

С. С. Филиппов, А. В. Тыглиян

**ABC-СХЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Рассматриваются новые одношаговые линейно неявные методы интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от методов типа Розенброка в формулы ABC-схем входит не только матрица Якоби системы дифференциальных уравнений, но и ее квадрат.*

E-mail: filippov@keldysh.ru, m.tygliyan@gmail.com

**Ключевые слова:** жесткие системы ОДУ, одношаговые неявные методы, линеаризация ОДУ, метод типа Розенброка, ABC-метод

ABC-схемы являются численными методами, предназначенными для решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Одностадийные ABC-схемы задаются формулой

$$(I + Ahf_y + Bh^2 f_y^2) (y_1(h) - y_0) = (I + Chf_y) hf. \quad (2)$$

Здесь  $y_1(h)$  — искомое численное решение на одном шаге интегрирования длины  $h$ , а  $A$ ,  $B$  и  $C$  — коэффициенты, определяющие метод (и его название),  $y$  и  $f$  —  $n$ -мерные вектор-функции,  $f_y$  — матрица Якоби системы дифференциальных уравнений (1),  $I$  — единичная матрица; отметим, что  $f$ ,  $f_y$ , ... (без аргументов) всюду означают  $f(y_0)$ ,  $f_y(y_0)$ , ...

Для одностадийных ABC-схем (2) справедливы следующие утверждения [1], легко доказываемые стандартными способами [2, 3].

**Теорема 1.** При любых вещественных  $A$ ,  $B$ ,  $C$  порядок аппроксимации методов (2) не ниже первого.

**Теорема 2.** Методы (2) имеют порядок 2, если и только если  $C = A + 1/2$ . При этом главный член ошибки метода равен  $y(x_0 + h) - y_1(h) = (h^3/3!) (f_{yy} f f + \sigma f_y^2 f)$ , где

$$\sigma = 1 + 3A + 6B, \\ f_{yy} f f = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_j \partial y_k} f_j f_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

**Теорема 3.** Функция устойчивости метода (2) имеет вид

$$R(z) = \frac{1 + (1 + A)z + (B + C)z^2}{1 + Az + Bz^2}.$$

**Теорема 4.** Методы второго порядка  $A$ -устойчивы тогда и только тогда, когда

$$A \leq -\frac{1}{2}, \quad B \geq -\frac{A}{2} - \frac{1}{4}.$$

**Теорема 5.** Для  $L$ -устойчивости методов второго порядка необходимо и достаточно, чтобы  $B = -A - 1/2 > 0$ .

Кроме того, для линейных систем (1) с постоянными коэффициентами получены следующие результаты.

**Теорема 6.** Для того чтобы  $ABC$ -схемы (2) аппроксимировали линейную автономную систему с порядком 3, необходимо и достаточно, чтобы  $B = -A/2 - 1/6$ ,  $A \leq -1/2$ . Такие методы образуют однопараметрическое семейство

$$[I + Ahf_y - (A + 1/3)(h^2 f_y^2/2)](y_1 - y_0) = hf + (A + 1/2)h^2 f_y f \quad (4)$$

с главным членом ошибки

$$y(x_0 + h) - y_1 = (h^4/4!)(1 + 2A)f_y^3 f$$

и функцией устойчивости

$$R(z) = \frac{1 + (1 + A)z + (A/2 + 1/3)z^2}{1 + Az - (A/2 + 1/6)z^2}.$$

Эти методы  $A$ -устойчивы при  $A \leq -1/2$ , а при  $A = -2/3$  такой метод  $L$ -устойчив; при  $A = -1/2$  метод (4) аппроксимирует решение линейной автономной системы с порядком 4.

**Замечание 1.** Для возведения в квадрат заполненной матрицы  $f_y$  требуется  $n^3$  мультипликативных операций, и еще  $n^3/3$  операций для  $LU$ -разложения матрицы в левой части уравнения (2). Но если эту последнюю матрицу разложить на линейные множители, то возводить  $f_y$  в квадрат не надо, и число затрачиваемых на линейную алгебру действий сократится вдвое. Количество действий уменьшится еще примерно в два раза, если ограничиться однопараметрическим семейством  $ABC$ -схем, у которых  $B = A^2/4$ .

На рис. 1 заштрихованной области  $A$  принадлежат те значения коэффициентов  $(A, B)$ , которые принадлежат  $A$ -устойчивым методам второго порядка (теорема 4); прямая  $L$  соответствует  $L$ -устойчивым методам (теорема 5); штриховая прямая  $p = 3$  представляет однопараметрическое семейство методов из Теоремы 6; пунктирная парабола  $B = A^2/4$  показывает семейство наиболее экономичных  $ABC$ -схем из замечания 1.

Более детальное исследование одностадийных  $ABC$ -схем можно найти в работе [4], где приведены также результаты, полученные для случая неавтономных систем дифференциальных уравнений и результаты численных экспериментов, в которых проводилось сравнение с некоторыми известными методами.

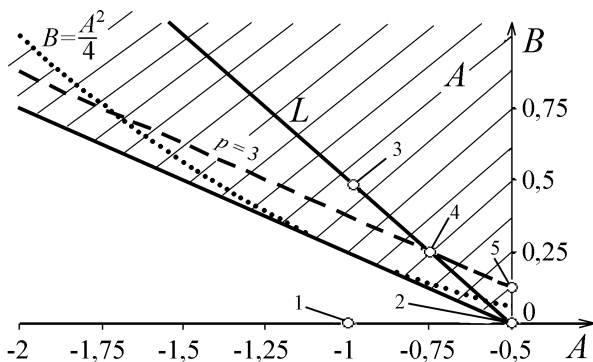


Рис. 1.  $A$ -устойчивые одностадийные  $ABC$ -схемы

**Примеры одностадийных  $ABC$ -схем.** На рис. 1 приведенные ниже примеры представлены кружками с соответствующими номерами.

**Пример 1.** При  $A = -1$ ,  $B = C = 0$  имеем  $L$ -устойчивый метод порядка 1 (линеаризованный неявный метод Эйлера).

**Пример 2.** При  $A = -1/2$ ,  $B = C = 0$  получим  $A$ -устойчивый метод порядка 2 (линеаризованное неявное правило средней точки), для которого в формуле (3)  $\sigma = -1/2$ .

**Пример 3.** При  $A = -1$ ,  $B = -C = 1/2$  имеем  $L$ -устойчивый метод второго порядка [4]

$$\left[ I - hf_y + \frac{h^2}{2} f_y^2 \right] (y_1 - y_0) = hf - \frac{h^2}{2} f_y f. \quad (5)$$

При этом в формуле (3)  $\sigma = -1$ , а функция устойчивости имеет вид

$$R(z) = \frac{1}{1 - z + z^2/2}.$$

Отметим, что  $ABC$ -схема (5) эквивалентна одностадийному методу Розенброка с комплексным коэффициентом [5].

**Пример 4.** Выбор  $A = -2/3$ ,  $B = -C = 1/6$  дает  $L$ -устойчивый метод второго порядка

$$\left[ I - \frac{2h}{3} f_y + \frac{h^2}{6} f_y^2 \right] (y_1 - y_0) = hf - \frac{h^2}{6} f_y f,$$

принадлежащий к семейству (4) методов, которые аппроксимируют решения линейных автономных систем с порядком 3, так что в формуле (3)  $\sigma = 0$ ; функция устойчивости этого метода определяется формулой

$$R(z) = \frac{1 + z/3}{1 - 2z/3 + z^2/6}.$$

**Пример 5.** Выбор  $A = -1/2$ ,  $B = 1/12$ ,  $C = 0$  ( $\sigma = 0$ ) приводит к упомянутому в конце теоремы 6  $A$ -устойчивому методу второго

порядка

$$\left[ I - \frac{h}{2} f_y + \frac{h^2}{12} f_y^2 \right] (y_1 - y_0) = hf,$$

принадлежащему к семейству (4) и аппроксимирующему решения линейных автономных систем с порядком 4. Его функция устойчивости имеет вид

$$R(z) = \frac{1 + z/2 + z^2/12}{1 - z/2 + z^2/12}.$$

**Многостадийные ABC-схемы.** Эти методы определяются следующими формулами:

$$(I + A_i h f_y + B_i h^2 f_y^2) (u_i(h) - y_0) = (\alpha_i I + C_i h f_y) h f(u_{i-1}),$$
$$i = 1, \dots, s, \quad u_0(h) = y_0, \quad (6)$$

$$y_1(h) = \sum_{i=1}^s \beta_i u_i(h), \quad \sum_{i=1}^s \beta_i = 1. \quad (7)$$

Здесь  $s$  — число стадий метода,  $A_i, B_i, C_i, \alpha_i, \beta_i$  — определяющие метод коэффициенты, а остальные обозначения такие же, как в (2).

**Теорема 7.** Функция устойчивости многостадийной ABC-схемы определяется по формуле

$$R(z) = \sum_{i=1}^s \beta_i R_i(z),$$

которая вычисляется с помощью рекурсии

$$R_i(z) = 1 + \frac{P_i(z)}{Q_i(z)} R_{i-1}(z), \quad i = 1, \dots, s,$$

$$R_0(z) = 1, \quad P_i(z) = \alpha_i z + C_i z^2, \quad Q_i(z) = 1 + A_i z + B_i z^2$$

**Доказательство** получается непосредственно применением формул (6) и (7) к тесту Далквиста  $y' = \lambda y, y(x_0) = y_0$ .

**Замечание 2.** Высказанные в замечании 1 соображения о повышении экономичности ABC-схем в еще большей степени актуальны в случае многостадийных ABC-схем. Поэтому основной интерес представляют схемы, в которых для всех стадий коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  одинаковы и  $B = A^2/4$ .

**Примеры двухстадийных ABC-схем.** Так как исследовать многостадийные ABC-схемы значительно сложнее, чем одностадийные, мы приведем здесь лишь пару примеров двухстадийных схем.

**Пример 1.** При выборе  $A_1 = A_2 = A, B_1 = B_2 = A^2/4$  и  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = 2/3, \beta_2 = 1/3$  получаем однопараметрическое семейство методов третьего порядка с параметром  $A$ ; при этом

$$C_1 = -\frac{3}{4}A^2 + \frac{1}{2}A, \quad C_2 = \frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2}.$$

Функция устойчивости при  $z \rightarrow \infty$  принимает вид

$$R(\infty) = -5 + \frac{4}{A^2} + \frac{4}{3A^3}.$$

Эти методы  $A$ -устойчивы в интервале значений  $-0,743 \leq A \leq -0,394$ , а  $L$ -устойчивые методы получаются при  $A = -0,590$  и  $A = -0,439$ .

**Пример 2.** Снова положим  $A_1 = A_2 = A$ ,  $B_1 = B_2 = A^2/4$ , но теперь возьмем другие значения коэффициентов:  $\alpha_1 = 4/3$ ,  $\alpha_2 = 12/25$ ,  $\beta_1 = 39/64$ ,  $\beta_2 = 25/64$ . В этом случае тоже получается однопараметрическое семейство методов третьего порядка с параметром  $A$ , но на этот раз

$$C_1 = -\frac{2}{5}A^2 + \frac{14}{15}A + \frac{4}{15}, \quad C_2 = \frac{78}{125}A^2 + \frac{138}{125}A + \frac{28}{125}.$$

Функция устойчивости при  $z \rightarrow \infty$  принимает вид

$$R(\infty) = -0,56 + \frac{4,88}{A} + \frac{7,921}{A^2} + \frac{3,147}{A^3} + \frac{0,3734}{A^4}.$$

Эти методы  $A$ -устойчивы приблизительно в интервале значений

$$-1,354 \leq A \leq -0,702,$$

а  $L$ -устойчивый метод получается при  $A = -0,913$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов С. С.  $ABC$ -схемы для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук. – 2004. – Т. 399, № 2. – С. 170–172.  
//
2. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
4. Булатов М. В., Тыглиян А. В., Филиппов С. С. Об одном классе одношаговых одностадийных методов для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 7. – С. 1251–1265.
5. Rosenbrock H. H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // The Computer Journal. – 1963. – Vol. 5. – P. 329–330.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012