

## Оптимальный вертикальный подъем электрического мультикоптера

© С.З. Сverdlov

Вологодский государственный университет, г. Вологда, 160000, Россия

*Рассмотрены особенности вертикального набора высоты с минимальным расходом энергии аккумуляторной батареи. Исследовано влияние изменения КПД электрического двигателя на расчет оптимального подъема. Получены формулы для определения скорости оптимального и квазиоптимального подъема, для расчета тяговооруженности летательного аппарата, обеспечивающей оптимальный подъем, для оценки КПД электромотора в режиме висения летательного аппарата. Приведены аэродинамические характеристики пропеллеров, необходимые для расчета оптимального подъема.*

**Ключевые слова:** беспилотный многороторный электрический вертолет, мультикоптер, оптимальный вертикальный подъем, КПД, удельный расход энергии, тяговооруженность, винтомоторная группа, бесколлекторный электромотор.

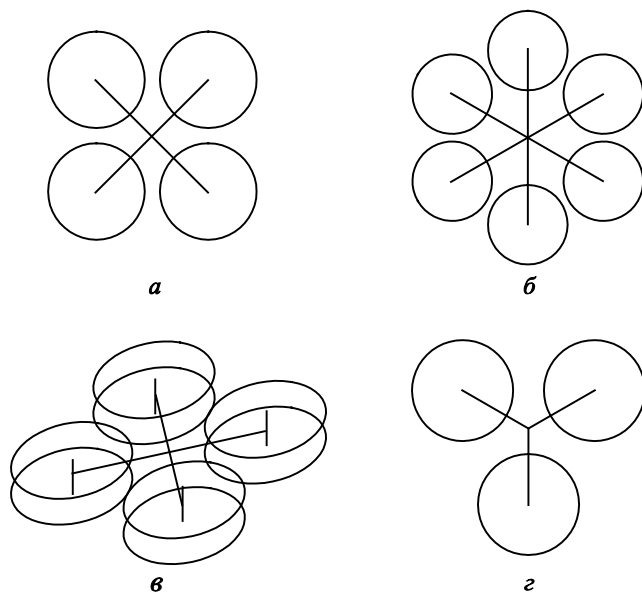
**Введение.** Важнейшим ресурсом, ограничивающим возможности электрического беспилотного многороторного вертолета, является запас энергии аккумуляторной батареи. При выполнении любого маневра в воздухе рекомендуется использовать режим полета, обеспечивающий минимально возможный расход энергии для осуществления этого маневра.

Рассмотрим вертикальный подъем мультикоптера (рис. 1). Если в ходе подъема не предполагается выполнение каких-либо специальных задач (например, видео- или фотосъемки), а требуется лишь достичь заданной высоты, то целесообразен подъем в режиме, обеспечивающем минимальный расход энергии аккумуляторной батареи для подъема на эту высоту.

Задачей настоящего исследования стало определение условий, при которых достигается минимальный расход энергии на вертикальный подъем, и характеристик мультикоптера, при которых эти условия могут быть выполнены.

**Аэродинамические характеристики и коэффициент полезного действия пропеллеров мультикоптеров.** При постройке мультикоптеров используются почти исключительно несущие винты (пропеллеры) фиксированной геометрии, в частности, выпускаемые компанией Landing Products Inc. (США) под торговой маркой APC, которые широко распространены. Серия пропеллеров APC MR специально предназначена для мультироторных летательных аппаратов (MR —

MultiRotor). В конструкциях мультикоптеров применяют также пропеллеры серии APC CF той же компании, которая предоставила данные о пропеллерах [1], полученные вычислительными методами на основе вихревой теории. Они хорошо согласуются с экспериментальными результатами из работ [2, 3].



**Рис. 1.** Схемы мультикоптеров:

*a* — квадрокоптер; *б* — гексакоптер; *в* — соосный октокоптер; *z* — трикоптер

Получены результаты квадратичной аппроксимации зависимости коэффициента тяги  $\alpha(\lambda)$  и коэффициента мощности  $\beta(\lambda)$  от коэффициента скорости (относительной поступи, числа Струхаля)  $\lambda$  пропеллеров серии APC MR (табл. 1).

При использовании квадратичной аппроксимации коэффициенты тяги  $\alpha(\lambda)$  и мощности  $\beta(\lambda)$  вычисляются по формулам

$$\alpha(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2, \quad (1)$$

$$\beta(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2. \quad (2)$$

Коэффициент  $\lambda$  скорости определяется из равенства:

$$\lambda = \frac{V}{nD}, \quad (3)$$

где  $V$  — осевая скорость (в обсуждаемом случае скорость вертикального подъема);  $n$  — частота вращения пропеллера (об/с);  $D$  — диаметр пропеллера.

Таблица 1

**Аэродинамические характеристики пропеллеров APC MR**

Про- пеллер	Диаметр про- пелле- ра $D$ , м	Коэффициент тяги			Коэффициент мощности			$\eta_{\max}$	$\lambda_{\text{опт}}$	$\lambda_{95}$	$\lambda_{90}$	$\lambda_{85}$
		$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$					
APC 8x45MR	0,203	0,1223	-0,0349	-0,1448	0,0492	0,0673	-0,1457	0,7993	0,6270	0,5269	0,4760	0,4331
APC 9x45MR	0,229	0,1187	-0,0569	-0,1405	0,0459	0,0513	-0,1387	0,7698	0,5677	0,4755	0,4291	0,3904
APC 10x45MR	0,254	0,1140	-0,0763	-0,1291	0,0429	0,0355	-0,1248	0,7422	0,5198	0,4335	0,3908	0,3553
APC 10x55MR	0,254	0,1230	-0,0416	-0,1414	0,0511	0,0542	-0,1343	0,8033	0,6164	0,5187	0,4693	0,4279
APC 11x45MR	0,279	0,1055	-0,0823	-0,1254	0,0379	0,0292	-0,1182	0,7216	0,4818	0,4007	0,3608	0,3279
APC 12x45MR	0,305	0,1006	-0,0915	-0,1196	0,0351	0,0227	-0,1123	0,7018	0,4517	0,3749	0,3374	0,3065
APC 12x55MR	0,305	0,1117	-0,0693	-0,1299	0,0428	0,0320	-0,1179	0,7655	0,5299	0,4437	0,4009	0,3652
APC 13x55MR	0,330	0,1020	-0,0738	-0,1223	0,0373	0,0225	-0,1104	0,8308	0,5279	0,4486	0,4075	0,3726
APC 14x55MR	0,356	0,0983	-0,0829	-0,1172	0,0345	0,0186	-0,1008	0,7495	0,4694	0,3916	0,3534	0,3218
APC 16x55MR	0,406	0,0908	-0,0918	-0,1128	0,0300	0,0177	-0,1020	0,6990	0,4246	0,3519	0,3166	0,2875
APC 18x55MR	0,457	0,0847	-0,0961	-0,1134	0,0267	0,0144	-0,0986	0,6750	0,3906	0,3228	0,2901	0,2634

Известны также результаты квадратичной аппроксимации коэффициентов тяги и мощности от коэффициента скорости для пропеллеров серии APC CF (табл. 2).

Таблица 2

**Аэродинамические характеристики пропеллеров APC CF**

Про- пеллер	Диаметр про- пелле- ра $D$ , м	Коэффициент тяги			Коэффициент мощности			$\eta_{\max}$	$\lambda_{\text{опт}}$	$\lambda_{95}$	$\lambda_{90}$	$\lambda_{85}$
		$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$					
APC 7x6SF	0,178	0,1333	0,0518	-0,1319	0,0760	0,1271	-0,1415	0,8734	0,9460	0,8006	0,7267	0,6643
APC 7x5SF	0,178	0,1351	0,0080	-0,1391	0,0670	0,0963	-0,1420	0,7949	0,7632	0,6384	0,5764	0,5247
APC 7x4SF	0,178	0,1306	-0,0347	-0,1393	0,0580	0,0656	-0,1385	0,7596	0,6396	0,5339	0,4815	0,4380
APC 7x38WSF	0,178	0,1764	-0,1045	-0,1275	0,0869	0,0401	-0,1503	0,7194	0,6306	0,5276	0,4766	0,4342
APC 8x6SF	0,203	0,1591	0,0092	-0,1452	0,0845	0,1129	-0,1617	0,8289	0,8373	0,7065	0,6400	0,5840
APC 8x47SF	0,203	0,1550	-0,0532	-0,1398	0,0743	0,0639	-0,1487	0,7531	0,6641	0,5556	0,5018	0,4570
APC 8x38SF	0,203	0,1424	-0,0811	-0,1393	0,0621	0,0457	-0,1454	0,7094	0,5685	0,4738	0,4272	0,3886
APC 9x75SF	0,229	0,1576	0,0412	-0,1519	0,0861	0,1444	-0,1732	0,8514	0,9114	0,7716	0,6998	0,6391
APC 9x6SF	0,229	0,1590	-0,0210	-0,1431	0,0801	0,0882	-0,1546	0,7939	0,7502	0,6297	0,5693	0,5187
APC 9x47SF	0,229	0,1498	-0,0773	-0,1302	0,0674	0,0493	-0,1399	0,7280	0,6065	0,5048	0,4548	0,4135
APC 9x38SF	0,229	0,1355	-0,0972	-0,1286	0,0569	0,0337	-0,1337	0,6820	0,5247	0,4352	0,3917	0,3560
APC 10x75SF	0,254	0,1597	-0,0095	-0,1459	0,0824	0,0966	-0,1581	0,8049	0,7785	0,6549	0,5926	0,5404
APC 10x47SF	0,254	0,1433	-0,0975	-0,1116	0,0622	0,0352	-0,1243	0,7006	0,5650	0,4672	0,4199	0,3812
APC 10x38SF	0,254	0,1285	-0,1059	-0,1157	0,0531	0,0248	-0,1211	0,6618	0,4989	0,4124	0,3708	0,3367
APC 11x7SF	0,279	0,1586	-0,0355	-0,1410	0,0788	0,0761	-0,1510	0,7803	0,7166	0,6010	0,5433	0,4951
APC 11x47SF	0,279	0,1369	-0,1050	-0,1121	0,0575	0,0299	-0,1230	0,6798	0,5286	0,4365	0,3922	0,3559
APC 11x38SF	0,279	0,1223	-0,1159	-0,1096	0,0490	0,0151	-0,1113	0,6506	0,4674	0,3861	0,3472	0,3155
APC 12x8SF	0,305	0,1612	-0,0357	-0,1264	0,0862	0,0609	-0,1098	0,6945	0,6770	0,5549	0,4981	0,4520
APC 12x6SF	0,305	0,1495	-0,1084	-0,0847	0,0691	0,0168	-0,0966	0,7292	0,6006	0,4969	0,4472	0,4065
APC 12x47SF	0,305	0,1306	-0,1042	-0,1236	0,0540	0,0238	-0,1226	0,6752	0,5010	0,4153	0,3740	0,3400
APC 13x47SF	0,330	0,1258	-0,1066	-0,1286	0,0511	0,0181	-0,1204	0,6740	0,4807	0,3996	0,3603	0,3280
APC 14x47SF	0,356	0,1197	-0,1094	-0,1299	0,0471	0,0164	-0,1184	0,6516	0,4526	0,3751	0,3379	0,3073

КПД пропеллера вычисляется [4, 5] по формуле

$$\eta = \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)} \lambda. \tag{4}$$

Построены зависимости КПД от коэффициента скорости для пропеллеров APC MR (рис. 2). Определены значения максимального КПД пропеллеров и значения величины  $\lambda_{\text{опт}}$ , при которой достигается такой КПД (см. табл. 1 и 2).

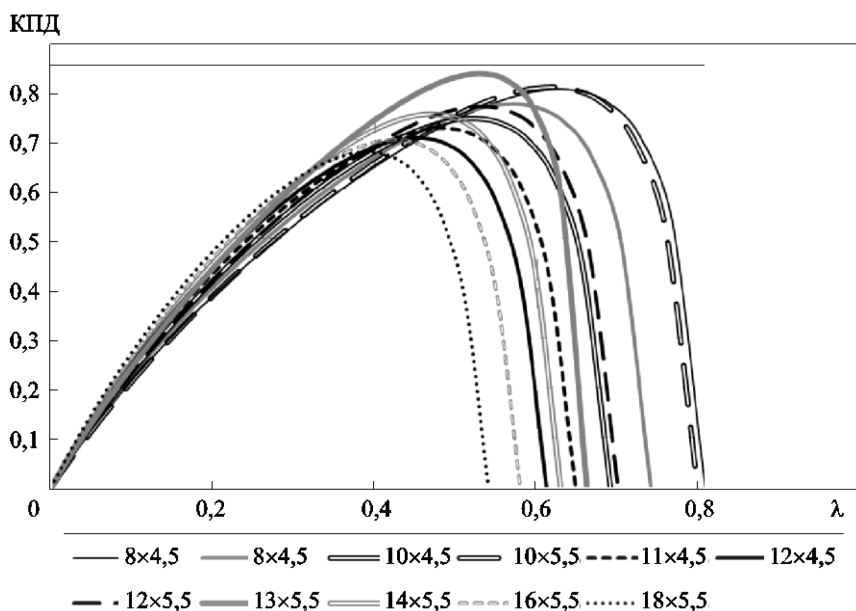


Рис. 2. Зависимость КПД пропеллеров APC MR от коэффициента скорости

Если считать КПД двигателя постоянным, то минимальный расход энергии в расчете на 1 м подъема (удельный расход энергии) достигается, если пропеллер работает с наибольшим КПД, т. е. при фиксированном для данного пропеллера значении  $\lambda = \lambda_{\text{опт}}$ . Величина  $\lambda_{\text{опт}}$  не зависит от нагрузки (веса летательного аппарата и силы лобового сопротивления) и плотности воздуха. Расход энергии при подъеме на заданную высоту минимален тогда, когда в любой момент подъема работа пропеллера оценивается максимальным КПД (при допущении, что КПД мотора — постоянная величина).

Удельный расход энергии имеет размерность джоуль на метр (Дж/м) или ньютон (Н). Если не учитывать силу лобового сопротивления и КПД двигателя, минимальный удельный расход энергии при подъеме составит  $G/\eta_{\text{max}}$  (Н), где  $G$  — вес летательного аппарата.

**Частота вращения пропеллера при оптимальном подъеме.** Частота вращения пропеллеров мультикоптера при подъеме определяется значением тяги, которую должны создать пропеллеры. В дальнейших расчетах не будем учитывать силы инерции, поскольку ускорения (замедления) при подъеме в режиме 100 % газа (максимальном сигнале управления) малы и, по расчетам, не превышают 0,5 % ускорения свободного падения (если не принимать во внимание короткий момент старта и набора скорости). Не будут также учитываться потери от обдува частей летательного аппарата потоком воздуха от воздушных винтов. Площадь лучей мультикоптера, попадающих под создаваемый винтами поток, как правило, невелика.

Тяга пропеллера вычисляется [4] по формуле

$$T = \alpha(\lambda)\rho n^2 D^4, \quad (5)$$

где  $\rho$  — плотность воздуха.

При равномерном полете (силами инерции, а значит, и ускорением, пренебрегаем) вертикально вверх тяга пропеллеров должна уравнивать вес летательного аппарата ( $G$ ) и силу лобового сопротивления  $F_y$ :

$$zT = G + F_y, \quad (6)$$

где

$$F_y = \rho C_y S \frac{V^2}{2}. \quad (7)$$

Здесь  $z$  — количество пропеллеров мультикоптера (соосная схема, в которой пропеллеры работают в неравных условиях, здесь не рассматривается);  $C_y$  — коэффициент лобового сопротивления при полете вверх (обычно так обозначают коэффициент подъемной силы крыла, но поскольку крыльев у мультикоптера нет, а речь идет о вертикальном полете (по оси  $y$ ), такое обозначение здесь, полагаю, оправданно);  $S$  — характерная площадь.

В расчетах можно использовать площадь мультикоптера в плане (без учета пропеллеров) и соответствующий коэффициент  $C_y$  или площадь и коэффициент  $C_y$  эквивалентной по сопротивлению пластины. Примем второй подход, рассматривая эквивалентную круглую плоскую пластину, для которой  $C_y = 1,16$  [6].

Подставим в выражение для силы лобового сопротивления (7) величину  $V$  из формулы (3):

$$F_y = \rho C_y S \frac{n^2 D^2 \lambda^2}{2}. \quad (8)$$

Подставляя в уравнение равновесия (6) выражения для тяги (5) и силы лобового сопротивления (8), получаем соотношение, которое позволяет определить частоту вращения пропеллеров:

$$z\alpha(\lambda)\rho n^2 D^4 = G + \rho C_y S \frac{n^2 D^2 \lambda^2}{2}. \quad (9)$$

Из формулы (9) частота вращения пропеллеров  $n$  выражается так:

$$n = \sqrt{\frac{G}{z\rho D^4 \left[ \alpha(\lambda) - \frac{C_y S}{2zD^2} \lambda^2 \right]}}. \quad (10)$$

Обозначим коэффициент сопротивления  $R_y$ , который определяется по формуле

$$R_y = \frac{C_y S}{2zD^2}. \quad (11)$$

Этот безразмерный коэффициент характеризует аэродинамическое сопротивление летательного аппарата при полете вверх и пропорционален отношению площади эквивалентной пластины к площади, ометаемой пропеллерами мультикоптера. При сохранении геометрического подобия конструкции мультикоптера  $R_y$  изменяется незначительно и не зависит явно от абсолютных размеров летательного аппарата. Это удобно в теоретических исследованиях и проектных расчетах. Если иметь в виду круглую эквивалентную пластину, можно вычислять коэффициент по формуле

$$R_y = \frac{\pi C_y}{8z} \left( \frac{D_{\text{пл}}}{D} \right)^2, \quad (12)$$

где  $D_{\text{пл}}$  — диаметр эквивалентной круглой пластины.

С учетом формулы (11) выражение для вычисления частоты вращения пропеллеров можно записать так:

$$n = \sqrt{\frac{G}{z\rho D^4 [\alpha(\lambda) - R_y \lambda^2]}}. \quad (13)$$

Для того чтобы определить частоту вращения для оптимального подъема, нужно подставить в формулу (13) значение  $\lambda = \lambda_{\text{опт}}$  и  $\alpha(\lambda_{\text{опт}})$  из табл. 1, 2.

Как видно из выражения, частота становится больше с увеличением веса и лобового сопротивления. Если лобовое сопротивление слишком велико, необходимую частоту нельзя достигнуть. Предельное значение коэффициента  $R_y$  может быть определено из условия обращения в ноль знаменателя в формуле (13):

$$R_y < \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^2}. \quad (14)$$

Для круглой пластины должно выполняться соотношение

$$\frac{D_{\text{пл}}}{D} < \sqrt{\frac{8z\alpha(\lambda)}{\pi C_y \lambda^2}}. \quad (15)$$

Для квадрокоптера ( $z = 4$ ) с пропеллерами APC 12×45MR при  $\lambda = \lambda_{\text{опт}}$  получается, что  $\frac{D_{\text{пл}}}{D} < 1,22$ . При  $\frac{D_{\text{пл}}}{D} = 0,5$  коэффициент  $R_y = 0,028$ .

**Оптимальная скорость подъема.** Зная частоту  $n$  и значение  $\lambda$ , скорость подъема можно найти из формулы (3):

$$V = \lambda n D. \quad (16)$$

С учетом выражения (13) определим, что

$$V = \lambda \sqrt{\frac{G}{z D^2 \rho [\alpha(\lambda) - R_y \lambda^2]}}. \quad (17)$$

Выражение  $\frac{G}{z D^2}$  пропорционально нагрузке на ометаемую пропеллерами мультикоптера площадь (нагрузке на диск). Как следует из формулы (17), оптимальная скорость вертикального подъема пропорциональна квадратному корню из нагрузки на ометаемую площадь.

Для примера вычислим оптимальную скорость подъема у поверхности Земли ( $\rho = 1,226 \text{ кг/м}^3$ ) для квадрокоптера с пропеллерами APC 12×45MR ( $D = 0,305 \text{ м}$ ,  $\lambda_{\text{опт}} = 0,4517$ ;  $\alpha(\lambda_{\text{опт}}) = 0,03487$ ) полетной массой 2,7 кг (вес 26,5 Н) и коэффициентом сопротивления  $R_y = 0,028$  [7]:

$$V = 0,4517 \sqrt{\frac{26,5}{4 \cdot 0,305^2 \cdot 1,226 \cdot (0,03487 - 0,028 \cdot 0,4517^2)}} = 20,2 \text{ м/с}.$$

Увы, максимальная расчетная скороподъемность этого квадрокоптера у поверхности Земли составляет только около 11 м/с [8]. Разумной стратегией в такой ситуации является подъем с максимально возможной скоростью.

**Зависимость оптимальной скорости от высоты.** Плотность воздуха уменьшается с высотой. Как следует из формул (13) и (14), по мере подъема при уменьшении плотности воздуха частота вращения винтов и скорость подъема должны увеличиваться, чтобы подъем происходил в режиме максимального КПД пропеллеров. В общем случае такая задача невыполнима хотя бы потому, что по мере приближения к потолку висения скорость подъема стремится к нулю.

На небольших высотах (до 1000 м), на которых, как правило, и используются мультикоптеры, увеличение скорости по мере подъема возможно при условии, что летательный аппарат обладает достаточным запасом тяги. Однако и в этом случае нет необходимости проек-

тировать мультикоптер в расчете на возможность увеличения скорости в ходе подъема. Пример расчета скороподъемности [8] показывает, что пропеллеры APC 12×45MR квадрокоптера, начинающего взлет в оптимальном режиме (расчетный КПД равен 0,702), при полете в режиме постоянного газа на высоте 1000 м работают с КПД, равным 0,698. Таким образом, можно считать, что в случае, если у поверхности Земли обеспечивается оптимальная скорость подъема, его можно продолжать при постоянном (максимальном) газе, практически без потери энергоэффективности.

**Квазиоптимальный подъем.** Для достижения оптимального режима подъема требуется достаточно высокая скорость, которую можно достичь, если летательный аппарат обладает большим запасом тяги. Проектирование летательного аппарата с большим запасом тяги может быть невыгодно: увеличиваются необходимая мощность и вес моторов, что, в свою очередь, требует увеличения прочности конструкции, а значит, веса рамы и т. д.

Разумным компромиссом может быть подъем со значением коэффициента скорости  $\lambda$  несколько меньше оптимального. Поскольку в окрестности максимума значение КПД пропеллера малочувствительно к небольшим изменениям  $\lambda$  (см. рис. 2), можно рассчитывать, что при заметном уменьшении коэффициента скорости КПД снизится не столь существенно.

Определены значения коэффициента скорости, которые дают 85, 90 и 95 % максимального КПД (см. табл. 2). Пользуясь этими данными, вычислим скорость подъема, обеспечивающую 90 % максимального КПД для квадрокоптера, параметры которого использованы в примере выше:

$$V_{90} = 0,3374 \sqrt{\frac{26,5}{4 \cdot 0,305^2 \cdot 1,226 \cdot (0,05611 - 0,028 \cdot 0,3374^2)}} = 11,2 \text{ м/с.}$$

Полученное значение сопоставимо с расчетной скороподъемностью этого летательного аппарата у поверхности земли.

**Расчетный запас тяги.** Достижение оптимального (или квазиоптимального) коэффициента скорости при подъеме может служить одним из критериев при проектировании многороторного летательного аппарата. Важнейшим параметром, определяющим скоростные и динамические характеристики мультикоптера, является запас тяги (тяговооруженность) — отношение максимальной тяги к весу мультикоптера у поверхности Земли:

$$k_T = \frac{zT_{100}}{G}, \quad (18)$$



где  $k_T$  — коэффициент запаса тяги (тяговооруженность);  $T_{100}$  — тяга одного пропеллера при работе на месте у поверхности Земли при 100 % газа.

Определим тяговооруженность, которая обеспечит заданный коэффициент скорости при подъеме у поверхности Земли. Механическая характеристика бесколлекторного (вентильного) электромотора (зависимость частоты вращения от крутящего момента) может быть выражена [8] формулой

$$n = n_0 - \frac{n_0 - n_{100}}{M_{100}} M, \quad (19)$$

где  $n_0$  — частота холостого хода электромотора;  $M$  — крутящий момент на валу двигателя;  $M_{100}$  — крутящий момент при замере тяговооруженности (работа винтомоторной группы на месте при 100 % газа);  $n_{100}$  — частота при замере тяговооруженности.

Учитывая связь крутящего момента и тяги пропеллера  $T$ , уравнение (19) можно [8] переписать:

$$n = n_0 - \frac{(n_0 - n_{100})\alpha_0\beta}{k_T G \alpha \beta_0} Tz, \quad (20)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты тяги и мощности для заданного значения  $\lambda$ , например, для  $\lambda = \lambda_{\text{опт}}$ .

Обозначим коэффициент, определяющий жесткость характеристики двигателя:

$$\eta_{100} = \frac{n_{100}}{n_0}, \quad \eta_{100} \leq 1. \quad (21)$$

Тяга, создаваемая пропеллерами при полете вертикально вверх, выражается формулами (6) и (8). Величина  $n_{100}$  может быть найдена из выражения (5) при  $T = k_T G$  и  $\alpha = \alpha_0$ :

$$n_{100} = \sqrt{\frac{k_T G}{\rho \alpha_0 D^4 z}}. \quad (22)$$

Значение  $n$  определяется по формуле (13). Делая соответствующие подстановки в формулу (20) и выполняя преобразования, получаем

$$\sqrt{k_T} \eta_{100} \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha - R_y \lambda^2}} = k_T - (1 - \eta_{100}) \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\alpha_0}{\alpha - R_y \lambda^2}. \quad (23)$$

Решаем квадратное уравнение (23) относительно  $\sqrt{k_T}$ :

$$k_T = \frac{\alpha_0}{4(\alpha - R_y \lambda^2)} \left[ \eta_{100} + \sqrt{\eta_{100}^2 + 4 \frac{\beta}{\beta_0} (1 - \eta_{100})} \right]^2. \quad (24)$$

Можно отметить, что увеличение лобового сопротивления и уменьшение жесткости механической характеристики двигателя увеличивают значение тяговооруженности, необходимое для оптимального (или квазиоптимального) подъема. Рассмотрим частные случаи. Для двигателя с идеально жесткой характеристикой  $\eta_{100} = 1$  по формуле (24) получаем

$$k_T = \frac{\alpha_0}{\alpha - R_y \lambda^2}. \quad (25)$$

Если при этом не учитывать лобовое сопротивление, формулу можно еще упростить:

$$k_T = \frac{\alpha_0}{\alpha}. \quad (26)$$

**Пример расчета необходимой тяговооруженности.** Расчет выполним для квадрокоптера с пропеллерами APC 12×45MR ( $D = 0,305$  м,  $\alpha_0 = 0,1006$ ;  $\beta_0 = 0,0351$ ;  $\lambda_{\text{опт}} = 0,4517$ ;  $\alpha(\lambda_{\text{опт}}) = 0,03487$ ;  $\beta(\lambda_{\text{опт}}) = 0,02244$ ;  $\lambda_{90} = 0,3374$ ;  $\alpha(\lambda_{90}) = 0,05611$ ;  $\beta(\lambda_{90}) = 0,02997$ ) и коэффициентом сопротивления  $R_y = 0,028$ . Коэффициент жесткости характеристики двигателя  $\eta_{100} = 0,65$ .

По формуле (24) для значения  $\lambda_{\text{опт}}$  получаем  $k_T = 2,79$ , что скорее превышает обычные для аппаратов такого класса значения, но дает КПД пропеллера в значении 0,70. Для квазиоптимального подъема при 90 % максимального КПД (в данном случае это 0,63) расчет дает  $k_T = 1,76$ , что примерно соответствует фактической тяговооруженности летательного аппарата, данные которого использованы в примере.

**Влияние КПД двигателя.** В приведенных выше материалах не учитывалось, что удельный расход энергии при вертикальном подъеме определяется не только КПД пропеллера, но и КПД двигателя.

При средних и больших нагрузках КПД бесколлекторного (вентильного) двигателя можно приближенно оценить отношением  $n/n_0$ , где  $n$  — частота вращения под нагрузкой;  $n_0$  — частота холостого хода при том же управляющем сигнале (среднем напряжении питания) [9]. Такая оценка вполне приемлема, поскольку моторы мультикоптера работают со значительной нагрузкой, обеспечивая тягу несущих винтов не меньше веса летательного аппарата. Фактический КПД будет несколько меньше этой оценки. Используемая выше величина  $\eta_{100}$  приближенно равна КПД мотора мультикоптера в случае работы пропеллера на месте при 100 % газа у поверхности Земли.

Механические характеристики (зависимость частоты вращения от крутящего момента) двигателя при 100 % газа и при меньшем управляющем сигнале (среднем напряжении), которые иллюстрирует рис. 3, представляют собой прямые, имеющие одинаковый наклон [9].

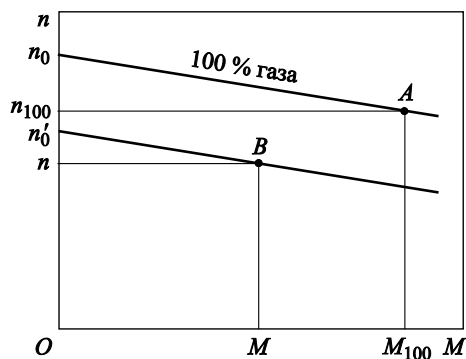


Рис. 3. Схема для расчета КПД мотора

Точка *A* (см. рис. 3) соответствует работе винтомоторной группы на месте при 100 % газа (режим измерения тяговооруженности), точка *B* — текущему режиму работы, который характеризуется крутящим моментом *M* и частотой вращения *n* и для которого нужно определить КПД.

Эластичность механической характеристики *e* (тангенс угла наклона линии механической характеристики к оси абсцисс) выражается таким образом:

$$e = \frac{n_0 - n_{100}}{M_{100}}, \quad (27)$$

а КПД мотора  $\eta_M$  (в точке *B* на рис. 3) можно вычислить по формуле

$$\eta_M = \frac{n}{n'_0} = \frac{n}{n + eM}. \quad (28)$$

Подставляя равенство (27) в выражение (28), учитывая соотношение (21) и выполняя преобразования, получаем

$$\eta_M = \frac{1}{1 + \frac{(1 - \eta_{100}) n_{100} M}{\eta_{100} n M_{100}}}. \quad (29)$$

Зависимость частоты *n* от коэффициента скорости  $\lambda$  выражается формулой (13). Частота  $n_{100}$  может быть найдена из равенства (22). Крутящий момент *M*, создаваемый пропеллером, определяется так:

$$M = \frac{1}{2\pi} \rho \beta(\lambda) n^2 D^5. \quad (30)$$

Формулу (30) можно непосредственно использовать для вычисления величины  $M$  из выражения (29). Для вычисления  $M_{100}$  необходимо подставить  $\beta(\lambda) = \beta_0$  и  $n = n_{100}$  в формулу (30):

$$M_{100} = \frac{1}{2\pi} \rho \beta_0 n_{100}^2 D^5. \quad (31)$$

Подставив выражения для  $M$ ,  $n$ ,  $M_{100}$ ,  $n_{100}$  в формулу (29) и выполнив элементарные преобразования, получим зависимость КПД мотора от коэффициента скорости  $\lambda$ :

$$\eta_M = \frac{\eta_{100} \beta_0}{\eta_{100} \beta_0 + (1 - \eta_{100}) \beta(\lambda) \sqrt{\frac{\alpha_0}{k_T [\alpha(\lambda) - R_y \lambda^2]}}}. \quad (32)$$

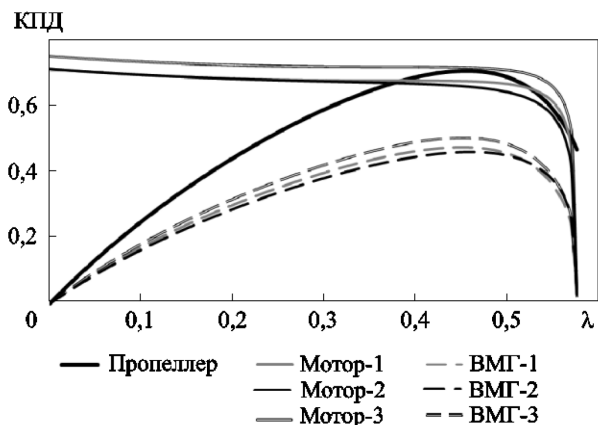
Перемножив КПД пропеллера и КПД мотора, получим КПД винтомоторной группы (ВМГ):

$$\eta_{\text{ВМГ}} = \frac{\lambda \alpha(\lambda) \eta_{100} \beta_0}{\beta(\lambda) \left[ \eta_{100} \beta_0 + (1 - \eta_{100}) \beta(\lambda) \sqrt{\frac{\alpha_0}{k_T (\alpha(\lambda) - R_y \lambda^2)}} \right]}. \quad (33)$$

Значение  $\lambda$ , при котором достигается максимум функции (33), можно определить численным методом, как численно найдены значения  $\lambda_{\text{опт}}$ , приведенные в табл. 1, 2. Однако это значение, в отличие от  $\lambda_{\text{опт}}$  для пропеллера, зависит от тяговооруженности, жесткости механической характеристики мотора и лобового сопротивления. Поэтому делать такие расчеты заранее и табулировать их нерационально.

Вместе с тем оказывается, что вычисляемый по формуле (32) КПД мотора незначительно изменяется в интересующем нас диапазоне значений  $\lambda$  при обычном сочетании параметров мультикоптера. Зависимости КПД пропеллера APC 12×45MR, КПД электромотора ( $\eta_{100} = 0,65$ ) при трех вариантах параметров, а также КПД соответствующих ВМГ представлены на рис. 4.

Как видно, значение  $\lambda$ , соответствующее максимуму КПД винтомоторной группы, незначительно отличается от  $\lambda_{\text{опт}}$  пропеллера. Еще меньше отличие от своего максимального значения в величине КПД винтомоторной группы при  $\lambda = \lambda_{\text{опт}}$ . Это позволяет использовать значения  $\lambda$  из табл. 1 и 2 для расчета оптимального и квазиоптимального вертикального подъема. При этом погрешность таких расчетов, в ко-



**Рис. 4.** КПД винтомоторной группы:

Мотор-1, ВМГ-1:  $k_T = 1,7$ ;  $R_y = 0,028$ ;

Мотор-2, ВМГ-2:  $k_T = 1,7$ ;  $R_y = 0,055$ ;

Мотор-3, ВМГ-3:  $k_T = 2,5$ ;  $R_y = 0,028$

торых не учитывается КПД мотора, будет незначительна. Разумеется, само значение КПД винтомоторной группы с учетом КПД мотора будет ниже КПД пропеллера. Если, например, КПД винтомоторной группы составляет 50 %, то удельный расход энергии будет равен  $2G$  Дж/м (или ньютон).

**КПД мотора при висении.** Формулу (32) можно использовать для оценки КПД мотора при зависании мультикоптера у поверхности земли. Такой режим является одним из основных для летательного аппарата рассматриваемого класса. Подставив в выражение (32) значение  $\lambda = 0$ , получаем

$$\eta_M^{\text{вис}} = \frac{\sqrt{k_T} \eta_{100}}{\eta_{100} (\sqrt{k_T} - 1) + 1}. \quad (34)$$

Формула (34) дает оценку сверху КПД мотора при висении, она применима для значений коэффициента запаса тяги  $k_T$  от 1 до примерно 2,5, что соответствует значениям тяговооруженности реальных летательных аппаратов.

**Заключение.** Скорость вертикального подъема, обеспечивающая минимальный расход энергии аккумуляторной батареи для подъема на заданную высоту, обратно пропорциональна квадратному корню из нагрузки на ометаемую площадь и увеличивается с усилением лобового сопротивления. Зависимостью от плотности воздуха на высотах, не превышающих 1000 м, можно пренебречь. Необходимая для достижения заданной оптимальной скорости тяговооруженность зависит от аэродинамических характеристик пропеллеров, жесткости механической характеристики двигателя и коэффициента лобового

сопротивления. В случае, если достижение тяговооруженности, необходимой для оптимального подъема, невозможно или нерационально, в расчетах можно использовать коэффициент скорости, при котором КПД пропеллера снижается незначительно, а необходимые скорость подъема и тяговооруженность заметно уменьшаются.

Изменение КПД двигателя в зависимости от коэффициента скорости незначительно влияет на параметры оптимального и квази-оптимального режима подъема, что позволяет использовать для расчета оптимального подъема в первом приближении только характеристики пропеллера.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Landing Products Inc. *APC Propeller Performance Data*. URL: <http://www.apcprop.com/Articles.asp?ID=270>
- [2] Brandt J.B. and Selig M.S., Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers. 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting. *AIAA Paper* 2011–1255, Orlando, FL, January 2011. URL: <http://m-selig.ae.illinois.edu/pubs/BrandtSelig-2011-AIAA-2011-1255-LRN-Propellers.pdf>
- [3] Brandt J.B., Deters R.W., Ananda G.K. and Selig M.S. *UIUC Propeller Database, University of Illinois at Urbana-Champaign*, URL: <http://m-selig.ae.illinois.edu/props/propDB.html>
- [4] Прицкер Д.М., Сахаров Г.И. *Аэродинамика*. Москва, Машиностроение, 1968, 310 с.
- [5] Обуховский А.Д. *Аэродинамика воздушного винта*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2009, 80 с.
- [6] *Справочник авиаконструктора. Т. 1. Аэродинамика самолета*. Москва, Издательство ЦАГИ, 1937, 512 с.
- [7] Свердлов С.З. *Квадролёт*. URL: <http://forum.rcdesign.ru/blogs/174358/blog18011.html>
- [8] Свердлов С.З. Скороподъемность электрического мультикоптера. *Мехатроника. Автоматизация. Управление*, 2016, т. 17, № 6, с. 425–432.
- [9] Овчинников И.Е. *Вентильные электрические двигатели и привод на их основе (малая и средняя мощность)*. Санкт-Петербург, Корона. Век, 2006. 336 с.

Статья поступила в редакцию 24.05.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Свердлов С.З. Оптимальный вертикальный подъем электрического мультикоптера. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 11. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-11-1551>

**Свердлов Сергей Залманович** — канд. техн. наук, профессор кафедры прикладной математики Вологодского государственного университета. Область деятельности и научные интересы: информационные технологии, цифровая фотография и обработка изображений, беспилотные вертолеты. e-mail: [c3c@uni-vologda.ac.ru](mailto:c3c@uni-vologda.ac.ru)

## Optimum vertical ascent of an electric multicopter

© S.Z. Sverdlov

Vologda State University, Vologda, 160000, Russia

*We consider the problem of a vertical climb that minimises battery power consumption. We obtained equations for the velocities of optimum and quasi-optimum ascent along with an equation for computing aircraft thrust-to-weight ratio that ensures optimum ascent. We studied the effect that varying the electric motor energy conversion efficiency had on optimum ascent computations. We derived an equation for estimating the electric motor energy conversion efficiency in aircraft hover mode. The article presents propeller aerodynamic parameters required for determining the optimum ascent.*

**Keywords:** multi-rotor unmanned electric helicopter, multicopter, optimum vertical ascent, energy conversion efficiency, specific power consumption, thrust-to-weight ratio, aircraft power plant, brushless electric motor.

### REFERENCES

- [1] Landing Products Inc. *APC Propeller Performance Data*. Available at: <http://www.apcprop.com/Articles.asp?ID=270>
- [2] Brandt J.B., Selig M.S. *Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers. 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Orlando, 2011.
- [3] Brandt J.B., Deters R.W., Ananda G.K., Selig M.S. *UIUC Propeller Database, University of Illinois at Urbana-Champaign*. Available at: <http://m-selig.ae.illinois.edu/props/propDB.html>
- [4] Pritsker D.M., Sakharov G.I. *Aerodinamika [Aerodynamics]*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968.
- [5] Obukhovskiy A.D. *Aerodinamika vozdushnogo vinta [Propeller aerodynamics]*. Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University Publ., 2009, 80 p.
- [6] *Spravochnik aviakonstruktora [Aircraft designer handbook]. Vol. 1: Aerodinamika samoleta [Airplane aerodynamics]*. Moscow, TsAGI (Central Aerohydrodynamic Institute) Publ., 1937, 512 p.
- [7] Sverdlov S. *Kvadrolet [Quadcopter]*. Available at: <http://forum.rcdesign.ru/blogs/174358/blog18011.html>
- [8] Sverdlov S.Z. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie — Mechatronics, Automation, Control*, 2016, vol. 17, no. 6, pp. 425–432.
- [9] Ovchinnikov I.E. *Ventilnye elektricheskie dvigateli i privod na ikh osnove (malaya i srednyaya moshchnost) [AC converter-fed motors and drives based on them (low and medium power)]*. Saint Petersburg, Korona-Vek Publ., 2006, 336 p.

**Sverdlov S.Z.**, Cand. Sci. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics, Vologda State University. Specializes in information technology, digital photography and image processing, unmanned helicopters. e-mail: [c3c@uni-vologda.ac.ru](mailto:c3c@uni-vologda.ac.ru)