

Точное решение задачи расчета деформаций и напряжений композитного обтекателя конической формы при температурном и силовом нагружении

© Б.С. Сарбаев, В.В. Ражев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье рассмотрен аналитический способ расчета одного из самых распространенных конструктивных элементов летательных аппаратов — обтекателя, который представляет собой тонкостенную коническую оболочку вращения. Обтекатель подвергается воздействию силовой и тепловой нагрузок, причем тепловое поле изменяется вдоль образующей и по толщине оболочки. Аналитическое решение задачи расчета обтекателя, изготовленного из композиционного материала, сводится к решению неоднородного уравнения Бесселя относительно комплексной функции, порядок которого определяется соотношением модулей упругости материала в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Способ нахождения решения этого уравнения, при котором в качестве частного решения берется решение по безмоментной теории, является приближенным. Поэтому возникает вопрос об адекватности решений, найденных этим способом. В статье представлено точное решение уравнения Бесселя, найденное методом вариации постоянных. На конкретном примере проведен анализ точного решения и сопоставление приближенного решения с точным. Исследование точного решения позволяет избежать ошибок, связанных с использованием безмоментной теории. Рассмотренный метод можно использовать для повышения адекватности оценок компонент напряженно-деформированного состояния обтекателя.

Ключевые слова: композиционный материал, коническая оболочка, неравномерный нагрев, точное аналитическое решение, обтекатель, неоднородное уравнение Бесселя.

Введение. Обтекатель представляет собой тонкостенную коническую оболочку вращения. Данный конструктивный элемент распространен в летательных аппаратах различного назначения и подвергается значительной нагрузке в виде аэродинамического давления и нагрева, поэтому требуется проводить анализ напряженно-деформируемого состояния обтекателя. В работе [1] предложен способ расчета обтекателя, который сводится к решению неоднородной системы двух дифференциальных уравнений относительно угла поворота и переменной Мейсснера. Частное решение системы берется по безмоментной теории оболочек вращения. Этот способ дает приближенные результаты, поэтому для повышения точности оценок компонент напряженно-деформируемого состояния предложено точное решение, полученное методом вариации постоянных.

Математическая модель. Соотношения термоупругости при осесимметричном нагружении для ортотропной конической оболочки вращения, которые связывают меридиональные и окружные силовые факторы с параметрами деформированного состояния, выражены следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1 \left(\frac{du}{ds} + \frac{\nu_{21}u_2}{s \sin \alpha} \right) - B_{1T}t(s), \\ T_2 &= B_2 \left(\nu_{12} \frac{du}{ds} + \frac{u_2}{s \sin \alpha} \right) - B_{2T}t(s), \\ M_1 &= D_1 \left(\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\nu_{21}\vartheta}{s} \right) - B_{1T}m(s), \\ M_2 &= D_2 \left(\nu_{12} \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\vartheta}{s} \right) - B_{2T}m(s), \end{aligned} \quad (1)$$

где ϑ — угол поворота нормали в меридиональном направлении. Введены такие обозначения:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ B_{1T} &= \frac{B_1}{h} (\beta_{11} + \nu_{21}\beta_{22}), \quad B_{2T} = \frac{B_2}{h} (\nu_{12}\beta_{11} + \beta_{22}), \\ D_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ t(s) &= \int_{-h/2}^{h/2} T(s, z) dz = T_{\max} hca^{\frac{s-s_1}{s_2-s_1}} \ln \mu, \\ m(s) &= \int_{-h/2}^{h/2} T(s, z) z dz = T_{\max} hca^{\frac{s-s_1}{s_2-s_1}} (b \ln \mu - h). \end{aligned} \quad (2)$$

В работе [1] представлена расчетная схема и температурное поле $T(s, z)$, на основании дифференциальных уравнений равновесия, уравнения совместности деформаций для конической оболочки и переменной Мейсснера

$$V(s) = \frac{Q(s)s}{\operatorname{ctg} \alpha},$$

где $Q(s)$ — поперечная погонная сила, получена неоднородная система дифференциальных уравнений относительно $\vartheta(s)$ и $V(s)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{n^2}{s^2} \vartheta &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{D_1} \frac{V - V^*}{s}, \\ \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dV}{ds} - \frac{n^2}{s^2} V &= -E_2 h \operatorname{ctg} \alpha \frac{\vartheta - \vartheta^*}{s}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} V^* &= -\operatorname{tg} \alpha \left(s \frac{dm_{1T}}{ds} + m_{1T} - m_{2T} \right); \\ \vartheta^* &= \frac{-\operatorname{tg}^2 \alpha}{E_2 h} \left[\frac{d(s^2 q_2)}{ds} + v_{21} s q_1 \operatorname{ctg} \alpha - n^2 \frac{\Phi(s)}{s \sin^2 \alpha} \right] + \\ &+ s \operatorname{tg} \alpha \left[\beta_{22} \frac{d}{ds} \left(\frac{t}{h} \right) - \frac{\beta_{11} - \beta_{22}}{s} \frac{t}{h} \right]; \\ m_{1T} &= B_{1T} m(s); \quad m_{2T} = B_{2T} m(s); \quad n^2 = \frac{E_2}{E_1}; \end{aligned}$$

$$\Phi(s) = \int_{s_1}^s (q_2 \sin \alpha - q_1 \cos \alpha) r ds + K,$$

постоянную K находят из граничных условий.

В правой части системы (3) учитывается не только температурное поле, но и распределенные нагрузки — меридиональная q_1 и нормальная q_2 .

Приведем систему (3) к неоднородному уравнению Бесселя, используя, как в работе [2], следующий прием — домножим второе уравнение системы на постоянную \tilde{a} , такую, что

$$E_2 h \operatorname{ctg} \alpha \frac{\tilde{a}}{s} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{P_1 s \tilde{a}},$$

т. е.

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 E_2}} \frac{1}{h^2} i \hat{=} \frac{1}{k} i,$$

и сложим с первым уравнением, введя комплексную функцию вида

$$\Phi(s) = \vartheta(s) + i \frac{V(s)}{k}.$$

Обозначив

$$\beta^2 \triangleq \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{h} \sqrt{12n^2(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

введем новую переменную z : $z = 2\sqrt{i}x$, где $x = x(s) = \beta\sqrt{s}$. Для изотропной конической оболочки аналогичные преобразования приведены в работе [3].

После преобразований получим неоднородное уравнение Бесселя II рода порядка $2n$ относительно комплексной функции $\Phi(z)$:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\Phi}{dz} + \Phi \left(1 - \frac{4n^2}{z^2} \right) = \mathfrak{G}^* + \frac{i}{k} V^*. \quad (4)$$

Пусть

$$\Phi^*(z) = \mathfrak{G}^* + \frac{i}{K} V^*. \quad (5)$$

Решение данного уравнения ищем методом вариации постоянных. Известно, что решение однородного уравнения Бесселя порядка $\frac{3}{2}$ (в случае, когда $n^2 = \frac{9}{16}$, что на практике соответствует определенному виду композиционных материалов) записывается с помощью элементарных функций:

$$\Phi(z) = C_1\psi_1(z) + C_2\psi_2(z),$$

где

$$C_1 = A_1 + iA_2; \quad C_2 = B_1 + iB_2;$$

$$\psi_1(z) = \frac{\sin z}{z\sqrt{z}} - \frac{\cos z}{\sqrt{z}}; \quad \psi_2(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{z}} + \frac{\cos z}{z\sqrt{z}}.$$

Выделим действительную и мнимую части функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$. Введем следующие обозначения:

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}, \quad \bar{\beta} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}},$$

$$\bar{x} = \sqrt{2}x,$$

$$\Phi_1(x) = \cos \bar{x} \cdot \operatorname{ch} \bar{x}, \quad \Phi_3(x) = \sin \bar{x} \cdot \operatorname{ch} \bar{x},$$

$$\Phi_2(x) = \sin \bar{x} \cdot \operatorname{sh} \bar{x}, \quad \Phi_4(x) = \cos \bar{x} \cdot \operatorname{sh} \bar{x}.$$

После преобразований получим

$$\psi_1(z) = Y_1 + iY_2, \quad \psi_2(z) = Z_1 + iZ_2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \frac{1}{4\sqrt{2}x^2} \left[\frac{1}{3} \left[(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\Phi_3(x) + (\bar{\alpha} + \bar{\beta})\Phi_4(x) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\bar{\alpha}\Phi_1(x) - \bar{\beta}\Phi_2(x) \right] \right]; \\ Y_2(x) &= \frac{1}{4\sqrt{2}x^2} \left[\frac{1}{3} \left[(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\Phi_4(x) - (\bar{\alpha} + \bar{\beta})\Phi_3(x) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\bar{\alpha}\Phi_2(x) + \bar{\beta}\Phi_1(x) \right] \right]; \\ Z_1(x) &= \frac{1}{4\sqrt{2}x^2} \left[\frac{1}{3} \left[(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\Phi_1(x) - (\bar{\alpha} + \bar{\beta})\Phi_2(x) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\bar{\alpha}\Phi_3(x) + \bar{\beta}\Phi_4(x) \right] \right]; \\ Z_2(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{2}x^2} \left[\frac{1}{3} \left[(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\Phi_2(x) + (\bar{\alpha} + \bar{\beta})\Phi_1(x) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\bar{\alpha}\Phi_4(x) - \bar{\beta}\Phi_3(x) \right] \right]. \end{aligned}$$

Константы C_1 и C_2 найдем методом вариации постоянных:

$$\begin{aligned} C_1' &= -\Phi^*(z)\psi_2(z)\frac{1}{w(z)}, \\ C_2' &= \Phi^*(z)\psi_1(z)\frac{1}{w(z)}, \end{aligned}$$

где $w(z)$ — вронскиан

$$w(z) = \begin{vmatrix} \psi_1(z) & \psi_2(z) \\ \psi_1'(z) & \psi_2'(z) \end{vmatrix} = -\frac{1}{z}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_1' &= \Phi^*(z)\psi_2(z)z, \\ C_2' &= -\Phi^*(z)\psi_1(z)z. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим формулы (5) и (6) в выражения (7) и проинтегрируем. Получим следующие выражения для определения C_1 и C_2 :

$$C_1 = -2\beta^2 \int_{s_2}^s \mathfrak{G}^*(s) Z_2 + \frac{V^*}{k} Z_1 + i \left(\frac{V^*}{k} Z_2 - \mathfrak{G}^*(s) Z_1 \right) ds + K_1 + iK_2;$$

$$C_2 = 2\beta^2 \int_{s_1}^s \mathfrak{G}^*(s) Y_2 + \frac{V^*}{k} Y_1 + i \left(\frac{V^*}{k} Y_2 - \mathfrak{G}^*(s) Y_1 \right) ds + K_3 + iK_4. \quad (8)$$

Подставим (8) в выражение для $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = C_1 (Y_1 + Y_2) + C_2 (Z_1 + iZ_2)$$

и выделим действительную и мнимую части $\Phi(z)$ согласно определению:

$$\Phi(z) = \mathfrak{G}(z) + \frac{i}{k} V(z).$$

Получим точное решение уравнения (4):

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(s) = & -2\beta^2 \left[\int_{s_2}^s \mathfrak{G}^*(s) Z_2(s) + \frac{V^*(s)}{k} Z_1(s) ds Y_1(s) - \right. \\ & \left. - \int_{s_2}^s \frac{V^*(s)}{k} Z_2(s) - \mathfrak{G}^*(s) Z_1(s) ds Y_2(s) \right] + \\ & + 2\beta^2 \left[\int_{s_1}^s \mathfrak{G}^*(s) Y_2(s) + \frac{V^*(s)}{k} Y_1(s) ds Z_1(s) - \right. \\ & \left. - \int_{s_1}^s \frac{V^*(s)}{k} Y_2(s) - \mathfrak{G}^*(s) Y_1(s) ds Z_2(s) \right] + \\ & + K_1 Y_1(s) + K_3 Z_1(s) - K_2 Y_2(s) + K_4 Z_2(s), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V(s)}{K} = & -2\beta^2 \left[\int_{s_2}^s \mathfrak{G}^*(s) Z_2(s) + \frac{V^*(s)}{k} Z_1(s) ds Y_2(s) + \right. \\ & \left. + \int_{s_2}^s \frac{V^*(s)}{k} Z_2(s) - \mathfrak{G}^*(s) Z_1(s) ds Y_1(s) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\beta^2 \left[\int_{s_1}^s \vartheta^*(s) Y_2(s) + \frac{V^*(s)}{k} Y_1(s) ds Z_2(s) + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{s_1}^s \frac{V^*(s)}{k} Y_2(s) - \vartheta^*(s) Y_1(s) ds Z_1(s) \right] + \\
 &\quad + K_1 Y_2(s) + K_2 Y_1(s) + K_3 Z_2(s) + K_4 Z_1(s). \tag{10}
 \end{aligned}$$

Константы K_1, K_2, K_3, K_4 найдем из следующих граничных условий для конструкции, рассмотренной в работе [1]:

$$\begin{aligned}
 s = s_1 : \quad \vartheta = 0, \quad \mathcal{E}_2 = 0, \\
 s = s_2 : \quad \vartheta = 0, \quad \mathcal{E}_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Из первых двух уравнений системы (1) выразим окружную деформацию:

$$\mathcal{E}_2(s) = \frac{1}{E_2 h} \left[\frac{dV(s)}{ds} - \nu_{21} \frac{V(s)}{s} \right] + \frac{B_{2T} - \nu_{21} B_{1T}}{E_2 h} t(s).$$

Пусть

$$\vartheta_1(s) = K_1 Y_1(s) + K_3 Z_1(s) - K_2 Y_2(s) - K_4 Z_2(s),$$

$$V_1(s) = (K_1 Y_2(s) + K_2 Y_1(s) + K_3 Z_2(s) + K_4 Z_1(s)) k,$$

а $\vartheta_2(s)$ и $V_2(s)$ — оставшиеся слагаемые функций $\vartheta(s)$ $V(s)$ соответственно. Тогда из (11) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно K_1, K_2, K_3, K_4 . Она имеет вид

$$[A]\{K\} = [B], \tag{12}$$

где

$$[A] = \begin{pmatrix} Y_1(s_1) & -Y_2(s_1) & Z_1(s_1) & -Z_2(s_1) \\ Y_1(s_2) & -Y_2(s_2) & Z_1(s_2) & -Z_2(s_2) \\ f_1(Y_2(s_1)) & f_1(Y_1(s_1)) & f_1(Z_2(s_1)) & f_1(Z_1(s_1)) \\ f_1(Y_2(s_2)) & f_1(Y_1(s_2)) & f_1(Z_2(s_2)) & f_1(Z_1(s_2)) \end{pmatrix};$$

$$f_1(f(s_1)) \triangleq k \frac{df(s)}{ds} - \frac{\nu_{21}}{s} f(s) k; \quad f(s) - \text{любая функция от } s;$$

$$\{K\} = (K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4)^T;$$

$$[B] = (-\vartheta_2(s_1) \quad -\vartheta_2(s_2) \quad f_2(s_1) \quad f_2(s_2))^T;$$

$$f_2(s) = \frac{\mu_{21}}{s} V_2(s) - \frac{dV_2(s)}{ds} - (B_{2T} - \nu_{21} B_{1T}) t(s).$$

Итак, получено точное решение уравнения (4): угол поворота выражается формулой (9), переменная Мейсснера — формулой (10). Приближенное решение, приведенное в работе [1], основано на безмоментной теории. В этом случае формулы (9) и (10) приобретают следующий вид:

$$\vartheta_{\text{бм}}(s) = A_1 Y_1(s) - A_2 Y_2(s) + B_1 Z_1(s) - B_2 Z_2(s) + \vartheta^*(s);$$

$$\frac{V_{\text{бм}}(s)}{K} = A_1 Y_2(s) + A_2 Y_1(s) + B_1 Z_2(s) + B_2 Z_1(s) + \frac{V^*(s)}{k}.$$

Сравним точное и приближенное решение на конкретном примере.

Пример. Рассчитаем характеристики напряженно-деформированного состояния ортотропной конической оболочки, которая имеет следующие параметры:

$$\alpha = 75^\circ, \quad s_2/s_1 = 8,348, \quad h/s_1 = 0,581,$$

$$E_2/E_1 = 9/16, \quad \nu_{12} = 0,07, \quad \beta_{11}/\beta_{22} = 1,02.$$

Результаты расчета оформлены в виде графиков. В качестве координаты для построения графиков использовали $y = \frac{s}{s_1} - 1$. На рис. 1 показаны эпюры осевых и радиальных перемещений. На рис. 2 представлено распределение окружных напряжений на внутренней стороне конической оболочки. Отметим, что при $y = 1$ напряжения существенно отличаются — в 1,5 раза. Использование точного решения, полученного в данной статье, повышает точность при анализе напряженно-деформированного состояния обтекателя.

Заключение. Получено точное решение задачи расчета композитного обтекателя конической формы при силовом и тепловом нагружении. На конкретном примере проведено сопоставление точного и приближенного решений. Выявлено, что точное решение повышает точность при оценке компонент напряженно-деформированного состояния и может быть использовано вместо ранее предложенного приближенного решения. Полученное решение может быть применено при проектировании тонкостенных элементов конструк-

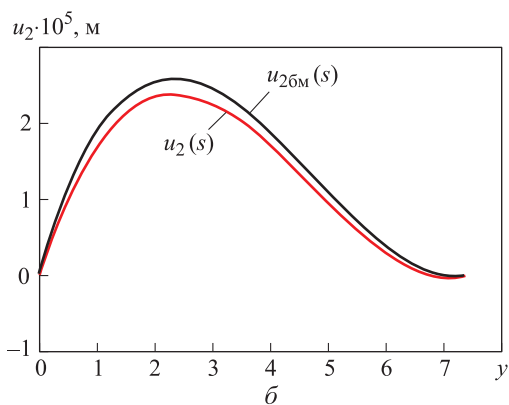
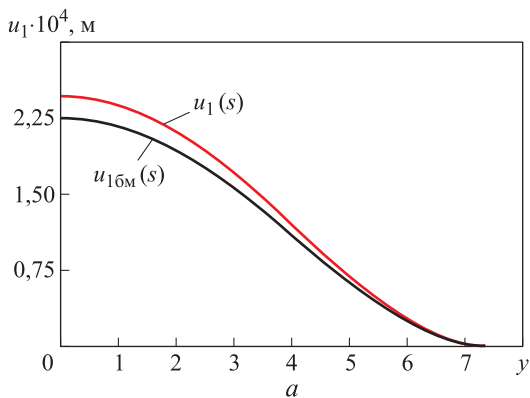


Рис. 1. Эпюры осевых (a) и радиальных (b) перемещений:

$u_1(s)$, $u_2(s)$ — точное решение; $u_{1\delta m}(s)$,
 $u_{2\delta m}(s)$ — приближенное решение

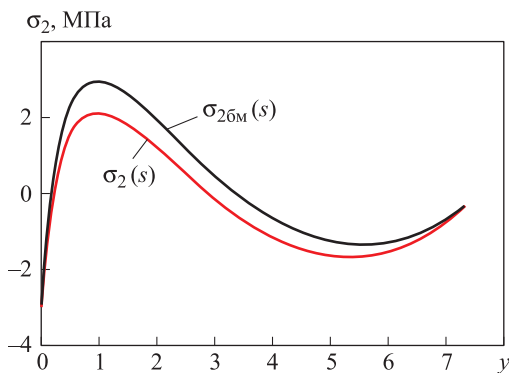


Рис. 2. Изменение окружных напряжений при $z = -h/2$:

$\sigma_2(s)$ — точное решение; $\sigma_{2\delta m}(s)$ —
 приближенное решение

ций в виде замкнутой конической оболочки, изготовленных из некоторых видов углерод-керамоматричных композиционных материалов, для которых выполняется соотношение $E_2/E_1 \approx 0,5$. При этом предлагаемый способ расчета требует существенно меньшего количества исходных данных по сравнению с расчетом по методу конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сарбаев Б.С. Расчет температурных деформаций и напряжений в композитном обтекателе конической формы. *Наука и образование: научное издание*, 2015, № 4, с. 58–72. DOI: 10.7463/0415.0765910
- [2] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва, Машиностроение, 1977, 488 с.
- [3] Weicheng Cui, Junhou Pei, Wei Zhang. A simple and accurate solution for calculating stresses in conical shells. *Computers and Structures*, 2001, № 79, p. 265–279. DOI: 10.1016/S0045-7949(00)00139-5

Статья поступила в редакцию 24.05.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сарбаев Б.С., Ражев В.В. Точное решение задачи расчета деформаций и напряжений композитного обтекателя конической формы при температурном и словом нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. .

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-06-1508>

Сарбаев Борис Сафиулович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области механики композитов, теории пластичности, нелинейного деформирования композитных материалов и конструкций. e-mail: bssarbayev@mail.ru

Ражев Валерий Васильевич — студент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: 125_00@mail.ru

Exact solution to the problem of computing strains and stresses for a conical composite fairing subjected to temperature and force loads

© B.S. Sarbaev, V.V. Razhev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Problems connected with analysis of temperature fields, stresses, and critical force loads arise during the process of designing structural elements for aircraft of various designations. Employing contemporary finite element software to solve such problems involves a labour-intensive process of selecting the right type of finite element, preparing and inputting initial data, and analysing the result obtained. However, analytical computation techniques are still valid. This article presents an analytical technique for calculating parameters of a fairing, one of the most widespread structural elements. A fairing is a thin-walled conical rotational shell. This structural element is subjected to force and temperature loads, the heat field varying along the generatrix and across the thickness of the shell. The analytical solution for the problem of computing the parameters of a fairing made out of a composite material amounts to solving an inhomogeneous Bessel equation with respect to a complex function, the order of which is determined by the elastic moduli ratio of the material in two perpendicular directions. The method of finding a solution to this equation that involves using a solution based on momentless theory as a particular solution is approximate. Therefore the question arises if the solutions found by this method are acceptable. This article presents an exact solution to the Bessel equation, obtained by the method of variation of parameters. We analyse the exact solution for a specific case and compare the approximate and exact solutions. Studying the exact solution helps to avoid errors related to employing the momentless theory. The method under consideration may be used to increase the correctness of estimating the components of the stress-strain state of the fairing.

Keywords: composite, conical shell, non-uniform heating, exact analytical solution, fairing, inhomogeneous Bessel equation.

REFERENCES

- [1] Sarbaev B.S. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. Baumana — Science and Education: Scientific Edition of Bauman MSTU*, 2015, no. 4, pp. 58–72. DOI: 10.7463/0415.0765910
- [2] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. Statika* [Thin Shell Structure Mechanics. Statics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 488 p.
- [3] Weicheng Cui, Junhou Pei, Wei Zhang. *Computers and Structures*, 2001, no. 79, pp. 265–279. DOI: 10.1016/S0045-7949(00)00139-5

Sarbaev B.S., Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 scientific publications in the fields of composite mechanics, plasticity theory, non-linear deformation of composite materials and structures. e-mail: bssarbayev@mail.ru

Razhev V.V., student of the Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: 125_00@mail.ru