

И. В. Станкевич

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ  
С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ**

*Представлен алгоритм численного решения контактной задачи взаимодействия вязкоупругих тел с помощью альтернирующего метода Шварца. Алгоритм основан на конечно-элементной технологии. Для определения компонент тензора деформации ползучести использованы явная и неявная схемы Эйлера.*

**E-mail:** aplmex@yandex.ru

**Ключевые слова:** вязкоупругая среда, контактная задача, деформация ползучести, альтернирующий метод Шварца, метод конечных элементов, явная схема Эйлера, неявная схема Эйлера.

Для надежной оценки ресурса элементов конструкций объектов энергомашиностроения, работающих в условиях высокоинтенсивного термомеханического нагружения, вызванного, в том числе и контактным взаимодействием, важным является оценка напряженно-деформированного состояния, полученная с учетом такого явления, как ползучесть конструкционных материалов. Таким образом, возникает необходимость решения контактных задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) с учетом деформации ползучести. Аналитические решения контактных задач получены для весьма ограниченного числа видов контактного взаимодействия и форм контактирующих поверхностей, а в подавляющем большинстве практически важных ситуаций, связанных с принятием конструктивных решений, например, для контактирующих тел, имеющих сложную геометрическую форму, и при сравнительно невысоких требованиях к гладкости функций, входящих в формулировку краевых задач, наиболее перспективны численные методы, среди которых продолжительное время лидирующее положение занимает метод конечных элементов (МКЭ) [1].

**Математическая постановка контактной задачи МДТТ.** Рассмотрим два трехмерных однородных и изотропных вязкоупругих контактирующих тела  $A$  и  $B$ , занимающих в пространстве  $\mathbb{R}^3$  области  $G_A$  и  $G_B$  и ограниченных кусочно-гладкими границами  $\partial G_A$  и  $\partial G_B$ . Введем декартовую систему координат  $OX_1X_2X_3$  (см. рисунок).

Математическая формулировка квазистатической несвязанной контактной задачи МДТТ в этом случае будет включать:

- уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}\{\mathbf{u}, T\} + Q_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \mathbf{X} \in G_\alpha; \quad i, j = \overline{1, 3}; \quad \alpha \in \{A, B\}; \quad (1)$$

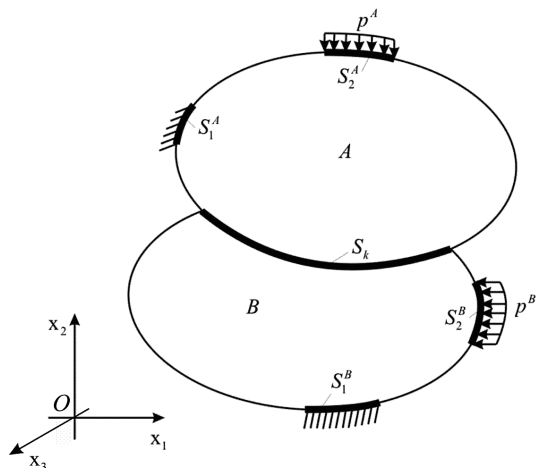


Схема контактного взаимодействия двух тел

- граничные условия (кинематические и силовые)

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)|_{S_1^\alpha} = \mathbf{u}^0(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in S_1^\alpha \subset \partial G_\alpha; \quad \alpha \in \{A, B\}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}\{\mathbf{u}, T\}n_j|_{S_2^\alpha} &= p_i(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha; \\ i, j &= \overline{1, 3}; \quad \alpha \in \{A, B\}; \end{aligned} \quad (3)$$

- соотношения Коши (безындексная запись)

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X}, t) = Def \mathbf{u}(\mathbf{X}, t); \quad \mathbf{X} \in G_\alpha; \quad \alpha \in \{A, B\}; \quad (4)$$

- определяющие уравнения (безындексная запись)

$$\tilde{\sigma} = \underset{\sim}{\mathbb{F}}(\tilde{\varepsilon}, T); \quad (5)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  — вектор перемещения точки, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{X} = x_i \mathbf{e}_i$ ;  $\mathbf{u}^0(\mathbf{X}, t)$  — вектор перемещения точки, расположенной на поверхности  $S_1^\alpha$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ ;  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  — тензор деформации;  $\tilde{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  — тензор напряжений;  $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) = Q_i(\mathbf{X}, t) \mathbf{e}_i$  — вектор массовых сил, здесь  $\mathbf{X} \in G_\alpha$ ;  $\alpha \in \{A, B\}$ ;  $\mathbf{p}(\mathbf{X}, t) = p_i(\mathbf{X}, t) \mathbf{e}_i$  — вектор внешней нагрузки, действующей на поверхности  $S_2^\alpha$ , здесь  $\mathbf{X} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha$ ;  $\alpha \in \{A, B\}$ ;  $\underset{\sim}{\mathbb{F}}(\tilde{\varepsilon}, T)$  — тензор-оператор определяющих уравнений.

Так как контактная задача рассматривается в квазистатической постановке, поэтому время  $t$  является параметром задачи и изменяется в пределах  $0 \leq t \leq t_{\max}$ , где  $t_{\max}$  — максимальное (общее) время процесса деформирования.

Запись  $\sigma_{ij}\{\mathbf{u}, T\}$  означает, что выполнены все необходимые преобразования, позволяющие тензор напряжений  $\tilde{\sigma}$  выразить через век-

тор перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  и температуру  $T(\mathbf{X}, t)$ . В дальнейшем аргументы у функций будем опускать, если это не будет приводить к противоречию. Кроме массовых  $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$  и поверхностных  $\mathbf{p}(\mathbf{X}, t)$  сил в отдельных  $n_R^\alpha$  точках внешней поверхности  $\partial G_\alpha$  ( $\alpha \in \{A, B\}$ ) с фиксированными координатами  $\mathbf{X}_k$  ( $k = \overline{1, n_R^\alpha}$ ) могут быть заданы дискретные силы  $\mathbf{R}_k(t)$ .

Кроме того, на поверхности контакта  $S_k = S_k^A = S_k^B$  (см. рисунок) должны быть выполнены условия контактного взаимодействия, т.е. условия сопряжения по перемещениям (кинематическое условие)

$$u_n^A(\mathbf{X}, t) - u_n^B(\mathbf{X}, t) = \delta_n(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in S_k; \quad (6)$$

и по напряжениям (силовое условие)

$$\sigma_n^A(\mathbf{X}, t) = -\sigma_n^B(\mathbf{X}, t) \leq 0, \quad \mathbf{X} \in S_k; \quad (7)$$

здесь  $u_n^A, u_n^B$  — проекции векторов перемещений граничных точек на направление внешней нормали к границе тела  $A$ ;  $\delta_n$  — начальное расстояние (зазор) по нормали между граничными точками тел  $A$  и  $B$ ;  $\sigma_n^A, \sigma_n^B$  — проекции векторов напряжений  $\sigma^A$  и  $\sigma^B$  на направление внешней нормали к границе тела  $A$ . Здесь  $S_1^\alpha \cup S_2^\alpha \cup S_k^\alpha = \partial G_\alpha$ ,  $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_2^\alpha) = 0$ ,  $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$ ,  $\text{mes}(S_2^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

Совокупность соотношений (1)–(7) составляет математическую формулировку контактной задачи МДТТ. Предполагается, что все функции, входящие в данную формулировку, являются измеримыми ограниченными. Кроме того, потребуем, чтобы они обладали достаточной гладкостью.

Для решения задачи (1)–(7) необходимо иметь заданный в явном виде тензор-оператор определяющих уравнений  $\overset{\vee}{\mathbb{F}}(\underline{\varepsilon}, T)$ . Структура определяющих уравнений (5) зависит от программ нагружения и проявляющихся при этом свойств материала. При решении задач МДТТ с учетом деформации ползучести широкое применение нашли различные варианты теории наследственной ползучести и трех основных технических теорий — старения, течения и упрочнения [2–5]. Известны также теории, использующие для описания ползучести аппарат структурных моделей и механических аналогов [6–8].

Большинство теорий ползучести удовлетворительно описывает деформирование при постоянных и/или медленно изменяющихся нагрузках. Анализ напряженно-деформированного состояния при переменных нагрузках лучше описывается с использованием теорий течения и упрочнения, при этом теория упрочнения имеет некоторые преимущества перед теорией течения, так как несколько точнее аппроксимирует результаты экспериментов [2]. С точки зрения организации вычислительного процесса технические теории имеют известные преимущества перед наследственными [2, 3].

Таким образом, рассматриваемая задача имеет две особенности, одна из которых — наличие контактного взаимодействия, а вторая — необходимость учета деформации ползучести. Для решения данной задачи предлагается построить итерационный процесс, в рамках которого на каждой итерации осуществляется решение некоторой задачи теории упругости и на основании результатов ее решения выполняется коррекция кинематических и силовых условий в зоне контакта и компонент тензора деформации ползучести.

Для коррекции кинематических и силовых условий в зоне контакта можно использовать алгоритм, основанный на альтернирующем методе Шварца [9–12].

**Основные процедуры альтернирующего метода Шварца.** Альтернирующий метод Шварца является итерационным методом. Его суть в рамках конечно-элементной технологии состоит в следующем. На четных итерациях выполняется коррекция компонент векторов перемещений контактных узлов  $\{U_k\}_{(A)}$  и  $\{U_k\}_{(B)}$  конечно-элементных моделей тел  $A$  и  $B$  (см. рис. 1). Для тела  $A$  корректирующие выражения имеют вид

$$\{U_k\}_{(A),m}^{2n} = \begin{cases} \{U_k\}_{(A),m}^{2n}, & n = 0; \\ \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} + \alpha_{(A),m}^{2n-1} \left( \{U_k\}_{(B),s}^{2n-1} - \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} \right), & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\alpha_{(A),m}^{2n-1}$  — итерационный параметр;  $m$  ( $1 \leq m \leq M_A$ ) — номер текущего узла, лежащего на контактной поверхности  $S_k^A$  тела  $A$ , здесь  $M_A$  — число контактных узлов на поверхности  $S_k^A$ ;  $\{U\}_{(B),s}^{2n-1}$  — вектор перемещения сходственной точки  $s$ , лежащей на контактной поверхности  $S_k^B$  тела  $B$ . Здесь для простоты принято, что  $\delta_n = 0$  (см. (6)).

Аналогичные соотношения используются для коррекции компонент векторов перемещений контактных узлов конечно-элементной модели тела  $B$ . Далее выполняется решение двух подобных задач теории упругости, в которых векторы  $\{U_k\}_{(A)}$  и  $\{U_k\}_{(B)}$  выполняют роль дополнительных кинематических граничных условий.

На нечетных итерациях проводится коррекция компонент векторов узловых сил  $\{R_k\}_{(A)}$  и  $\{R_k\}_{(B)}$ , возникающих в контактных узлах конечно-элементных моделей тел  $A$  и  $B$ . Для тела  $A$  корректирующее выражение имеет вид

$$\{R_k\}_{(A),m}^{2n+1} = \{R_k\}_{(A),m}^{2n} - \alpha_{(A),m}^{2n} \left( \{R_k\}_{(B),s}^{2n} + \{R_k\}_{(A),m}^{2n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (9)$$

здесь  $\alpha_{(A),m}^{2n}$  — итерационный параметр;  $m$  ( $1 \leq m \leq M_A$ ) — номер текущего узла, лежащего на контактной поверхности  $S_k^A$  тела  $A$ ,

$\{R_k\}_{(B),s}^{2n}$  — вектор контактной узловой силы в сходственной точке  $s$ , лежащей на контактной поверхности  $S_k^B$  тела  $B$ . Аналогичное соотношение используется для коррекции компонент векторов узловых сил, возникающих в контактных узлах конечно-элементной модели тела  $B$ .

Векторы  $\{R_k\}_{(A)}$  и  $\{R_k\}_{(B)}$  используются при формировании глобальных векторов узловой нагрузки  $\{R\}_{(A)}$  и  $\{R\}_{(B)}$  тел  $A$  и  $B$  [1]. Затем проводится решение двух подобных задач теории упругости.

Таким образом, данный алгоритм состоит в реализации итерационного процесса поочередного задания на поверхностях контакта  $S_k^A$  и  $S_k^B$  векторов перемещений  $\mathbf{u}_k^A$  и  $\mathbf{u}_k^B$  и векторов контактных сил  $\mathbf{p}_k^A$  и  $\mathbf{p}_k^B$ , а также в их соответствующей коррекции с тем, чтобы были выполнены либо силовые контактные условия, если в зоне контакта заданы перемещения, либо кинематические, если заданы контактные силы. Вопросы сходимости подобного типа алгоритмов рассмотрены в работах [11, 12]. Примеры численного решения контактных задач теории упругости с помощью данного алгоритма приведены в работах [9, 10].

**Основные алгоритмы для решения краевых контактных задач МДТТ с учетом деформации ползучести.** При решении МКЭ краевых задач МДТТ с учетом деформаций ползучести весьма часто используют схемы Эйлера — явную или неявную. В зависимости от особенностей рассматриваемой задачи алгоритм решения строится либо в соответствии с методом начальных напряжений, либо — методом начальных деформаций [3, 13]. Метод начальных деформаций при решении задач с учетом ползучести используется чаще, поскольку применение метода начальных напряжений для этого класса задач технически значительно сложнее. Ниже рассматриваются явная и неявная схемы Эйлера в сочетании с МКЭ. Обе схемы формулируются в соответствии с методом начальных деформаций. Определяющее соотношение, для примера, было выбрано в форме теории течения.

**Явная схема Эйлера.** Данная схема реализуется в соответствии со следующим алгоритмом.

1. В начальный момент времени  $t_k = t_0 = 0$  принимается, что во всех конечных элементах ( $e$ ) конечно-элементных моделей тел  $A$  и  $B$  деформация ползучести отсутствует  $\{\varepsilon^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)} = \{\varepsilon^{c(e)}\}(t_0)_{(\alpha)} = \{0\}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ . В соответствии с процедурами МКЭ формируются глобальные матрицы жесткости  $[K]_{(\alpha)}$  и глобальные векторы нагрузки  $\{R\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$  [1].

2. Решается контактная задача теории упругости [9, 10].

3. Для каждого конечного элемента ( $e$ ) тел  $A$  и  $B$  вычисляется вектор напряжений  $\{\sigma^{(e)}\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

4. Из принятых определяющих соотношений находится вектор скорости деформации ползучести  $\{\varepsilon^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)} = \{f(\{\sigma^{(e)}\}_{(\alpha)}, t_k)\}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

5. Для момента времени  $t_{k+1}$  вычисляется вектор деформации ползучести

$$\{\varepsilon^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} = \{\varepsilon^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)} + \Delta t \{\dot{\varepsilon}^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)}, \alpha \in \{A, B\}.$$

где  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  — шаг по времени.

6. Формируется локальный вектор узловых сил, эквивалентный действию деформации ползучести в объеме рассматриваемого конечного элемента ( $e$ )

$$\{R_{\varepsilon^c}^{(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [H^{(e)}] \{\varepsilon^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} dv, \quad \alpha \in \{A, B\}.$$

В данном случае фиктивная начальная деформация принимается равной деформации ползучести.

7. Формируется глобальный вектор узловых сил, эквивалентный действию деформации ползучести в объеме всего рассматриваемого тела

$$\{R_{\varepsilon^c}\}_{(\alpha)} = \sum_{e=1}^{k_{el}} [a^{(e)}]^T \{R_{\varepsilon^c}^{(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)}, \quad \alpha \in \{A, B\}.$$

8. Формируются суммарные глобальные векторы нагрузки  $\{R_{\Sigma}\}_{(\alpha)} = \{R\}_{(\alpha)} + \{R_{\varepsilon^c}\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ , учитывающие действие заданной нагрузки ( $\{R\}_{(\alpha)}$ ) и нагрузки, определяемой деформацией ползучести ( $\{R_{\varepsilon^c}\}_{(\alpha)}$ ).

9. Решается контактная задача теории упругости.

10. Если заданный интервал времени пройден ( $t_{k+1} \geq t_{max}$ ), то вычисления заканчиваются, в противном случае делается переход к пункту 3.

Глобальные матрицы жесткости  $[K]_{(\alpha)}$  и векторы нагрузки  $\{R\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$  строятся на каждом шаге по времени только в том случае, если их компоненты изменяются, например, зависят от температуры, которая, в свою очередь, зависит от времени.

Очевидным преимуществом этой схемы является ее простота и экономичность. Однако явная схема весьма чувствительна к выбору величины шага  $\Delta t$  по времени.

**Неявная схема Эйлера.** Данная схема может быть реализована в соответствии со следующим алгоритмом.

1. В начальный момент времени  $t_k = t_0 = 0$  принимается, что во всех конечных элементах ( $e$ ) конечно-элементных моделей тел  $A$  и  $B$  деформация ползучести отсутствует  $\{\varepsilon^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)} = \{\varepsilon^{c(e)}(t_0)\}_{(\alpha)} = \{0\}$ ,

$\alpha \in \{A, B\}$ . В соответствии с процедурами МКЭ формируются глобальные матрицы жесткости  $[K]_{(\alpha)}$  и глобальные векторы нагрузки  $\{R\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

2. Решается контактная задача теории упругости.

3. Для каждого конечного элемента  $(e)$  тел  $A$  и  $B$  вычисляется вектор напряжений  $\{\sigma^{(e)}\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

4. Из принятых определяющих соотношений находится вектор скорости деформации ползучести  $\{\dot{\varepsilon}^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)} = \{f(\{\sigma^{(e)}\}_{(\alpha)}, t_k)\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

5. Фиксируется вектор  $\{\varepsilon_{old}^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} = \{\varepsilon^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)}$  и принимается, что  $\{\dot{\varepsilon}^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} = \{\dot{\varepsilon}^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

6. Для момента времени  $t_{k+1}$  вычисляется вектор деформации ползучести

$$\begin{aligned} & \{\varepsilon^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} = \\ & = \{\varepsilon^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)} + \Delta t [(1 - \beta)\{\dot{\varepsilon}^{c(e)}(t_k)\}_{(\alpha)} + \beta\{\dot{\varepsilon}^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)}], \end{aligned}$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени ( $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ );  $\beta$  — параметр ( $\beta \geq 0,5$ ),  $\alpha \in \{A, B\}$ .

7. Оценивается сходимость итераций внутри рассматриваемого шага по времени: если для тел  $A$  и  $B$  выполняется неравенство

$$\max_{1 \leq e \leq k_{el}} \left\| \{\varepsilon^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} - \{\varepsilon_{old}^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} \right\| < \delta_{\varepsilon^c}, \quad \alpha \in \{A, B\}.$$

где  $\delta_{\varepsilon^c}$  — заданная точность, то выполняется переход к пункту 13, в противном случае — к пункту 8.

8. Формируются векторы  $\{R_{\varepsilon^c}\}_{(\alpha)} = \sum_{e=1}^{k_{el}} [a^{(e)}]^T \{R_{\varepsilon^c}^{(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ , здесь  $\{R_{\varepsilon^c}^{(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [H^{(e)}] \{\varepsilon^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} dv$ .

9. Решается контактная задача теории упругости.

10. Для каждого конечного элемента  $(e)$  тел  $A$  и  $B$  вычисляется вектор напряжений  $\{\sigma^{(e)}\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ .

11. Фиксируются векторы  $\{\varepsilon_{old}^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} = \{\varepsilon^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)}$  и вычисляются векторы скоростей деформации ползучести с учетом полученных векторов напряжений  $\{\sigma^{(e)}\}_{(\alpha)}$ , ( $\alpha \in \{A, B\}$ )

$$\{\dot{\varepsilon}^{c(e)}(t_{k+1})\}_{(\alpha)} = \{f(\{\sigma^{(e)}\}_{(\alpha)}, t_{k+1})\}_{(\alpha)}, \quad \alpha \in \{A, B\}.$$

12. Выполняется переход к пункту 6.

13. Если заданный интервал времени пройден ( $t_{k+1} \geq t_{max}$ ), то вычисления заканчиваются, в противном случае делается переход к пункту 5.

При реализации неявной схемы глобальные матрицы жесткости  $[K]_{(\alpha)}$  и векторы нагрузки  $\{R\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ , как и в случае явной схемы, могут быть построены в начале расчета и затем оставаться

постоянными. Если их компоненты изменяются, например, зависят от температуры, которая в свою очередь зависит от времени, то матрицы жесткости  $[K]_{(\alpha)}$  и векторы нагрузки  $\{R\}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{A, B\}$ , строятся на каждом шаге по времени, однако на итерациях внутри шагов остаются постоянными.

Неявная схема менее чувствительна к величине шага по времени  $\Delta t$ , однако итерационный процесс внутри шага может потребовать заметных затрат процессорного времени.

Одной из модификаций как явной, так и неявной схем, направленной на повышение вычислительной эффективности, является следующая [14]. После того, как определены векторы напряжений  $\{\sigma^{(e)}\}_{(\alpha)}$ , ( $\alpha \in \{A, B\}$ ), вычисляются глобальные векторы невязки узловых сил конечно-элементных моделей тел  $A$  и  $B$

$$\{Z\}_{\alpha} = \{R\}_{\alpha} - \sum_{e=1}^{k_{el}} [a^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T \{\sigma^{(e)}\}_{\alpha} dv,$$

которые затем прибавляются к правым частям основных матричных уравнений [1]

$$[K]_{(\alpha)}\{U\}_{\alpha} = \{R\}_{\alpha} + \{R_{\varepsilon^c}\}_{\alpha} + \gamma\{Z\}_{\alpha},$$

здесь  $\gamma$  — весовой множитель (подбирается экспериментально), при этом все остальные процедуры сохраняются.

**Выводы.** Изложен алгоритм численного решения контактной задачи взаимодействия вязкоупругих тел с помощью альтернирующего метода Шварца. Алгоритм основан на конечно-элементной технологии. Представлены процедуры, позволяющие учесть деформацию ползучести в рамках явной и неявной схем Эйлера.

*Работа выполнена в рамках гранта поддержки ведущих научных школ № НШ-255.2012.8.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котлович А. В., Станкевич И. В. Решение задач теории упругости методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 106 с.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
3. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.
4. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций / А.Н. Подгорный, В.В. Бортовой, П.П. Гонгаровский и др. Киев: Наукова думка, 1984. 264 с.
5. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
6. Новожилов В. В., Кадашев Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
7. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.



8. З а р у б и н В. С. Прикладные задачи термopрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
9. С т а н к е в и ч И. В., Я к о в л е в М. Е., С и Т у Х т е т. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. 2011. Спецвыпуск “Прикладная математика”. С. 134–141.
10. С т а н к е в и ч И. В., Я к о в л е в М. Е., С и Т у Х т е т. Математическое моделирование контактного взаимодействия упругопластических сред // Наука и образование [электронный ресурс]. 2012. № 4. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/353180.html> (дата обращения 23.07.2012).
11. З а р у б и н В. С., С т а н к е в и ч И. В. Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
12. Ц в и к Л. Б. Принцип поочередной непрерывности при решении задач теории поля по частям // Доклады АН СССР. 1978. Т.243, № 1. С. 74–77.
13. Ц в и к Л. Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т. 16. № 1. С. 13–18.
14. Т е м и с Ю. М. Прикладные задачи термопластичности и термоползучести // Машиностроение. Энциклопедия: В 3 т. / Под общ. ред. К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1994. Т. 2. С. 226–272.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012