УДК 517.1

Г. Е. Маркелов

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Изложен рациональный подход к построению математических моделей. Он является общим и универсальным. Его использование позволяет построить математические модели с нужными свойствами, уменьшая негативное влияние субъективного фактора при принятии решений на некоторых этапах математического моделирования.

E-mail: markelov@rambler.ru

Ключевые слова: *математическое моделирование, математическая модель, кумулятивная струя, коэффициент предельного удлинения.*

В различных областях естествознания математическое моделирование становится основным способом исследования и получения новых знаний, в дальнейшем следует ожидать, что и в других областях человеческой деятельности роль математического моделирования будет возрастать.

Возможности математического моделирования рассматриваются в обширной учебной и научной литературе, однако в некоторых случаях эти возможности используются не достаточно рационально. Одна из причин нерационального использования возможностей математического моделирования заключается в том, что построенные математические модели не обладают в полной мере нужными свойствами. Основными из таких свойств являются: свойство полноты, точности, адекватности, продуктивности, экономичности, робастности и свойство наглядности.

Целью настоящей работы является изложение единого подхода, позволяющего строить математические модели, которые обладают нужными свойствами.

Построение математической модели, обладающей нужными свойствами, предполагает выполнение соответствующих требований, предъявляемых к математической модели. Очевидно, что такие требования противоречивы и на практике могут быть удовлетворены на основе разумного компромисса. Последнее в значительной мере зависит от профессионального уровня исследователя, его творческого потенциала и интуиции.

Для получения математической модели с нужными свойствами имеет смысл выполнять правила и рекомендации, которые стали итогом обобщения практического опыта, накопленного при построении математических моделей.

В этой связи особый интерес представляют принципы построения математических моделей, которые носят общий и универсальный характер. Так, например, в работе [1] сформулированы следующие принципы: отказ от построения математической модели с широкой областью адекватности; принцип постепенного усложнения математической модели; принцип согласованности; принцип перехода к стохастической модели. Их разумное использование в совокупности позволяет разработать математическую модель с нужными свойствами, уменьшая негативное влияние субъективного фактора при принятии решений на некоторых этапах математического моделирования.

Далее рассмотрим конкретный пример построения математической модели, которая использовалась в исследовании функционирования кумулятивного заряда при реализации тепловых воздействий на кумулятивную облицовку. Некоторые результаты этого исследования изложены в работах [2–4].

Постановка задачи. Обычный вариант кумулятивного заряда содержит заряд бризантного взрывчатого вещества с осевой симметрией и кумулятивную выемку на одном из его торцов, в которой расположена металлическая облицовка, называемая кумулятивной. В начальный момент времени заряд инициируется со стороны, противоположной кумулятивной выемке, тогда образуются продукты детонации, воздействующие на кумулятивную облицовку, что приводит к ее схлопыванию и формированию металлической струи из внутреннего (струеобразующего) слоя облицовки.

Пусть кумулятивный заряд формирует пластически разрушающуюся кумулятивную струю как при реализации, так и при отсутствии (начального) нагрева струеобразующего слоя в начальный момент времени. На начальной стадии существования большинства таких струй происходит равномерное растяжение без сосредоточенной деформации. Затем растяжение локализуется в областях образования шеек. В результате происходит пластическое разрушение, т.е. распад кумулятивной струи на определенное количество отдельных элементов, которые в дальнейшем не изменяют свою длину. Такой вид разрушения, например, характерен для кумулятивных струй из меди, никеля и ниобия. Для количественной оценки способности элементов таких кумулятивных струй к удлинению без разрыва используют так называемый коэффициент предельного удлинения, определяемый отношением общей длины элемента струи после разрыва к его начальной длине.

Установим относительное изменение коэффициента предельного удлинения при реализации начального нагрева струеобразующего слоя кумулятивной облицовки, опираясь на современные представления о деформировании металлов и пластическом разрушении кумулятивных струй.

Решение. Отказываясь от построения модели с широкой областью адекватности и учитывая принцип постепенного усложнения математической модели, установим искомую зависимость, начиная с построения достаточной простой модели.

В настоящее время известны установленные в результате зарубежных и отечественных исследований близкие друг к другу зависимости коэффициента предельного удлинения от безразмерного комплекса

$$U = \frac{Y}{\rho G^2 R^2},$$

в который входят начальные значения радиуса R элемента кумулятивной струи, осевой скорости деформаций G, динамического предела текучести Y и плотности ρ материала элемента кумулятивной струи. Тогда с учетом известных зависимостей можно записать

$$\frac{n_b(T_I)}{n_b^*} = \left(\frac{U^*}{U}\right)^p, \tag{1}$$

где $n_b(T_I)$ — значение коэффициента предельного удлинения элемента струи при температуре T_I начального нагрева материала струеобразующего слоя кумулятивной облицовки; n_b^* и U^* — значения n_b и U, полученные при отсутствии начального нагрева; p — показатель степени. Согласно работе [5] показатель степени p можно считать приближенно равным 0,4. В дальнейшем верхним индексом * будем отмечать величины, определяемые в случае, когда начальный нагрев материала облицовки отсутствует, т. е. $\Delta T_I = T_I - T_R = 0$, где T_R — температура окружающей среды при нормальных условиях.

Сначала определим температуру и динамический предел текучести материала кумулятивной струи, воспользовавшись приведенной в [6] зависимостью динамического предела текучести Y от температуры T материала:

$$Y = \tilde{Y}\left[1 - \left(\frac{T - T_R}{T_M - T_R}\right)^z\right], \tag{2}$$

где $\tilde{Y}$ — динамический предел текучести материала при фиксированной температуре T_R; T_M — температура плавления материала; z — константа материала. Первый сомножитель в правой части этого уравнения определяет механическое поведение среды при температуре T_R, а второй сомножитель — характер изменения предела текучести от температуры материала.

В общем случае $\tilde{Y}$ зависит от интенсивности пластических деформаций ε_i как основной характеристики сдвиговых пластических деформаций, скорости пластических деформаций e_i и других параметров.

Пусть для любой индивидуальной точки N струеобразующего слоя облицовки применительно к конкретным условиям обжатия и деформирования известна величина динамического предела текучести $\tilde{Y}$ как функция интенсивности пластических деформаций ε_i и скорости пластических деформаций e_i при средних значениях других параметров:

$$\tilde{Y}_N = \tilde{Y}_N\left(\varepsilon_i, e_i\right). \tag{3}$$

Подставляя (3) в уравнение (2), получаем

$$Y_N = \tilde{Y}_N\left[1 - \left(\frac{T - T_R}{T_M - T_R}\right)^z\right]. \tag{4}$$

Для определения предела текучести Y_N в индивидуальной точке N материала кумулятивной струи необходимо знать результирующую температуру T в этой точке. Известно, что разогрев металла струи происходит за счет начального нагрева, ударно-волнового нагружения и пластической деформации материала струеобразующего слоя кумулятивной облицовки в процессе ее обжатия и формирования струи.

Применительно к конкретным условиям обжатия облицовки и формирования кумулятивной струи выразим результирующую температуру T в индивидуальной точке N через температуру T^* точки N того же материала, деформированного при тех же условиях, но в отсутствие начального нагрева материала облицовки, т.е.

$$T = T^* + \Delta T, \tag{5}$$

где ΔT — прирост температуры материала кумулятивной струи.

Достаточно простую зависимость можно получить, если принять допущение о том, что $\Delta T = \Delta T_I$. Это справедливо, если в рассматриваемой индивидуальной точке начальный нагрев материала облицовки не оказывает существенного влияния на приращение результирующей температуры T за счет пластической деформации. Тогда, используя уравнение (4), приходим к следующему отношению

$$\frac{Y_N}{Y_N^*} = \frac{1 - \left[\left(T^* + \Delta T_I - T_R\right)/\left(T_M - T_R\right)\right]^z}{1 - \left[\left(T^* - T_R\right)\left(T_M - T_R\right)\right]^z}.$$

Данные, полученные в [6] для различных металлов, показывают, что для меди и других металлов параметр z может быть принят равным единице. Тогда

$$\frac{Y_N}{Y_N^*} = \frac{T_M - T^* - \Delta T_I}{T_M - T^*}.$$

Затем, переходя от значений величин, определяемых в индивидуальной точке N, к средним значениям этих же величин в элементе кумулятивной струи, имеем

$$\frac{Y}{Y^*} = \frac{T_M - T^* - \Delta T_I}{T_M - T^*}. \tag{6}$$

Как известно из результатов численных расчетов, разупрочнение материала кумулятивной облицовки при прочих равных условиях не оказывает существенного влияния на кинематические характеристики процесса схлопывания облицовки. Следовательно, имеем

$$\frac{U^*}{U} = \frac{Y^*}{Y}.$$

Тогда, используя зависимости (1) и (6), получаем следующее отношение:

$$\frac{n_b(T_I)}{n_b^*} = \left(\frac{Y}{Y^*}\right)^{-p} = \left(\frac{T_M - T^* - \Delta T_I}{T_M - T^*}\right)^{-p}.$$

С помощью такой же зависимости в работах [5, 7] сделаны оценки влияния начального нагрева кумулятивной облицовки на предельное удлинение элемента кумулятивной струи.

Использование введенного допущения привело к тому, что полученная зависимость справедлива при достаточно малых значениях ΔT_I. Действительно, с ростом температуры начального нагрева материала облицовки вклад ΔT в результирующую температуру T уменьшается по сравнению с ΔT_I. Это означает, что при приближении величины $T^* + \Delta T_I$ к значению T_M относительная погрешность полученной зависимости неограниченно возрастает. Очевидно, что принцип согласованности не выполняется и полученная зависимость не пригодна для практического применения. Следовательно, необходим следующий этап модификации математической модели.

Отказываясь от построения модели с широкой областью адекватности и учитывая принцип постепенного усложнения, уточним результирующую температуру T, определяемую по формуле (5). Тогда, осуществляя приведенные в работе [2] выкладки, получаем следующее отношение коэффициента предельного удлинения $n_b(T_I)$ элемента струи, сформированного из нагреваемой облицовки, к коэффициенту предельного удлинения n_b^* элемента, образованного при тех же условиях, но в отсутствие начального нагрева:

$$\frac{n_b(T_I)}{n_b^*} = \left(\frac{Y}{Y^*}\right)^{-p} = \left(1 - \frac{T_I - T_R}{T_M - T_K}\right)^{-p},$$

$$0 \leqslant \frac{T_I - T_R}{T_M - T_K} < 1,$$

где T_K — остаточная температура после ударно-волнового нагружения материала облицовки, из которого сформирован элемент кумулятивной струи.

Построенная зависимость была использована для расчета глубины пробития кумулятивного заряда при реализации начального нагрева материала облицовки. Сравнение результатов расчетов с известными экспериментальными данными обнаружило их удовлетворительное соответствие, что позволило сделать вывод о пригодности полученной математической модели для практического использования. Некоторые результаты такого сравнения приведены в работах [3, 4].

Если бы были получены экспериментальные данные, которые существенно отличаются от расчетных, то в этом случае необходим следующий этап модификации модели с использованием более точных исходных зависимостей, а это, в свою очередь, порождало бы потребность в их нахождении.

Обсуждение результатов. В заключение рассмотренного примера стоит отметить, что, пренебрегая изложенным выше подходом, можно, например, прийти к используемой в работах [5, 7] математической модели, в которой для определения относительного изменения коэффициента предельного удлинения при реализации начального нагрева облицовки применяется инженерная методика оценки температуры кумулятивной струи. Анализ такой модели позволяет легко установить, что она не обладает в полной мере нужными свойствами, и это делает ее бесполезной с практической точки зрения.

Заключение. Таким образом, изложенный подход позволяет построить математическую модель с нужными свойствами, уменьшая негативное влияние субъективного фактора при принятии решений на некоторых этапах математического моделирования. Последнее приводит к сокращению затрат времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

Изложенный подход является перспективным и детально рассматривается в курсах лекций, которые автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М а р к е л о в Г. Е. Принципы построения математических моделей // Тихонов и современная математика: Матем. моделирование: Тезисы докладов международной конференции. – М.: Изд. отд. ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006. – С. 128–129.
2. М а р к е л о в Г. Е. О влиянии начального нагрева струеобразующего слоя облицовки кумулятивного заряда на предельное удлинение элементов струи // ПМТФ. – 2000. – Т. 41, № 2. – С. 32–36.

3. М а р к е л о в Г. Е. О влиянии начального нагрева облицовки на пробивное действие кумулятивного заряда // ПМТФ. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 27–31.
4. M a r k e l o v G. E. Influence of heating temperature on the ultimate elongation of shaped-charge jet elements // Proc. of the 5th Int. Conf. “Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics”. Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics in Russian, 2000. – P. 170.
5. Ф и з и к а взрыва / Под ред. Л.П. Орленко. Т. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 656 с.
6. J o h n s o n G. R., C o o k W. N. A constitutive model and data for metals subjected to large strains. High rates and high temperatures // Proc. of the 7th Intern. Symp. on Ballistics. Hague: Royal Institution of Engineers in the Netherlands, 1983. – P. 541–547.
7. Б а б к и н А. В., Б о н д а р е н к о П. А., Ф ё д о р о в С. В., Л а д о в С. В., К о л п а к о в В. И., А н д р е е в С. Г. Пределы увеличения глубины пробития кумулятивного заряда при импульсном тепловом воздействии на его облицовку // Физика горения и взрыва. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 124–132.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012