

Моделирование ударно-волновых процессов в элементах многослойных конструкций с учетом начального внутреннего давления

© Т.А. Бутина, В.М. Дубровин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод расчета напряженно-деформированного состояния в элементах многослойных конструкций, подверженных воздействию внешнего импульсного напряжения, при наличии статического внутреннего давления. Разработанный метод позволяет рассматривать упругопластическое поведение материалов. Для описания связи между девиаторными составляющими напряжения и деформаций использованы соотношения теории пластичности Прандтля — Рейнольдса, среднее напряжение определено по уравнению Ми — Грюнайзена. В расчетах учтены изменение температурного поля, возможность возникновения трещин, отколов в процессе образования волн напряжений. Начальное напряженно-деформированное состояние, вызванное начальным внутренним давлением, рассчитано методом обнуления скоростей. Проведенные расчеты позволили оценить влияние начального напряженно-деформированного состояния на переход материала конструкции в пластическую стадию при воздействии кратковременной динамической нагрузки. На примере трехмерной цилиндрической оболочки расчеты показали, что совместное воздействие внутреннего давления, динамических нагрузок, изменение механических характеристик материалов оказывают существенное влияние на характер волновых процессов.

Ключевые слова: *напряженно-деформированное состояние, внутреннее давление, динамическая нагрузка, предел текучести, упругопластические материалы, ударно-волновые процессы.*

Введение. При расчете на прочность конструкций, находящихся под воздействием кратковременных динамических нагрузок на волновой стадии деформирования, возникает необходимость учитывать нелинейные свойства материалов.

Сложность процессов распространения волн напряжений в средах с нелинейными свойствами исключает использование аналитических методов расчета, требуются соответствующие численные методы для адекватного описания разработки. Различные неметаллические конструкционные материалы, как правило, не обладают пластическими свойствами. Применение линейно-упругих моделей при расчете конструкций из таких материалов не позволяет учитывать эффект затухания волн напряжений, что может привести к занижению характеристик прочности конструкции.

Кроме интенсивных динамических нагрузок на конструкции могут воздействовать различные эксплуатационные нагрузки, например внутреннее давление. Для исследования эффекта совместного действия таких статических эксплуатационных и динамических нагрузок необходимо разработать соответствующие расчетные модели.

Математическая модель процесса распространения упруго-пластических волн напряжений в элементах конструкций с учетом начального внутреннего давления. Конструкции, подвергаемые импульсному динамическому нагружению, обычно имеют начальное напряженно-деформированное состояние (НДС), обусловленное эксплуатационными нагрузками различного характера, например внутренним давлением [1, 2]. При воздействии динамических начальное состояние можно не учитывать либо при пренебрежимо низком уровне статических нагрузок по сравнению с динамическими, либо в случае линейно-упругого поведения материала конструкции, когда справедлив принцип суперпозиции. При нелинейно-упругом или упругопластическом поведении материалов необходимо учитывать начальное НДС [3].

Предлагается метод расчета, в котором начальное статическое НДС многослойной цилиндрической оболочки под внутренним давлением определяется по той же динамической схеме, что и при расчете на основную нагрузку (осесимметричное внешнее динамическое давление и практически мгновенное энерговыделение по толщине материала конструкции) [4].

Основные особенности расчетной схемы заключаются в следующем. Определяющая система уравнений включает в себя уравнения сохранения масс (уравнение неразрывности), сохранения импульса (уравнение движения), сохранения энергии и состояния, дающее связь напряженного и деформированного состояния материалов [5]. При принятом конечно-элементном подходе [6, 7] с использованием переменных Лагранжа уравнение сохранения масс удовлетворяется автоматически, уравнение движения преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для узловых масс, движущихся в радиальном направлении под действием внешних и внутренних узловых сил [8].

При расчете используется инкрементальная процедура, в соответствии с которой на каждом шаге по времени по приращениям узлов определяется изменение деформированного состояния каждого элемента и затем с использованием уравнений состояния — новые компоненты напряженного состояния в них, которые преобразуются в новые эквивалентные узловые силы [9]. Уравнения состояния, определяющие связь между напряжениями и деформациями (или их приращениями), задаются отдельно для девиаторных и объемных

составляющих [10]. Для описания связи между девиаторными составляющими напряжений и деформаций используются соотношения теории пластичности типа Прандтля — Рейса, переход в пластическую область определяется условием текучести Мизеса [11]. Среднее напряжение (давление) определяется по уравнению Ми — Грюнайзена как сумма упругой составляющей давления P_y , являющейся заданной функцией объемного сжатия, и теплового давления P_t , которое определяется необратимой частью внутренней энергии в элементе [12]. При этом учитывается возможность возникновения трещин и отколов в процессе образования волн растяжений [13]. Расчет начального НДС от внутреннего давления проводили с использованием метода обнуления скоростей [14].

Система основных разрешающих уравнений имеет следующий вид:

уравнение движения

$$\frac{\rho_0}{V} \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial r}(P - S_r) + \frac{(S_r - S_\Theta)}{r}, \quad (1)$$

где ρ_0 — начальная плотность вещества; V — удельный объем; u — массовая скорость; S_r , S_Θ — сдвиговые напряжения; P — среднее напряжение;

уравнение неразрывности

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r}, \quad (2)$$

уравнение энергии с учетом теплопроводности

$$\dot{E} = P\dot{V} - V(S_r\dot{\epsilon}_r + S_\Theta\dot{\epsilon}_\Theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\chi \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (3)$$

где χ — коэффициент теплопроводности; T — температура; \dot{E} — полная энергия.

Выражения для радиальной ϵ_r и тангенциальной ϵ_Θ деформаций имеют вид

$$\epsilon_r = \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e}{\partial r} \right)^2; \quad \epsilon_\Theta = \frac{e}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{r} \right)^2. \quad (4)$$

Связь девиаторов напряжений и деформаций осуществляется с помощью закона Гука, записанного в дифференциальной форме. Характер деформирования устанавливается выбором соответствующего ограничения на девиатор напряжений [4, 6].

В качестве уравнения состояния рассматривалось уравнение состояния Ми — Грюнайзена

$$P = P_y + \gamma_0(E - E_y), \quad (5)$$

где P_y, E_y — упругие составляющие давления и энергии.

Результаты расчетов. Расчеты проводили на примере трехслойной цилиндрической оболочки, основные характеристики которой приведены в таблице. Внешний радиус оболочки 120 см.

Основные характеристики трехслойной цилиндрической оболочки

Номер слоя	Толщина h , см	Плотность ρ , г/см ³	Объемный модуль K , Па	Модуль сдвига G , Па
1	1,2	1,35	$3,7 \cdot 10^9$	$1,7 \cdot 10^8$
2	0,18	1,08	$2,4 \cdot 10^9$	$2,5 \cdot 10^8$
3	1,2	1,8	$5,2 \cdot 10^9$	$5,4 \cdot 10^8$

Второй и третий слои принимали линейно-упругими, для материала первого слоя задавались различные значения предела текучести, начиная от $\sigma_s = 120 \cdot 10^5$ Па и выше. Внутреннее давление p_0 принимали равным $10 \cdot 10^5$, $20 \cdot 10^5$ и $40 \cdot 10^5$ Па. Полученные расчетным путем значения тангенциальных статических напряжений $\sigma_\theta^{\text{ст}}$ в первом слое при чисто упругом поведении материала составили $710 \cdot 10^5$, $1420 \cdot 10^5$ и $2840 \cdot 10^5$ Па соответственно. Поскольку радиальные статические напряжения $\sigma_r^{\text{ст}}$ на два порядка меньше, переход в пластическую область при статическом нагружении определяется значением $\sigma_\theta^{\text{ст}}$.

В условиях плоской деформации (осевая деформация $\epsilon_t = 0$)

$$\sigma_\theta^{\text{ст}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{1 - \gamma - \gamma^2}} \approx 1,125\sigma_s \text{ при } \gamma = 0,3. \quad (6)$$

При действии динамической нагрузки на начальной стадии волнового процесса преобладающими становятся радиальные напряжения σ_r .

Динамическая нагрузка $P(t)$ принималась прямоугольной формы, $P_{\text{max}} = 1 \cdot 10^5$ Па, длительность $t_n = 5 \cdot 10^{-7}$ с.

На рис. 1 для трех приведенных значений внутреннего давления приведены максимальные значения радиального напряжения σ_r в первом слое в зависимости от прохождения волны напряжений по толщине слоя, по оси абсцисс отложено число элементов; общее число двойных

треугольных элементов в слое равно 300. В расчетах принимали пределы текучести по сдвигу $\tau_s = 650, 1\,300, 1\,900, 2\,600, 3\,250 \cdot 10^5$ Па, а также $\sigma_s = \infty$ ($\tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}$). Отметим, что если при $P = 10 \cdot 10^5$ Па начальное статическое состояние является упругим, то при $P_0 = 20 \cdot 10^5$ Па и $\tau_s = 650 \cdot 10^5$ Па оно является пластическим. Для $P_0 = 40 \cdot 10^5$ Па начальное состояние будет таким и для $\tau_s = 1\,300 \cdot 10^5$ Па.

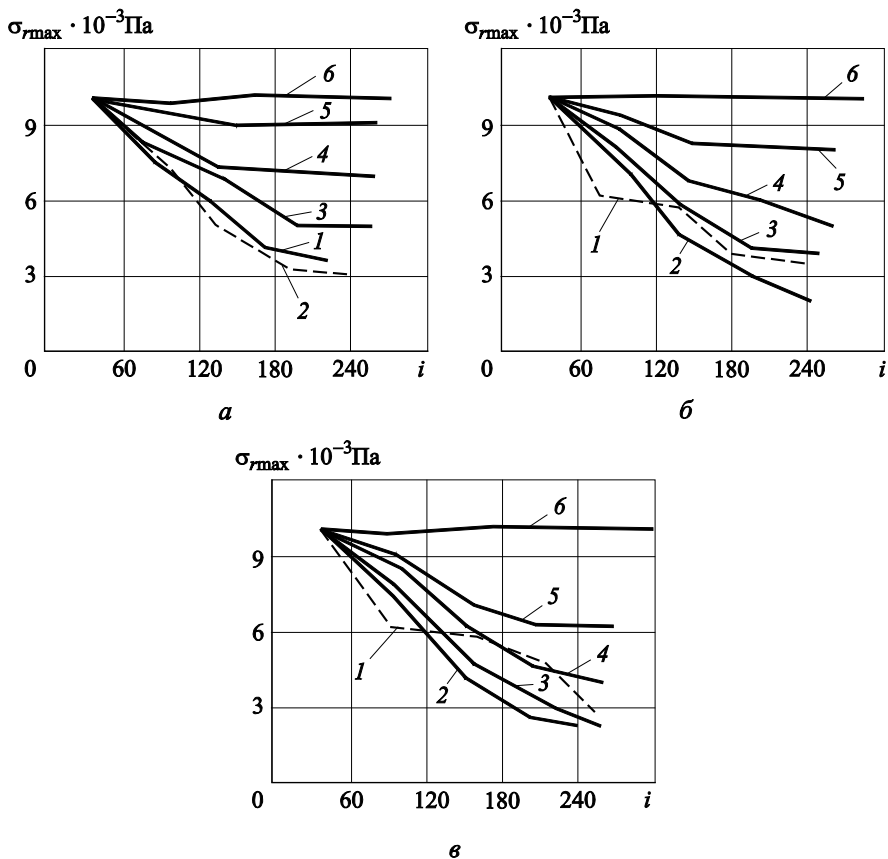


Рис. 1. Зависимость максимального радиального напряжения от прохождения волны напряжений по толщине слоя:
 а-в — P_0 равно $10 \cdot 10^5, 20 \cdot 10^5$ и $40 \cdot 10^5$ Па; 1-5 — τ_s равно 650, 1 300, 1 950, 2 600, 3 250 Па;
 6 — $\tau_s = \infty$

При $\tau_s = \infty$ (упругий случай) затухание практически отсутствует. [15]. При уменьшении τ_s от $3\,250 \cdot 10^5$ до $650 \cdot 10^5$ Па при $P_0 = 10 \cdot 10^5$ Па (см. рис. 1) коэффициент затухания изменяется от 0,9 до 0,3 при пробеге волной всей толщины слоя. Следует отметить, что вблизи самой границы со вторым слоем начинают проявляться эффекты отражения. Аналогичный характер имеют зависимости для

$P_0 = 20 \cdot 10^5$ и $40 \cdot 10^5$ Па (см. рис. 1, б, в), некоторый «аномальный» вид кривых, соответствующих $\tau_s = 650 \cdot 10^5$ Па, видимо, обусловлен пластическим характером начального состояния.

Влияние начального внутреннего давления удобно проследить по результатам расчетов, приведенным на рис. 2, где показано затухание волны на глубине 1 см от внешней границы при разных значениях предела текучести по сдвигу. Результаты проведенных расчетов позволяют сделать определенные выводы о влиянии начального внутреннего давления на характер волновых процессов в конструкции. Так, при $\tau_s = 3\,250 \cdot 10^5$ Па коэффициент затухания волны изменяется от 0,9 при $P_0 = 10 \cdot 10^5$ Па до 0,6 при $P_0 = 40 \cdot 10^5$ Па.

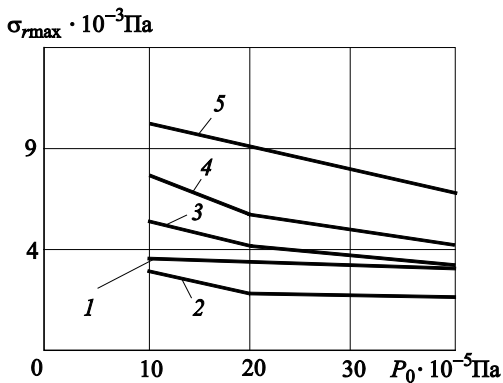


Рис. 2. Зависимость максимального радиального напряжения от начального внутреннего давления: 1–5 — τ_s равно 650, 1 300, 1 950 и 3 250 Па соответственно

Выводы. Проведенные расчеты показали, что эффект совместного действия статических эксплуатационных (внутреннего давления) и динамических нагрузок оказывает существенное влияние на характер волновых процессов в конструкции. Очевидно, следует говорить не только о влиянии внутреннего давления, но и о взаимном влиянии таких факторов, как внутреннее давление, максимальный уровень динамической нагрузки P_{\max} , предел текучести τ_s , а также геометрия конструкции, от которой существенно зависят напряжения $\sigma_{\theta}^{\text{ст}}$. Полученные результаты подтверждают важность данной проблемы. Следует также отметить, что влияние начального НДС на параметры волнового процесса в элементах конструкций может иметь место не только для упругопластических, но и для нелинейно-упругих материалов. Учет этих факторов в совокупности с широким комплексом расчетов позволит получить более обобщенные зависимости, необходимые для практического использования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.Г. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. Москва, Наука, 1966.
- [2] Станюкович К.П. *Физика взрыва*. Москва, Наука, 1975.
- [3] Алешков Ю.З. *Теория взаимодействия волн с преградами*. Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1990, 371 с.
- [4] Бутина Т.А., Дубровин В.М. К вопросу об оценке надежности и работоспособности конструкций при импульсном нагружении. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Сер. Естественные науки*. 2012, спец. вып. «Математическое моделирование», № 3.
- [5] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
- [6] Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Боисеник П.И. Конечно-элементное моделирование локальных процессов переноса в пористых средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 3, с. 90–104.
- [7] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Кичеговский Е.С. Конечно-элементное моделирование в механике композиционных материалов. *Сб. тр. «Высокие технологии, фундаментальные и прикладные исследования, образование». Т. 11*. Санкт-Петербург, Изд-во Санкт-Петербургского политехнического университета, 2007, с. 131–133.
- [8] Титов К.В. Об одном методе решения системы линейных дифференциальных уравнений. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2001, спец. вып. «Математическое моделирование», с. 100–114.
- [9] Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в гетерогенных системах. *Тр. всероссийских и международных научно-технических конференций «Аэрокосмические технологии, 2004–2007»*. Реутов — Москва, 2004–2007. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, с. 110–117.
- [10] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
- [11] Уилкинс М.Л. *Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике*. Москва, Мир, 1967, с. 212–264.
- [12] Жарков В.Н., Калинин В.А. *Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах*. Москва, Наука, 1968.
- [13] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Моделирование расслоений, отколов в многослойных элементах конструкций при импульсном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7 (19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-897
- [14] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упруго-пластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.
- [15] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Об упругих свойствах композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2009, т. 21, № 4, с. 96–110.

Статья поступила в редакцию 26.09.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Бутина Т.А., Дубровин В.М. Моделирование ударно-волновых процессов в элементах многослойных конструкций с учетом начального внутреннего давления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 11.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-11-1549>

Бутина Татьяна Александровна родилась в 1950 г., окончила факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук., доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Награждена медалями им. М.В. Келдыша и им. Ю.А. Гагарина. e-mail: butina_ta@mail.ru

Дубровин Виктор Митрофанович родился в 1935 г., окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета в 1958 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» и «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Область научных интересов: динамика, прочность и устойчивость деформируемых систем, ползучесть конструкционных материалов. e-mail: vmdubrovinvm1934@mail.ru

Shock wave processes simulation in multilayer structures elements with considering initial internal pressure

© T.A. Butina, V.M. Dubrovin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers a calculation method allowing us to take into account the non-zero initial stress-strain state of the multi-layer cylindrical structure elements due to static internal pressure. These calculations made it possible to estimate the influence of the initial stress-strain state on the material structure transition to the plastic stage under the effect of short-term dynamic loading.

Keywords: stress-strain state, internal pressure, dynamic load, yield strength, elastic-plastic materials, shock-wave processes.

REFERENCES

- [1] Zeldovich Ya.B., Rayzer Yu.G. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy* [Physics of shock waves and high temperature in fluid dynamics phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1966.
- [2] Stanyukovich K.P. et al. *Fizika vzryva* [Explosion physics]. Moscow, Nauka Publ., 1975.
- [3] Aleshkov Yu.Z. *Teoriya vzaimodeystviya voln s pregradami* [The theory of the waves interaction with targets]. St. Petersburg, SPBU Publ., 1990, 371 p.
- [4] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Vestnik MGTU im. Baumana, Seriya Estestvennyye nauki* — *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2012, special issue “Mathematical modeling”, no. 3.
- [5] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vols. Vol. 2. General laws of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [6] Dimitrienko Yu.I., Levina A.I., Boisenik P.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria: Estestvennyye nauki* — *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2008, no. 3, pp. 90–104.
- [7] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Kichegovskiy E.S. *Konechno-elementnoe modelirovanie v mekhanike kompozitsionnykh materialov* [Finite element modeling of composite materials mechanics]. In: *Sbornik trudov: Vysokie tekhnologii, fundamentalnye i prikladnye issledovaniya* [Collected works: High technologies, fundamental and applied research]. Series: Education, vol. 11. St. Petersburg, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 2007, pp. 131–133.
- [8] Titov K.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria: Estestvennyye nauki* — *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2001, special issue “Math Modeling”, pp. 100–114.
- [9] Dimitrienko Yu.I., Ivanov M.Yu. *Modelirovanie nelineynykh dinamicheskikh protsessov perenosa v geterogennykh sistemakh* [Nonlinear dynamic transfer processes modeling in heterogeneous systems]. *Trudy vs Rossiyskikh i mezhdunarodnykh nauchno-tekhnicheskikh konferentsiy 204–2007* [Proc. of national and international scientific and technical conferences of 2004–2007]. Reutov–Moscow, 2004–2007. Moscow, BMSTU Publ., 2008, pp. 110–117.

- [10] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika splashnoy sredy. V 4 tomakh. Tom 1. Tenzornyy analiz* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [11] Wilkins M.L. *Raschet uprugoplasticheskikh techeniy. Vychislitelnye metody v gidrodinamike* [Elastic-plastic flow calculation. Computational methods in fluid dynamics]. Moscow, Mir Publ., 1967, pp. 212–264 [in Russ.].
- [12] Zharkov V.N., Kalinin V.A. *Uravneniya sostoyaniya tverdykh tel pri vysokikh davleniyakh i temperaturakh* [The equations of solids states at high pressures and temperatures]. Moscow, Nauka Publ., 1968.
- [13] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7 (19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-897
- [14] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria: Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.
- [15] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical Modelling*, 2009, vol. 21, no. 4, pp. 96–110.

Butina T.A. (b. 1950) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology in 1974, Department of Management and Applied Mathematics. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Specialist in the field of strength and stability of deformable systems. Awarded by M.V. Keldysh and Yu.A. Gagarin medals. e-mail: butina_ta@mail.ru

Dubrovin V.M. (b. 1935) graduated from Mechanics and Mathematics Department, Saratov State University in 1958. Assoc. Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics and of the Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Specialist in the field of strength and stability of deformable systems. Research interests include dynamics of deformable systems, strength and stability of deformable systems; creep of structural materials. Author of five inventions through a private subject. e-mail: vmdubrovin1934@mail.ru