемой в рамках теории Тимошенко [17, 18], под действием равномерного внутреннего давления.

**Математическая постановка задачи моделирования НДС композиционной оболочки с дефектами.** Рассмотрим цилиндрическую оболочку из композиционного материала, находящегося под действием равномерного внутреннего давления  $p$  (рис. 1). В качестве кинематической гипотезы примем гипотезу Тимошенко для многослойного пакета [18, 19].

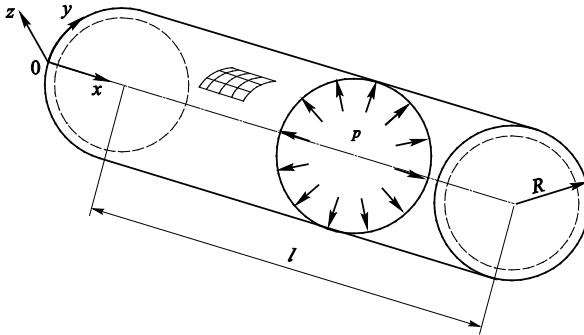


Рис. 1. Геометрия цилиндрической оболочки

В качестве координатной поверхности ( $z = 0$ ) примем среднюю поверхность оболочки. Тогда распределение по толщине оболочки будем вычислять по формулам

$$u_\alpha = U_\alpha + z\vartheta_\alpha, \quad \alpha = x, y, \quad w = W, \quad (1)$$

где  $U_x, U_y$  — тангенциальные перемещения;  $W$  — прогибы оболочки;  $\vartheta_x, \vartheta_y$  — углы поворота сечений.

С учетом принятой гипотезы и геометрии рассматриваемой оболочки деформационные соотношения примут вид

$$\varepsilon_x = e_x + z\chi_x, \quad \varepsilon_y = e_y + z\chi_y, \quad \varepsilon_{xy} = e_{xy} + z\chi_{xy}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial U_x}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{W}{r}; \quad 2e_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}; \quad \chi_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}; \\ \chi_y &= \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}; \quad 2\chi_{xy} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x}; \quad \vartheta_x = \gamma_{xz} - \frac{\partial W}{\partial x}; \quad \vartheta_y = \gamma_{yz} - \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{U_y}{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

В соотношениях (3)  $e_x, e_y, e_{xy}$  — деформации растяжения-сжатия и сдвига срединной поверхности оболочки;  $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$  — деформации изгиба и кручения.

Для краткости записи деформационные соотношения (3) запишем в матричном виде:

$$e = Lu. \quad (4)$$

$$\text{Здесь } e = [e_x \ e_y \ 2e_{xy} \ \chi_x \ \chi_y \ 2\chi_{xy} \ \vartheta_x \ \vartheta_y]^T, \quad u = [W \ \vartheta_x \ \vartheta_y \ U_x \ U_y]^T,$$

где  $L$  — матрица дифференциального оператора, полученная из соотношений (3).

Определяющие соотношения для модели оболочек Тимошенко имеют вид

$$\sigma_{\alpha\alpha} = C_{\alpha\alpha}e_{\alpha} + C_{\alpha\beta}e_{\beta} + X^3(C_{\alpha\alpha}\chi_{\alpha} + C_{\alpha\beta}\chi_{\beta}), \quad \alpha = x, y; \quad (5)$$

$$\sigma_{xy} = 2C_{66}e_{xy} + 2X^3C_{66}\chi_{xy}, \quad \tau_y = 2C_{44}\vartheta_y, \quad \tau_x = 2C_{55}\vartheta_x.$$

где  $\sigma_{\alpha\beta}$  — компоненты тензора напряжений.

Запишем соотношения упругости для внутренних погонных силовых факторов:

$$\begin{aligned} T_x &= \bar{C}_{11}e_{xx} + \bar{C}_{12}e_{yy}; \quad T_y = \bar{C}_{22}e_{yy} + \bar{C}_{21}e_{xx}; \\ T_{xy} &= 2\bar{C}_{66}e_{xy}; \quad Q_x = 2\bar{C}_{55}\vartheta_x; \quad Q_y = 2\bar{C}_{44}\vartheta_y; \\ M_{xx} &= D_{11}\chi_{xx} + D_{12}\chi_{yy}; \quad M_{yy} = D_{22}\chi_{yy} + D_{21}\chi_{xx}; \\ M_{xy} &= 2D_{66}\chi_{xy}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $T_{\alpha\beta}$  — погонные усилия;  $M_{\alpha\beta}$  — моменты;  $Q_{\alpha}$  — перерезывающие силы.

Запишем определяющие соотношения в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{C}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{bmatrix} \quad (7)$$

или

$$T = De,$$

где  $\bar{C}_{\alpha\beta} = hC_{\alpha\beta}$  — мембранные жесткости;  $D_{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12}C_{\alpha\beta}$  — изгибные жесткости. Вычислим  $C_{\alpha\beta}$  по следующим формулам:

$$C_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \quad C_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \quad C_{12} = \mu_{21}C_{11};$$

$$C_{66} = G_{12}h; \quad C_{55} = G_{13}h; \quad C_{44} = G_{23}h; \quad D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12}; \quad (8)$$

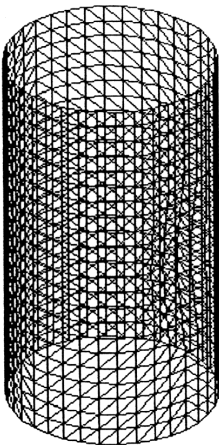
$$D_{11} = \frac{h^3}{12}C_{11}; \quad D_{22} = \frac{h^3}{12}C_{22}; \quad D_{12} = \mu_{21}D_{11};$$

где  $G_{12}, G_{23}, G_{13}$  — модули поперечного сдвига.

**Вариационная постановка задачи статики.** Используем вариационную постановку задачи в перемещениях на основе принципа Лагранжа [20–25]. Это позволит не выписывать явно уравнения совместности деформаций, которые выполняются тождественно.

Разность энергии деформаций и работы внешних сил с учетом выражения деформаций через перемещения (4) дает минимизируемый функционал потенциальной энергии, в котором учтены статические граничные условия (в данной работе в качестве граничных условий принято жесткое закрепление торцев оболочки, что приводит к соотношениям  $U_\alpha = 0; \quad W = 0; \quad \vartheta_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2$ ):

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S e^T D e dV - \iint_{S_p} u^T p dS_p = \frac{1}{2} \iint_S (Lu)^T D (Lu) dV - \iint_{S_p} u^T p dS_p. \quad (9)$$



**Рис. 2.** Разбиение цилиндрической оболочки на треугольные конечные элементы

Минимум функционала необходимо отыскивать в пространстве кинематически допустимых полей. Окончательно, с учетом принятых гипотез при кинематических условиях, определяемых схемой закрепления, задача сводится к минимизации функционала вида

$$\Pi_{\min} \rightarrow \min(W - A). \quad (10)$$

Ее приближенное решение может быть получено путем дискретизации модели.

**Квадратичный двумерный конечный элемент.** Для численного решения задачи разобьем оболочку на конечные элементы (рис. 2).

В качестве конечного элемента принят шестиузловой треугольник. Его конечно-элементная аппроксимация представлена на рис. 3.

Для конечного элемента с помощью естественных координат были вычислены функции формы:

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1; & N_4 &= 4L_2L_3; \\ N_2 &= 4L_1L_2; & N_5 &= (2L_3 - 1)L_3; \\ N_3 &= (2L_2 - 1)L_2; & N_6 &= 4L_1L_3. \end{aligned}$$

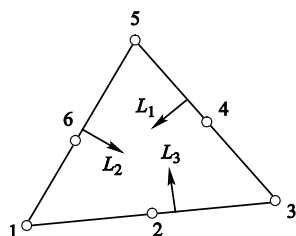


Рис. 3. Расположение узлов в треугольном элементе с квадратичной аппроксимацией

(11)

**Связь деформаций координатной поверхности с узловыми перемещениями.** Выразим перемещения в произвольной точке через перемещения узлов конечного элемента (три линейных и два угла поворота нормали):

$$u = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ W \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{bmatrix} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $\delta_i = [U_{1i}, U_{2i}, W_i, \vartheta_{xi}, \vartheta_{yi}]$  — перемещения  $i$ -го узла;  $N$  — блочная матрица функций форм.

При этом

$$\begin{aligned} N &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6]; \\ N_i &= \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом перемещений (12) связь деформаций координатной поверхности с узловыми перемещениями имеет вид

$$e = B\delta, \quad (14)$$

где  $B$  — матрица производных от функций форм,  $B = LN$ .

Подставляя полученные аппроксимации в функционал (9), получаем

$$\Pi^{(e)} = W^{(e)} - A^{(e)} = \frac{1}{2} \delta^T K^{(e)} \delta - \delta^T P^{(e)}, \quad (15)$$

где  $K^{(e)} = \int_{S^{(e)}} B^T DB dS$  — матрица жесткости элемента;  $P^{(e)} = \int_{S_p^{(e)}} N^T p dS$  —

вектор узловых сил.

Суммируя по элементам матрицу и вектор, получаем глобальную матрицу жесткости и вектор. Минимизируя потенциальную энергию, переходим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$K \delta = Q, \quad (16)$$

решая которую, находим перемещения узлов.

**Определение деформаций и напряжений.** Для определения деформаций и напряжений вычислим перемещения в точке  $M$ , соответствующей середине конечного элемента:

$$u(M) = N(M)\delta. \quad (17)$$

Затем вычисляем обобщенные деформации в точке  $M$ , используя формулы (3):

$$e(M) = L(M)u = L(M)N(M)\delta = B(M)\delta. \quad (18)$$

При численной реализации матрицу  $B(M)$  необходимо сформировать при обработке конечного элемента.

Для вычисления усилий в центре конечного элемента необходимо умножить деформации на матрицу коэффициентов приведенных жесткостных характеристик (7):

$$T(M) = De = DB(M)\delta. \quad (19)$$

Далее можно вычислить напряжения, используя формулы (5).

**Математическое моделирование дефекта оболочки.** При изготовлении оболочек невозможно избежать появления начальных расслоений и непроклеев. Данные виды дефектов моделируются изменением упругих характеристик материала, определяемых формулами (8).

В представленной работе исследовали дефекты типа непроклея прямоугольной формы, характеризуемые уменьшением жесткостных характеристик материала в зоне дефекта в 4 и 9 раз [5]. Рассматривались дефекты, которые или примыкают к краю оболочки, или находятся на ее середине (рис. 4).

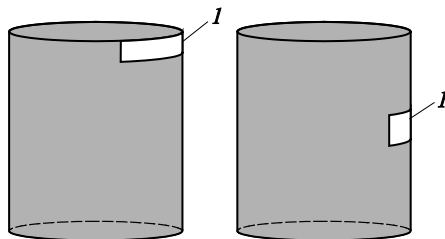


Рис. 4. Расположение дефектов в оболочке

**Результаты численного моделирования НДС оболочки.** Для численной реализации рассмотрели цилиндрическую оболочку длиной 2 м, радиусом 1 м и толщиной 0,0015 м. Композиционный материал, из которого изготовлена оболочка, имеет следующие характеристики:  $E_1 = E_2 = 200$  ГПа;  $\mu_{12} = \mu_{21} = 0,3$ ;  $G_{12} = G_{23} = G_{13} = 76,9$  ГПа. Оболочка жестко закреплена с обоих концов и находится под равномерным внутренним давлением  $p = 0,1$  МПа.

Для оценки достоверности результатов, полученных с помощью модели, описанной выше, сравним некоторые расчеты с аналитическими. Согласно работе [17], максимальный прогиб срединной поверхности оболочки можно рассчитать по формуле

$$W_{\max} = -\frac{1}{2\beta^3 H} (\beta M_0 + Q_0), \quad (20)$$

где  $M_0 = -\frac{p}{2\beta^2}$  — изгибающий момент;  $Q_0 = -\frac{p}{\beta}$  — перерезывающая сила.

Коэффициенты  $\beta$  и  $H$  определяли по формулам:

$$H = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad \beta^4 = \frac{Eh}{4R^2 H}. \quad (21)$$

После подстановки в формулу (20) исходных данных и формул (21) получили:

$$W_{\max} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Результаты, полученные при численном решении этой задачи, представлены на рис. 5.

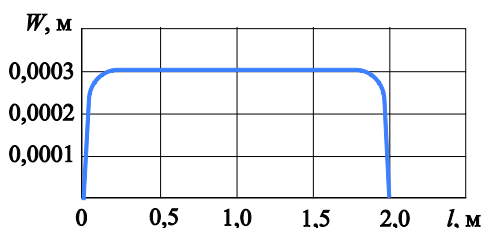


Рис. 5. Распределение прогибов по длине оболочки

Также был проведен расчет напряжений по безмоментной теории для оболочки с исходными параметрами, но не имеющей закреплений на торцах, в соответствии с работами [17, 18, 22]:

$$\sigma_{yy} = \frac{pR}{h} = 6,7 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

При численном решении данной задачи получены результаты, представленные на рис. 6.

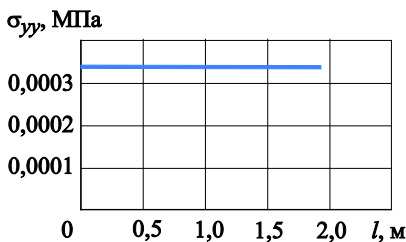


Рис. 6. Распределение окружных напряжений в оболочке со свободными концами

В соответствии с представленными на рис. 5 и 6 данными в обоих случаях результаты численных решений довольно близки по значениям к результатам, полученным при аналитических решениях. Относительная погрешность не превышает 7 %. Это доказывает, что разработанная модель и алгоритм работают верно.

Также проведено параметрическое исследование зависимости НДС оболочки от размера, физико-механических свойств дефекта и его расположения в оболочке.

На рис. 7–10 представлены результаты численного моделирования НДС цилиндрической оболочки с дефектами.

Исходя из данных рис. 7–10 можно сделать вывод, что при одинаковых параметрах дефекта материал деформируется сильнее, если дефект примыкает к торцу оболочки.

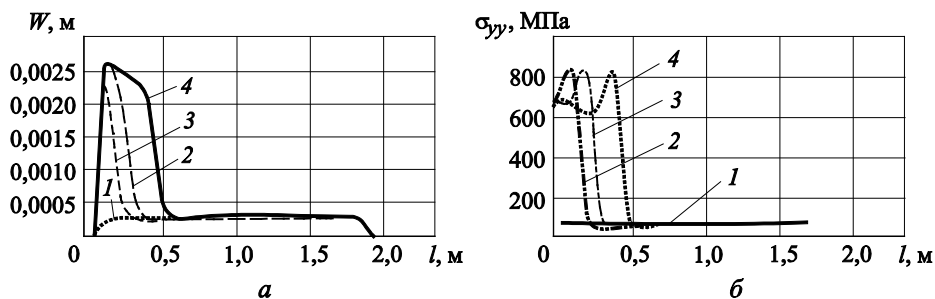
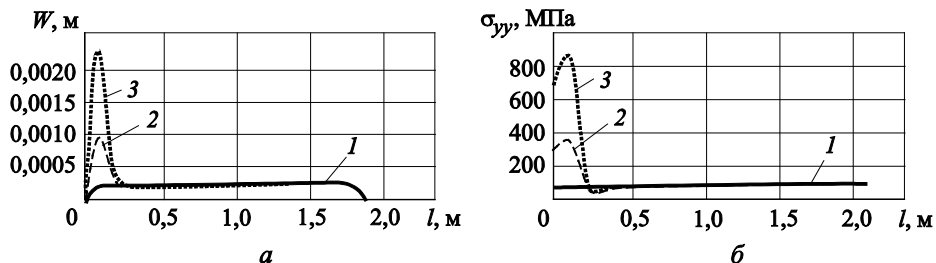


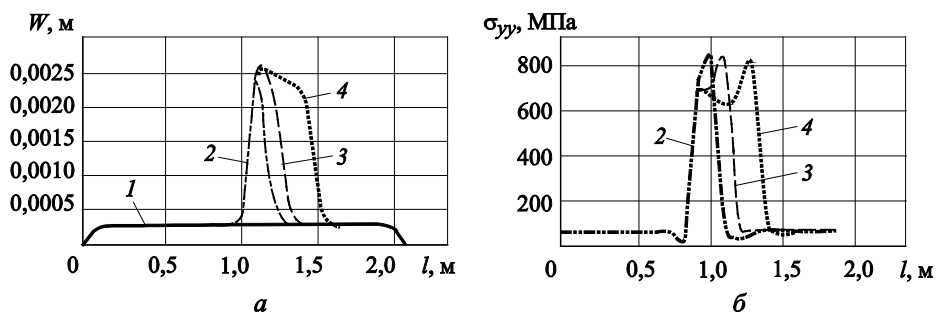
Рис. 7. Зависимость прогибов (а) и окружных напряжений (б) от размера дефекта, примыкающего к торцу оболочки:

1 — без дефекта; 2–4 —  $S_{об}/S_{деф}$  равно 784, 392 и 31 соответственно

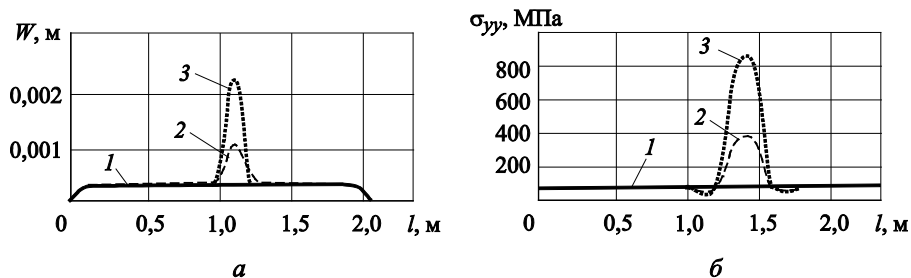




**Рис. 8.** Зависимость прогибов (*a*) и окружных напряжений (*б*) от характера изменений жесткостных характеристик дефекта, примыкающего к торцу оболочки: 1 — без дефекта; 2, 3 — уменьшение жесткостных характеристик дефекта в 4 и 9 раз соответственно



**Рис. 9.** Зависимость прогибов (*a*) и окружных напряжений (*б*) от размера дефекта, располагающегося по середине оболочки: 1–4 — см. рис. 7



**Рис. 10.** Зависимость прогибов (*a*) и окружных напряжений (*б*) от характера изменений жесткостных параметров дефекта, располагающегося по середине оболочки: 1–3 — см. рис. 8:

Уменьшение жесткостных свойств в зоне дефекта ведет к более быстрому разрушению материала, чем при увеличении размера дефекта. Численное моделирование показало, что уменьшение жесткостных характеристик в 9 раз приводит к существенному увеличению локальных прогибов и окружных напряжений более чем в 8 раз.

**Заключение.** Разработана математическая модель расчета НДС цилиндрических оболочек типа Тимошенко. Представлен алгоритм поставленной задачи на основе метода конечных элементов и проведено численное моделирование дефектов типа непрочлея. Относительная погрешность результатов сравнения численного моделирования

ния НДС композиционных оболочек, имеющих дефекты, с аналитическим решением не превысила 7 %. Проведено параметрическое исследование влияния размера, физико-механических характеристик и расположения дефекта на НДС оболочки.

Разработанная математическая модель и ее численная реализация могут быть использованы для дальнейших исследований НДС композиционной оболочки с дефектами.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Choudhry R.S., Hassan Syed F., Li S., Day R. Damage in Single Lap Joints of Woven Fabric Reinforced Polymeric Composites Subjected to Transverse Impact Loading. *International Journal of Impact Engineering*, 2015, vol. 80, pp. 76–93.
- [2] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Шпакова Ю.В., Юрин Ю.В. Моделирование поверхностей прочности композитов на основе микроструктурного конечно-элементного анализа. *Наука и образование*, 2012, № 11. DOI: 10.7463/1112.0496336 (дата обращения 05.07.2016).
- [3] Гузь А.Н., Григоренко Я.М., Бабич И.Ю. и др. *Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3 т. Т. 2. Механика элементов конструкций*. Киев, Наукова думка, 1983, 464 с.
- [4] Сыздыков Е.К., Димитриенко Ю.И., Минин В.В. Моделирование термомеханических процессов в композитных оболочках при локальном нагреве излучением. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2011, т. 17, № 1, с. 71–90.
- [5] Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. *Моделирование статике и динамики оболочечных конструкций из композитных материалов*. Москва, Физматлит, 2014, 196 с.
- [6] Aul'chenko S.M., Kaledin V. O., Shpakova Yu.V. Characteristic Features of the Oscillation of Shells of Bodies of Revolution Immersed in a Viscous Fluid Flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2008, vol. 81, iss. 5, pp. 941–944.
- [7] Laptsev N.I., Mordasov V.I., Poilov V.V., Shulepova O.V. Laser Vibrodiagnostics of Starved Spots of Large-sized Multilayered Honeycomb Shells. *Polymer Science. Series D*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 263–266.
- [8] Cawley P. Low frequency NDT techniques for the detection of disbonds and delaminations. *NDT & E International*, 1992, vol. 25, iss. 2, pp. 100. DOI:10.1016/0963-8695(92)90556-V (дата обращения 05.07.2016).
- [9] Ouinas D., Bouiadjra B., Bachir, Achour T., Benderdouche N. Influence of Disbond on Notch Crack Behaviour in Single Bonded Lap Joints. *Materials & Design*, 2010, vol. 31, iss. 9, pp. 4356–4362.
- [10] Каледин В.О., Аникина Ю.В. Численное моделирование статике и устойчивости подкрепленных оболочек с расслоениями. *Вестник Томского государственного университета*, 2006, № 19, с. 225–232.
- [11] Агапов В.П. *Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций*: учеб. пособие. Москва, Изд-во АСВ, 2000, 152 с.
- [12] Голованов А.И., Тюленева О.И., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций*. Москва, Физматлит, 2006, 392 с.

- [13] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Москва, Мир, 1975, 541 с.
- [14] Рикардс Р.Б. *Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин*. Рига, 1988, 284 с.
- [15] Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов*. Москва, Мир, 1979, 392 с.
- [16] Каледин В.О., Аникина Ю.В., Бурнышева Т.В., Решетникова Е.В. Математическое моделирование статике сетчатой оболочки с учетом концентрации напряжений. *Вестник Томского государственного университета*, 2006, № 19, с. 233.
- [17] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Снитко И.К., ред. *Пластинки и оболочки*. Москва, Наука, 1966, 636 с.
- [18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013, 624 с.
- [19] Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г., Данилова В.Л., ред. *Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 341 с.
- [20] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных конструкций и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 264 с.
- [21] Попов Б.Г. *Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993, 294 с.
- [22] Биргер И.А., Пановко Я.Г. *Прочность, устойчивость, колебания: справочник. В 3 т. Т. 2*. Москва, Машиностроение, 1968, 464 с.
- [23] Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в тканевом композите при RTM методе изготовления. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2015, вып. 12 (48). URL: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1454.html>
- [24] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborschikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, pp. 7211–7220. URL: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641>
- [25] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Строганов А.С. Численное моделирование сопряженных аэрогазодинамических и термомеханических процессов в композитных конструкциях высокоскоростных летательных аппаратов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 3, с. 3–24.

Статья поступила в редакцию 26.09.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Захарова Ю.В., Лохматова Л.Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния композиционных оболочек с дефектами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 11. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-11-1552>

**Захарова Юлия Владимировна** родилась в 1982 г., окончила Кемеровский государственный университет в 2004 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области механики деформируемого твердого тела, механики композиционных материалов и конструкций. e-mail: [shpakovayuliya@bmstu.ru](mailto:shpakovayuliya@bmstu.ru)

**Лохматова Любовь Григорьевна** родилась в 1992 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2016 г., кафедра «Вычислительная математика и математическая физика». e-mail: [lohmatoval0408@gmail.com](mailto:lohmatoval0408@gmail.com)

## Simulation of stress-strain state of defected composite shells

© Yu.V. Zakharova, L.G. Lokhmatova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The paper examines an important problem of modeling the stress-strain state of the defected composite shells. The issue is a promising one because presently shells made of composite materials often serve as elements of different bearing constructions and it is often impossible to avoid defects even at the manufacturing stage. We propose a mathematical model of deformation of defected cylindrical shells made of composite materials. The model is based on Timoshenko hypothesis. We examined defects of disbond type and with the help of this model we described an algorithm for solving the problem of stress-strain state of defected cylindrical shells. For the numerical solution of the problem we used the finite element method. The presented results of numerical simulations have established patterns of influence of local imperfections in the structure on the stress-strain state of cylindrical shell made of composite materials with defects such as disbonds.*

**Keywords:** stress-strain state, cylindrical shell, composite materials, Timoshenko shell model, disbonds.

### REFERENCES

- [1] Choudhry R.S., Hassan Syed F., Li S., Day R. Damage in single lap joints of woven fabric reinforced polymeric composites subjected to transverse impact loading. *International Journal of Impact Engineering*, 2015, vol. 80, pp. 76–93.
- [2] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Shpakova Yu.V., Yurin Yu.V. *Nauka i obrazovanie — Science and Education*, 2012, no. 11. DOI: 10.7463/1112.0496336 (accessed July 5, 2016).
- [3] Guz A.N., Grigorenko Ya.M., Babich I.Yu. et al. *Mekhanika kompozitnykh materialov i elementov konstruksiy. V 3 tomakh. Tom 2. Mekhanika elementov konstruksii* [Mechanics of Composite Materials and structural elements. In 3 vols. Vol. 2. Mechanics of structural elements]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983, 464 p.
- [4] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy — Mechanics of composite materials and structures*, 2011, vol. 17, no. 1, pp.71–90.
- [5] Kaledin V.O., Aulchenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Yu.V. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolocheknykh konstruksii iz kompozitnykh materialov* [Simulation of statics and dynamics of shell structures made of composite materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 196 p.
- [6] Aulchenko S.M., Kaledin V.O., Shpakova Yu.V. Characteristic features of the oscillation of shells of bodies of revolution immersed in a viscous fluid flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2008, vol. 81, iss. 5, pp. 941–944.
- [7] Laptsev N.I., Mordasov V.I., Poilov V.V., Shulepova O.V. Laser vibrodiagnostics of starved spots of large-sized multilayered honeycomb shells. *Polymer Science. Series D*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 263–266.
- [8] Cawley P. Low frequency NDT techniques for the detection of disbonds and delaminations. *NDT & E International*, 1992, vol. 25, no. 2, pp. 100. DOI: 10.1016/0963-8695(92)90556-V (accessed July 5, 2016).

- [9] Ouinas D., Bouiadjra B. Bachir, Achour T., Benderdouche N. Influence of disbond on notch crack behaviour in single bonded lap joints. *Materials & Design*, 2010, vol. 31, no. 9, pp. 4356–4362.
- [10] Kaledin V.O., Anikina Yu.V. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta — Tomsk State University Journal*, 2006, no. 19, pp. 225–232.
- [11] Agapov V.P. *Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti prostranstvennykh tonkostennykh podkreplennykh konstruksiy* [The finite element method in statics, dynamics and spatial stability of thin-walled reinforced constructions]. Moscow, ASV Publ., 2000, 152 p.
- [12] Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 392 p.
- [13] Zenkevich A. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in technology]. Moscow, Mir Publ., 1975, 541 p.
- [14] Rickards R.B. *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin* [Finite element method in the theory of shells and plates]. Riga, 1988, 284 p.
- [15] Segerlind L.J. *Applied Finite Element Analysis*. Wiley, New York, 1976. [In Russ.: Segerlind L. *Primenenie metoda konechnykh elementov*. Moscow, Mir Publ., 1979, 392 p.]
- [16] Kaledin V.O., Anikina Yu.V., Burnysheva T.V., Reshetnikova E.V. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta — Tomsk State University Journal*, 2006, no. 19, pp. 233.
- [17] Timoshenko S.P., Woinowskiy-Krieger S., Snitko I.K., eds. *Plastinki i obolochki* [Theory of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 636 p.
- [18] Dimitrienko Yu.I. *Mehanika splushnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 4. Osnovy mehanik i tverdyh sred* [Continuum Mechanics. In 4 vol. Vol. 4. Fundamentals of mechanics of solid media]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
- [19] Kuzmin M.A., Lebedev D.L., Popov B.G. *Raschety na prochnost elementov mnogosloynnykh kompozitnykh konstruksiy* [Strength calculations of elements of multilayer composite structures]. Moscow, BMSTU Publ., 2012, 341 p.
- [20] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh konstruksiy i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer structures and shells made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 264 p.
- [21] Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh konstruksiy variatsionno-matrichnymi metodami* [Calculation of multilayer structures by variation-matrix methods]. Moscow, BMSTU Publ., 1993, 294 p.
- [22] Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost, ustoichivost, kolebaniya* [Strength, Stability, Vibrations]. Handbook in 3 vol. Vol. 2. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 464 p.
- [23] Dimitrienko Yu.I., Shpakova Yu.V., Bogdanov I.O., Sborshikov S.V. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, iss. 12 (48). Available at: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1454.html>
- [24] Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Sborshikov S.V. Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 145, 7211–7220. Available at: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641>  
<http://www.m-hikari.com/ams/ams-2015/ams-145-148-2015/p/dimitrienkoAMS145-148-2015.pdf>
- [25] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Zakharov A.A., Stroganov A.S. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 3 (3), pp. 3–24.

**Zakharova Yu.V.** (b. 1982) graduated from Kemerovo State University in 2004. Cand. Sci. (Tech.), Assoc. Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 50 publications in the field of solid mechanics, mechanics of composite materials and structures. e-mail: shpakovayuliya@bmstu.ru, shpakovayulia@gmail.com

**Lokhmatoва L.G.** (b. 1992) graduated from the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University in 2016. e-mail: lohmatova0408@gmail.com