

## Модель фильтрации сквозь однородную пористую среду

© А.А. Гурченков<sup>1,2</sup>, М.В. Носов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, 119333, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Рассмотрена модель вертикального перемещения влаги в почве. Процесс влагопереноса описан одномерным нелинейным уравнением с частными производными второго порядка параболического типа. Входящие в уравнение коэффициент диффузии и гидравлическая проводимость почвы вычислены по широко применяемым на практике формулам ван Генухтена. Важной составляющей модели является испарение с поверхности почвы. Задача определения испарения сформулирована как задача оптимального управления, в которой фазовыми переменными являются значения влажности почвы на разной глубине, а управлением — искомое испарение. В качестве целевой функции использовано среднеквадратическое отклонение значений влажности почвы на различной глубине от некоторых предписанных значений, полученных в результате расчетов в рамках используемой гидрологической модели. Задача численной оптимизации решена методом наискорейшего спуска, при этом градиент целевой функции определен с применением метода быстрого автоматического дифференцирования.*

**Ключевые слова:** метод наискорейшего спуска, целевая функция, задача оптимального управления, метод быстрого автоматического дифференцирования.

**Введение.** Модель вертикального переноса влаги в почве — одна из важнейших составляющих при моделировании процесса формирования стока на водосборе. Входящие в эту модель параметры определяют, как правило, экспериментально либо с применением некоторых эмпирических зависимостей. Экспериментальное определение этих параметров часто представляет собой трудную и затратную задачу, а использование эмпирических зависимостей не дает достаточной уверенности в достоверности полученных результатов в общем случае. Значения большинства параметров физико-математических моделей задают либо из физических соображений, либо находят с помощью эмпирически установленных соотношений по измеряемым характеристикам речного водосбора. Однако при поиске таких соотношений часть параметров нередко подбирают по измерениям стока.

Одним из возможных способов определения параметров модели является решение обратной задачи, когда эти параметры определяют по некоторым доступным экспериментальным данным. В модели вертикального переноса влаги в почве в качестве таких данных можно использовать измеренные профили влажности почвы, т. е. распре-

деление влаги в почве по глубине. Так, на европейской части РФ находится около 500 станций, на которых в мониторинговом режиме постоянно осуществляют измерения профилей влажности почвы.

Одной из составляющих рассматриваемой гидрологической модели является испарение с поверхности почвы. Эти данные необходимы для определения влагообмена между почвой и атмосферой, их используют в климатологии и гидрологии. В то же время испарение — одна из самых трудно определяемых величин, входящих в математическую модель. В настоящее время не существует точных и универсальных методов расчета испарения. Лабораторные измерения можно проводить только на специально оборудованных станциях, число которых на европейской части РФ не превышает 20, и проводят их нерегулярно. Большинство геофизических методов позволяет оценить испарение лишь за большие промежутки времени (недели и месяцы) и на больших территориях. С помощью метода Пенмана вычисляют испарение, исходя из сложной зависимости его от радиационного баланса, скорости ветра, температуры и влажности воздуха. Этот метод, однако, использует большое число метеорологических данных, что ограничивает его применение, так как не на всех метеорологических станциях проводятся необходимые для расчетов наблюдения.

В представляемой работе задача нахождения испарения с поверхности почвы формулируется как задача оптимального управления, в которой управлением является искомое испарение, а целевой функцией — среднеквадратическое отклонение (СКО) значений влажности почвы, рассчитанных в соответствии с моделью влагопереноса в почве при выбранном испарении, от некоторых предписанных значений, назовем их «экспериментальные данные». Сравнение значений влажности почвы происходит в некоторой заданной области. Таким образом, предпринята попытка вычислить искомое испарение, используя доступные данные — профили влажности почвы. К настоящему времени задача нахождения испарения с поверхности почвы в такой постановке, насколько это известно авторам, рассматривается впервые.

**Постановка задачи.** Предположим, что почва представляет собой изотермическую недеформируемую однородную пористую среду, тогда вертикальное передвижение влаги в почве хорошо описывается одномерным нелинейным уравнением с частными производными второго порядка параболического типа.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right), \quad (z, t) \in Q;$$

$$\begin{aligned}
 \theta(z, 0) &= \varphi(z), & z \in (0, L); \\
 \theta(L, t) &= \psi(t), & t \in (0, T); \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{z=0} &= \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right) \Big|_{z=0} + R(t) - E(t), & t \in (0, T); \\
 \theta_{\min} &\leq \theta(0, t) \leq \theta_{\max}, & t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $z$  — пространственная переменная;  $t$  — время;  $\theta$  — искомая влажность в точке  $(z, t)$ ;  $Q = (0, L)(0, T)$ ;  $\varphi(z)$   $\psi(t)$  — заданные функции;  $D(\theta)$  — коэффициент диффузии;  $K(\theta)$  — гидравлическая проводимость;  $R(t)$  — осадки;  $E(t)$  — испарение.

Гидрофизические характеристики  $D(\theta)$  и  $K(\theta)$  вычисляются по формулам, предложенным Генухтеном [1] и широко применяемым при расчетах экстремальных ситуаций:

$$\begin{aligned}
 K(\theta) &= K_0 S^{0,5} \left[ 1 - \left( 1 - S^{1/m} \right)^m \right]^2; \\
 D(\theta) &= K_0 \frac{1-m}{\alpha m (\theta_{\max} - \theta_{\min})} S^{0,5-1/m} \left[ \left( 1 - S^{1/m} \right)^{-m} + \left( 1 - S^{1/m} \right)^m - 2 \right],
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $S = \frac{\theta - \theta_{\min}}{\theta_{\max} - \theta_{\min}}$ ;  $K_0$ ,  $\alpha$ ,  $m$ ,  $\theta_{\min}$ ,  $\theta_{\max}$  — некоторые параметры.

Назовем приведенную задачу прямой задачей.

Сформулируем задачу нахождения  $E(t)$ ,  $t \in (0, T)$ . Пусть на некотором множестве  $Q_0 \subseteq Q$  задана функция  $\hat{\theta}(z, t)$ . Назовем эту функцию «экспериментальные данные». Поставим задачу подобрать  $E(t)$ ,  $t \in (0, T)$ , таким образом, чтобы соответствующее решение прямой задачи (1) было как можно ближе к функции  $\hat{\theta}(z, t)$  на множестве  $Q_0 \subseteq Q$ . Или, более точно, найти  $E^{\text{opt}}(t)$ ,  $t \in (0, T)$ , и соответствующее решение  $\theta^{\text{opt}}(z, t)$  прямой задачи, такие, чтобы функционал  $J = \frac{1}{2} \int_{Q_0} (\theta^{\text{opt}} - \hat{\theta})^2 dz dt$  достигал минимума.

Перейдем к дискретному аналогу задачи (1). Разобьем интервалы  $(0, L)$  и  $(0, T)$  на  $I$  и  $N$  равных подынтервалов с концевыми точками  $t^n = \tau n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , и  $z_i = hi$ ,  $0 \leq i \leq I$ , соответственно, где  $\tau = T/N$  и  $h = L/I$ .

Проведем конечно-разностную аппроксимацию прямой задачи (1) по следующей схеме:

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left( D_{i+1/2}^{n+1} \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_i^{n+1}}{h} - K_{i+1/2}^{n+1} - D_{i-1/2}^{n+1} \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1}}{h} + K_{i-1/2}^{n+1} \right),$$

$$1 < i < I, \quad 0 \leq n < N;$$

$$\theta_i^0 = \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq I, \quad \theta_i^n = \psi^n, \quad 1 \leq n \leq N,$$

где  $\theta_i^n$ ,  $D_{i+1/2}^n$ ,  $K_{i-1/2}^n$  — значения функций  $\theta(z, t)$ ,  $D(\theta(z, t))$ ,  $K(\theta(z, t))$  в точках  $(z_i, t^n)$ ,  $((i+1/2)h, \tau n)$ ,  $((i-1/2)h, \tau n)$ ;  $\varphi_i$ ,  $\psi^n$  — значения функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(t)$  в точках  $z_i$  и  $t^n$  соответственно.

Конечно-разностная аппроксимация левого краевого условия приводит к следующему выражению:

$$\frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\tau} = \frac{2}{h} \left( D_{1/2}^{n+1} \frac{\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}}{h} - K_{1/2}^{n+1} + R^{n+1} - E^{n+1} \right), \quad 0 \leq n < N,$$

где  $R^{n+1}$ ,  $E^{n+1}$  — значения функций  $R(t)$  и  $E(t)$  в точках  $t^{n+1} = \tau(n+1)$ .

В результате проведения такой конечно-разностной аппроксимации приходим к следующему дискретному аналогу прямой задачи (1):

$$\Phi_0^n = -\left( \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h} D_{1/2}^n \right) \theta_0^n + \frac{2}{h} D_{1/2}^n \theta_1^n + \frac{1}{\tau} \theta_0^{n-1} + \frac{2}{h} (-K_{1/2}^n + R^n - E^n) = 0;$$

$$\theta_{\min} \leq \theta_0^n \leq \theta_{\max}, \quad 1 \leq n \leq N;$$

$$\Phi_i^n = \frac{1}{h^2} D_{i-1/2}^n \theta_{i-1}^n - \left[ \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} (D_{i+1/2}^n + D_{i-1/2}^n) \right] \theta_i^n + \frac{1}{h^2} D_{i+1/2}^n \theta_{i+1}^n +$$

$$+ \left[ \frac{\theta_i^{n-1}}{\tau} + \frac{1}{h} (K_{i-1/2}^n - K_{i+1/2}^n) \right] = 0, \quad 1 \leq i < I, \quad 1 \leq n \leq N;$$

$$\Phi_I^n = \psi^n - \theta_I^n = 0, \quad 1 \leq n \leq N;$$

$$\theta_i^0 = \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq I,$$

где  $\psi^n = \psi(t^n)$ ;  $\varphi_i = \varphi(z_i)$ . При этом коэффициент диффузии  $D$  и гидравлическую проводимость  $K$  в формулах (3) в промежуточных точках будем вычислять по следующим формулам:

$$D_{i+1/2}^n = 2 \frac{D_i^n D_{i+1}^n}{D_i^n + D_{i+1}^n}; K_{i+1/2}^n = 2 \frac{K_i^n K_{i+1}^n}{K_i^n + K_{i+1}^n}, 1 \leq n \leq N, 0 \leq i < I. \quad (4)$$

Пусть  $Q_0 = \{(z, t) : z = mih, t = kl\tau\}$ , где  $i = 1, \dots, [(I-1)/m]$ ;  $l = 1, \dots, [N/k]$ ;  $m \geq 1$  и  $k \geq 1$  — некоторые фиксированные натуральные числа (под  $[a/b]$  понимается результат деления без дробной части).

Зададим целевой функционал в виде

$$W(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{[(I-1)/m]} \sum_{l=1}^{[N/k]} (\theta_j^n - \hat{\theta}_j^n)^2 h\tau, \quad (5)$$

где  $n = kl$ ;  $j = im$ .

Сформулируем дискретную задачу оптимального управления: найти оптимальное управление  $u^{\text{opt}} = \{E_n^{\text{opt}}, n = 1, \dots, N\}$  и соответствующее оптимальное решение задачи (3), такие, чтобы функционал  $W(u)$  (4) достигал минимального значения.

Таким образом, изначальная задача оптимального управления сведена к задаче нелинейного программирования (НЛП). Решать эту задачу численно предлагается методом наискорейшего спуска, в котором градиент целевого функционала находят с применением метода быстрого автоматического дифференцирования (БАД) [1–7]. Получаемые значения градиента являются точными.

Метод БАД применяется для вычисления градиента функций, получаемых в результате выполнения алгоритма, описанного в работах [3, 4, 7–10]. Он позволяет находить производные сложных функций, переменные которых связаны между собой функциональными связями. В России это направление возникло и развивалось в процессе разработки и совершенствования методов решения конечномерных задач оптимизации, получаемых в результате дискретизации задач оптимального управления [2, 11–14]. Ниже приведен общий способ получения формул БАД для вычисления производных сложной функции, основанный на теореме о неявной функции.

Предположим, что для векторов  $z \in \mathbf{R}^n$  и  $u \in \mathbf{R}^r$  дифференцируемые функции  $W(z, u)$  и  $\Phi(z, u)$  определяют отображения  $W : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$  и  $\Phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Пусть  $z$  и  $u$  удовлетворяют системе из  $n$  скалярных алгебраических уравнений:

$$\Phi(z, u) = 0_n, \quad (6)$$

где  $\mathbf{0}_n$  — нулевой  $n$ -мерный вектор. Предположим также, что матрица  $\Phi_z^T(z, u)$  неособенная. Тогда по теореме о неявной функции система связей (6) определяет непрерывно-дифференцируемую функцию  $z = z(u)$ .

При этих предположениях в соответствии с методом БАД градиент функции  $W(z(u), u)$  вычисляется по формуле

$$dW(z(u), u)/du = W_u(z(u), u) + \Phi_u(z(u), u) p. \quad (7)$$

Входящий в формулу (7) вектор  $p \in \mathbf{R}^n$  является множителем Лагранжа и определяется в результате решения системы линейных уравнений:

$$W_z(z(u), u) + \Phi_z^T(z(u), u) p = \mathbf{0}_n. \quad (8)$$

Эта линейная система является сопряженной с исходной системой связей (6).

Применительно к приведенной выше задаче НЛП соотношения (7), (8) для вычисления градиента целевой функции имеют следующий вид:

$$dW(\theta(u), u)/du = W_u(\theta(u), u) + \Phi_u^T(\theta(u), u) p; \quad (9)$$

$$W_\theta(\theta(u), u) + \Phi_\theta^T(\theta(u), u) p = \mathbf{0}_M, \quad (10)$$

где  $M = (I + 1)N$ ;  $\Phi^T = [\Phi_0^1, \Phi_1^1, \dots, \Phi_I^1, \Phi_0^2, \Phi_1^2, \dots, \Phi_I^2, \dots, \Phi_0^N, \Phi_1^N, \dots, \Phi_I^N]$ ;  $\theta^T = [\theta_0^1, \theta_1^1, \dots, \theta_I^1, \theta_0^2, \theta_1^2, \dots, \theta_I^2, \dots, \theta_0^N, \theta_1^N, \dots, \theta_I^N]$  ( $\Phi$  и  $\theta$  содержатся в выражениях (3)).

**Численные результаты.** Приведенную задачу решали численно при следующих значениях входных параметров:

$$L = 90 \text{ см}; T = 122 \text{ сут}; \theta_{\min} = 0,065 \text{ см}^3/\text{см}^3;$$

$$\theta_{\max} = 0,51 \text{ см}^3/\text{см}^3; \varphi(z) = 0,3; z \in (0, L); K_0 = 103,68 \text{ см/сут};$$

$$\alpha = 0,075 \text{ 1/см}; m = 0,471; k = 1; p = 1.$$

Графики функций  $\Psi(t)$  (зависимость влажности почвы при  $z = 90$  от времени) и  $R(t)$  (толщина слоя выпавших осадков, см/сут) представлены на рис. 1 и 2.

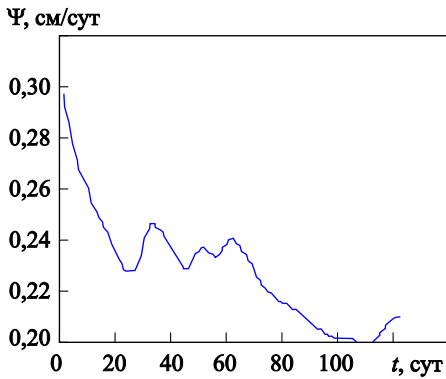


Рис. 1. Зависимость влажности почвы от времени ( $z = 90$ )

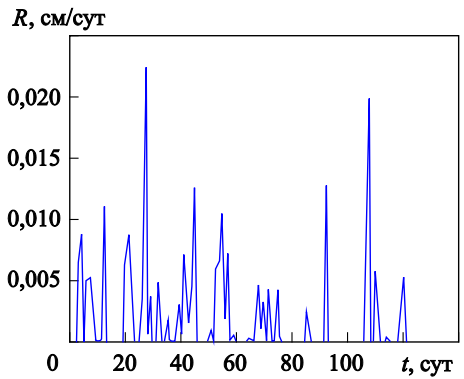


Рис. 2. Зависимость слоя выпавших осадков от времени

В гидрологической практике наблюдаются, как правило, суммарные значения осадков и испарения за сутки. Численные расчеты показали, что шаг по времени, равный 1 сут, является неприемлемым с точки зрения точности аппроксимации решения задачи (1). Поэтому шаги по времени и по пространству дробили с целью их уменьшения до достижения различия вновь рассчитанных значений влажности и вычисленных на предыдущем этапе приблизительно  $1 \cdot 10^{-4}$ . В результате шаг по времени  $\tau = 1/100$  сут, шаг по пространству  $h = 1$  см. Таким образом,  $I = 90$ ,  $N = 12\ 200$ . Поскольку на практике, как правило, доступными оказываются суммарные значения осадков и испарения за сутки, было принято допущение, что в течение суток эти значения сохраняются постоянными и их суммарные значения за сутки равны наблюдаемым.

Расчеты проводили следующим образом. Сначала решали прямую конечно-разностную задачу (3) с некоторым испарением, например  $E^{\text{true}}(t)$  (рис. 3).

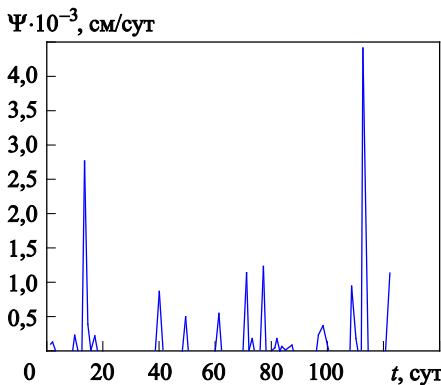


Рис. 3. Суммарное за каждые сутки испарение

Способ решения задачи (3) заключается в следующем. Система (3) расщепляется на  $N$  подсистем, каждая из которых относится к  $i$ -му,  $i = 1, \dots, N$ , временному слою и содержит в качестве переменных значения влажности только на этом временном слое. В направлении от первого временного слоя к  $N$ -ному временному слою последовательно для каждого временного слоя решается соответствующая система уравнений (отдельно от других слоев).

Решение каждой такой системы находится в результате выполнения следующего итерационного процесса. На каждой итерации значения влажности на временном слое определяют в результате решения соответствующей системы, в которой значения коэффициента диффузии и гидравлической проводимости вычислены по формулам (2) и (4) с использованием значений влажности, полученных на предыдущей итерации. При известных значениях коэффициента диффузии и гидравлической проводимости система является линейной, при этом основная матрица системы трехдиагональная. Система решается методом прогонки. На первой итерации значения коэффициента диффузии и гидравлической проводимости вычисляются с применением значений влажности на предыдущем временном слое. Такое преобразование профиля влажности, полученного на предыдущей итерации, в профиль влажности, вычисляемый в текущей итерации, оказалось сжимающим. Этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока СКО значений влажности, полученных на предыдущей итерации от значений влажности в текущей итерации на всем временном слое не станет менее  $1 \cdot 10^{-7}$ . При выбранных параметрах задачи для нахождения решения требовалось, как правило, не более пяти итераций.

Полученное таким образом решение  $\hat{\theta}(z, t), (z, t) \in Q_0$  задачи (3) было названо «экспериментальные данные». Далее решали дискретную задачу оптимального управления. Численная оптимизация проводилась методом наискорейшего спуска, при этом градиент целевой функции (5) вычислялся по формулам БАД (9)–(10). Шаг вдоль выбранного направления определяли в результате одномерной оптимизации функции, полученной путем интерполяции целевой функции с помощью сплайнов, построенных по 40 точкам. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока чебышевская норма градиента целевой функции (5) не принимала значение меньше  $1 \cdot 10^{-14}$ .

В качестве начального управления было выбрано испарение  $E^{\text{init}}(t) = 1,0 \cdot 10^{-3}$ ,  $t \in (0, T)$ . Задача численной оптимизации на всем промежутке времени  $(0, T)$  распадается на 122 отдельные оптимизационные задачи, соответствующие каждому суткам, которые можно



решать автономно. Численные расчеты показали, что для нахождения оптимального управления с требуемой точностью требуется, как правило, не более 1000 итераций. Графики начального, истинного и найденного в результате численных расчетов оптимального управления представлены на рис. 4.

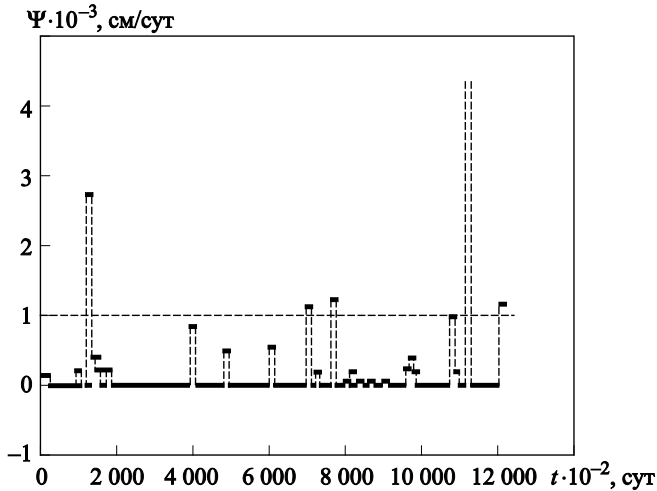


Рис. 4. Начальное (штриховая линия), истинное (пунктирная) и оптимальное (отмечено точками) управление

Видно, что графики истинного и найденного в результате численных расчетов оптимального управления практически совпадают.

**Заключение.** Как показали результаты численных экспериментов, предлагаемый метод позволяет с высокой точностью восстанавливать испарение по вычисленным профилям влажности. Задача численной оптимизации на заданном отрезке времени допускает расщепление на задачи, в каждой из которых определяется оптимальное испарение за сутки. Таким образом, при необходимости задача может быть распараллелена. Дальнейшие исследования фильтрационных процессов подразумевают изучение поведения жидкостей в различных векторных полях, в частности на основе работ [15, 16].

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ № 15-01-05552.*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Genuchten M.Th., van. A Closed Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1980, vol. 44, pp. 892–898.
- [2] Айда-Заде К.Р., Евтушенко Ю.Г. Быстрое автоматическое дифференцирование на ЭВМ. *Математическое моделирование*, 1989, т. 1, с. 121–139.

- [3] Griewank A. On Automatic Differentiation. *Mathematical Programming: Recent Developments and Applications*. Ed. by Iri M. and Tanabe K. Tokyo, Kluwer Academic Publ., 1989, pp. 83–108.
- [4] Griewank A., Corliss G.F., ed. *Automatic Differentiation of Algorithms. Theory, Implementation and Application*. Philadelphia, SIAM, 1991, pp. 238–245.
- [5] Evtushenko Yu.G. Automatic differentiation viewed from optimal control theory. *Automatic Differentiation of Algorithms. Theory, Implementation and Application*. Ed. by Griewank A. and Corliss G.F. Philadelphia, SIAM, 1991, pp. 25–30.
- [6] Evtushenko Yu.G. Computation of Exact Gradients in Distributed Dynamic Systems for Optimal Control Problem. *Optimization methods and software*, 1998, vol. 9, pp. 45–75.
- [7] Griewank A. *Evaluating Derivatives*. Philadelphia, SIAM, 2000, pp. 43–49.
- [8] Карманов В.Г. *Математическое программирование*. Москва, Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2004.
- [9] Абакаров А.Ш., Сушков Ю.А. Статистическое исследование одного алгоритма глобальной оптимизации. *Труды ФОРА*, 2004, № 1, с. 154–160.
- [10] Таха Хемди А. *Введение в исследование операций*. 8-е изд. Москва, Вильямс, 2007, 912 с.
- [11] Плотников А.Д. *Математическое программирование: экспресс-курс*. Минск, Новое знание, 2006, 171 с.
- [12] Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач*. Москва, Наука, 2002, 552 с.
- [13] Корнеев В.П. *Методы оптимизации*. Москва, Высшая школа, 2007, 664 с.
- [14] Никольский М.С., Григоренко Н.Л., Дмитриев В.И., отв. ред. *Избранные труды Л.С. Понтрягина*. Москва, МАКС Пресс, 2004, 552 с. (Сер. «Выдающиеся ученые МГУ»).
- [15] Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела*. Москва, Физматлит, 2010.
- [16] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.V. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. Balkema, CRC Press N.–P., 2013.

Статья поступила в редакцию 29.06.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гурченков А.А., Носов М.В. Модель фильтрации сквозь однородную пористую среду. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 9.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-09-1531>

**Гурченков Анатолий Андреевич** — д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: управление вращающимися твердыми телами с жидким наполнением, устойчивость динамических систем с жидкостью, нелинейная электродинамика, гамильтоновы системы, «шоковые поверхности». e-mail: challenge2005@mail.ru

**Носов Михаил Викторович** — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН. Область научных интересов: управление вращающимися твердыми телами с жидким наполнением, устойчивость динамических систем с жидкостью.

# Filtration model through a homogeneous porous medium

© A.A. Gurchenkov<sup>1,2</sup>, M.V. Nosov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institution of the Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, 119333, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The study considers a model of vertical water transfer in soil; describes the water transfer process by one-dimensional nonlinear parabolic equation. The diffusion coefficient and the soil hydraulic conductivity included in the equation is calculated by van Genuchten formulas widely used in practice. An important model component is the evaporation from the soil surface. The study formulates the problem of determining evaporation as an optimal problem — the one, in which the phase variables are the soil moisture values at different depths, and control is the desired evaporation. The mean-square soil moisture values deviation from some prescribed values derived from calculations based on the hydrological models is the objective function. We solve the numerical optimization by the steepest descent method; the objective function gradient is calculated using the fast automatic differentiation method (FAD).*

**Keywords:** *the steepest descent method, the objective function, the optimal control problem, a method of fast automatic differentiation.*

## REFERENCES

- [1] Genuchten M.Th., van. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, vol. 44, pp. 892–898.
- [2] Ayda-Zade K.R., Evtushenko Yu.G. *Matematicheskoe modelirovanie — Math modeling*, 1989, vol. 1, pp. 121–139.
- [3] Griewank A. On automatic differentiation. *Mathematical Programming: Recent Developments and Applications*. Iri M., Tanabe K., ed. Tokyo, Kluwer Academic Publ., 1989, pp. 83–108.
- [4] Griewank A., Corliss G. F., ed. *Automatic Differentiation of Algorithms. Theory, Implementation and Application*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Publ., 1991, pp. 238–245.
- [5] Evtushenko Yu.G. Automatic differentiation viewed from optimal control theory. *Automatic Differentiation of Algorithms. Theory, Implementation and Application*. Griewank A., Corliss G.F., ed. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Publ., 1991, pp. 25–30.
- [6] Evtushenko Yu.G. *Optimization methods and software*, 1998, vol. 9, pp. 45–75.
- [7] Griewank A. *Evaluating Derivatives*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Publ., 2000, pp. 43–49.
- [8] Karmanov V.G. *Matematicheskoe programmirovaniye* [Mathematical programming]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004.
- [9] Abakarov A.Sh., Sushkov Yu.A. *Trudy FORA — Works of the Adygea Republic Physical Society*, 2004, no. 1, pp. 154–160.
- [10] Takha Khemdi A. *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Operations research: an Introduction]. 8<sup>th</sup> ed., Moscow, Williams Publ., 2007, 912 p.
- [11] Plotnikov A.D. *Matematicheskoe programmirovaniye* [Mathematical programming]. Proc. of the express-course. Minsk, Novoe znanie Publ., 2006, 171 p.

- [12] Vasilyev F.P. *Chislennyye metody resheniya ekstremalnykh zadach* [Numerical methods for solving extreme problems]. Moscow, Nauka Publ., 2002, 552 p.
- [13] Korneenko V.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2007, 664 p.
- [14] Nikolsky M.S., Grigorenko N.L., Dmitriev V.I., ed. *Izbrannyye Trudy L.S. Pontryagina*. Ser. Vydavushchiesya uchenye MGU [Selected Works of L.S. Pontryagin. Series Outstanding scientists of MSU]. Moscow, MaxPress Publ., 2004, 552 p.
- [15] Gurchenkov A.A. *Dinamika zavikhrennoy zhidkosti v polosti vraschayuschegosya tela* [Dynamics of fluid turbulence in the rotating body cavity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010.
- [16] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.V. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRC Press/Balkema Publ., 2013.

**Gurchenkov A.A.**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Leading Research Scientist of the Institution of the Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Professor of the Department of Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Research interests include control of rotating solid bodies with liquid filling, stability of dynamical systems with fluid, nonlinear electrodynamics, Hamiltonian systems, “the surface of shock”. e-mail: challenge2005@mail.ru

**Nosov M.V.**, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Research Scientist of the Institution of the Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS. Research interests include control of rotating solid bodies with liquid filling, stability of dynamical systems with fluid.