

## Устойчивость стационарных колебаний цилиндрического резонатора гироскопа с электромагнитной системой управления

© Д.А. Маслов

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, 111250, Россия

*Исследована динамика цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электромагнитной системой управления, позволяющей по сравнению с электростатической системой управления сокращать время готовности прибора к работе. Построена математическая модель, описывающая колебания резонатора и электромагнитные процессы системы возбуждения колебаний во взаимосвязанной форме. Показано, что при использовании позиционного возбуждения появляется сопутствующее ему параметрическое возбуждение колебаний. Рассмотрен случай комбинированного возбуждения колебаний в результате одновременного действия вынужденного позиционного возбуждения и сопутствующего ему параметрического возбуждения колебаний. С помощью варианта метода расщепления неавтономных систем дифференциальных уравнений с периодическими матрицами и критерия устойчивости Ляпунова — Шипара получено условие асимптотической устойчивости стационарных колебаний резонатора гироскопа. Построены области асимптотической устойчивости стационарных колебаний резонатора гироскопа в пространстве параметров системы.*

**Ключевые слова:** *волновой твердотельный гироскоп, цилиндрический резонатор, параметрическое возбуждение, устойчивость колебаний.*

**Введение.** В настоящее время волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) является одним из перспективных датчиков инерциальной информации, применяемых в навигационных системах движущихся объектов, в том числе космических аппаратов [1–3]. В основе функционирования ВТГ лежит физический принцип, заключающийся в инерционных свойствах упругих волн колебаний в осесимметричном теле [4]. Достоинством ВТГ с цилиндрическим резонатором является относительная простота конструкции.

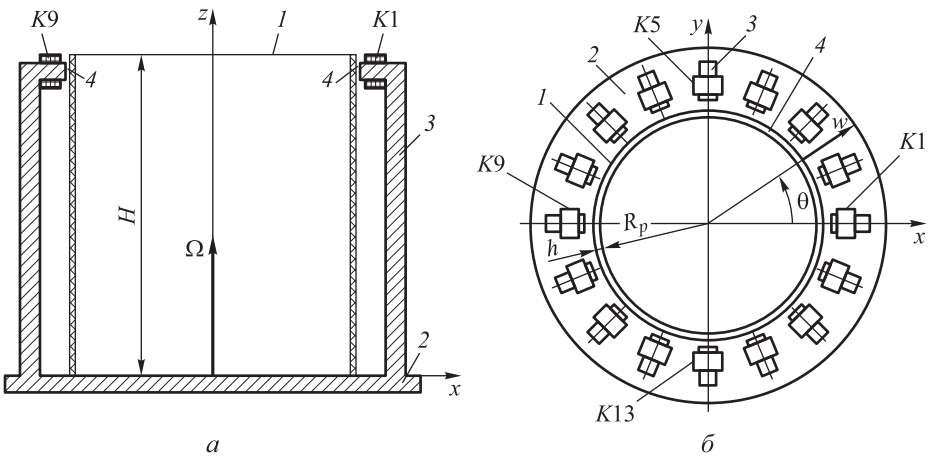
Наличие затухания колебаний резонатора гироскопа приводит к необходимости их поддержания внешними силами. Однако для управления колебаниями резонатора используются не только электростатические, пьезоэлектрические, индукционные, но и электромагнитные системы управления [5–13]. Выбор типа системы управления прибора зависит от требований, предъявляемых к нему. Применение электромагнитных датчиков позволяет сократить время

готовности гироскопа к работе и увеличить диапазон изменения частот при балансировке. Это обусловлено тем, что силы притяжения электромагнитов больше, чем у электростатических датчиков. В данной работе рассмотрено позиционное возбуждение колебаний цилиндрического резонатора с помощью силового электромагнитного контура, образованного неподвижными катушками, магнитопроводом и резонатором из магнитомягкого материала. При этом на катушки электромагнитов кроме постоянного опорного напряжения подается еще и переменное, вызывающее не только позиционное, но и параметрическое возбуждение колебаний.

Для исследования устойчивости стационарных колебаний предлагается использовать вариант метода расщепления [14, 15] регулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с периодически-матрицами, позволяющий получить почти постоянную матрицу системы. В работе [9] при исследовании устойчивости стационарных колебаний цилиндрического резонатора с электростатической системой управления использовался более трудоемкий метод усреднения Крылова — Боголюбова.

Целью работы являются построение математической модели гироскопа с цилиндрическим резонатором, описывающей электромагнитные и механические колебания во взаимосвязанной форме, и применение метода расщепления к исследованию устойчивости стационарных колебаний резонатора при параметрическом возбуждении, сопутствующем позиционному возбуждению колебаний.

**Уравнения малых вынужденных колебаний резонатора.** Рассмотрим тонкий упругий цилиндрический резонатор (рис. 1) толщиной  $h$ , радиусом  $R$  и высотой  $H$ , один край которого свободен,



**Рис. 1.** Конструкция ВТГ:  
 а — вид сбоку (разрез); б — вид сверху

а другой жестко прикреплен к подвижному основанию. Колебания резонатора 1 на основании 2 возбуждаются и измеряются системой из  $n = 16$  электромагнитов с катушками  $K1, \dots, K16$ . Магнитный поток, создаваемый электромагнитом, проходит по магнитопроводу 3, основанию, резонатору и замыкается через зазор 4.

С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат  $Oxyz$ , ось  $z$  направим по оси симметрии резонатора. Предположим, что резонатор вращается вокруг своей оси симметрии  $z$  с угловой скоростью  $\Omega$ , которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с собственной частотой  $\omega$  колебаний резонатора. В качестве криволинейных координат примем нормализованную (отнесенную к радиусу резонатора) длину образующей  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = H/R$ , и угол в окружном направлении  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

При работе гироскопа используется вторая основная форма колебаний консольно закрепленного на основании тонкого цилиндрического резонатора, радиальная составляющая которой, согласно работе [16], может быть записана в следующем виде:

$$\ddot{w}(t) = -4\psi(\alpha)f_*(t)\cos 2\theta + 4\psi(\alpha)g_*(t)\sin 2\theta, \quad (1)$$

где  $\psi(\alpha)$  — функция второй основной формы колебаний;  $-4\psi(\alpha)f_*(t)$ ,  $4\psi(\alpha)g_*(t)$  — зависящие от времени обобщенные координаты основной формы колебаний, равные радиальному смещению резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих одна от другой под углом  $45^\circ$ .

Кинетическая энергия резонатора определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \left[ m(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) + 2\delta_*\Omega(g_*\dot{f}_* - f_*\dot{g}_*) \right], \quad (2)$$

где  $m = \pi\rho h R_p^2 \int_0^\alpha [(\psi'(\alpha))^2 + 20\psi^2(\alpha)] d\alpha$  — приведенная масса резонатора, соответствующая второй гармонике колебаний;  $\delta_* = 16\pi\rho h \times R_p^2 \int_0^\alpha \psi^2(\alpha) d\alpha$  [16].

Потенциальная энергия деформации резонатора

$$\Pi = \frac{1}{2} c (f_*^2 + g_*^2), \quad (3)$$

где  $c$  — приведенная жесткость резонатора [16]. Внутреннее трение в системе опишем с помощью модели Кельвина — Фогта. Введем

диссипативную функцию Рэлея  $\Psi = c_* (\dot{f}_2^2 + \dot{g}_2^2) / 2$ , где  $c_*$  — коэффициент демпфирования колебаний.

Для составления дифференциальных уравнений движения электромеханической системы применим методику, предложенную в работе [17]. При вычислении магнитной энергии  $n$  электромагнитов предположим, что зазоры сердечников малы по сравнению с их линейными размерами. Тогда магнитное поле можно считать однородным и пренебречь краевыми эффектами. Поля рассеяния вне магнитопровода, резонатора и зазоров не учитываем. Считая, что магнитная проницаемость магнитопровода, резонатора и основания велика, будем пренебрегать их магнитным сопротивлением. При сделанных допущениях энергия магнитного поля  $n$  электромагнитов определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_j i_j^2 = \frac{1}{2} L_0 \sum_{j=1}^n \frac{i_j^2}{1 - \tilde{w}_j / d}, \quad (4)$$

где  $L_j$  — индуктивность;  $i_j$  — ток  $j$ -го электромагнита,  $j = 1, \dots, n$ ;  $L_0 = \mu_0 S N^2 / d$  — индуктивность электромагнита при недеформированном резонаторе;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная проницаемость вакуума;  $S$  — площадь полюса;  $N$  — число витков обмотки;  $d$  — зазор при недеформированном резонаторе;  $\tilde{w}_j = -4\psi(\alpha_1) f_* \cos 2\theta_j + 4\psi(\alpha_1) g_* \sin 2\theta_j$  — смещение резонатора в радиальном направлении  $j$ -го электромагнита вблизи свободной кромки резонатора;  $\theta_j = 2\pi(j-1)/n$  — угол между осью отсчета и осью  $j$ -го электромагнита.

С учетом соотношений (2)–(4) найдем выражение для функции Лагранжа электромеханической системы:

$$T - \Pi + W = \frac{1}{2} \left( m(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) + 2\delta_* \Omega (g_* \dot{f}_* - f_* \dot{g}_*) \right) - \frac{1}{2} c (f_*^2 + g_*^2) + \frac{L_0}{2} \sum_{j=1}^n \frac{i_j^2}{1 - \tilde{w}_j / d}.$$

Используя формализм Лагранжа, получаем следующие уравнения динамики резонатора:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_* + \tilde{\gamma} \dot{f}_* - 2\delta_* \Omega \dot{g}_* + \omega^2 f_* + 2\psi(\alpha) \frac{L_0}{md} \sum_{j=1}^n I_j^2 \cos 2\theta_j &= 0; \\ \ddot{g}_* + \tilde{\gamma} \dot{g}_* + 2\delta_* \Omega \dot{f}_* + \omega^2 g_* - 2\psi(\alpha) \frac{L_0}{md} \sum_{j=1}^n I_j^2 \sin 2\theta_j &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $I_j = i_j / (1 - \tilde{w}_j / d)$  — функция, зависящая от тока  $i_j$  и перемещения резонатора в направлении  $j$ -го электромагнита;  $\delta = \delta_* / m$ ;  $\tilde{\gamma} = c_* / m$ . Предполагаем, что собственные частоты резонатора по второй основной собственной форме колебаний совмещены и поэтому балансировки резонатора не требуется.

Напряжение  $U_j$  подается на обмотку  $j$ -й катушки с сопротивлением  $R_{\text{обм},j}$  и добавочное сопротивление  $R_{\text{доб},j}$ , соединенное последовательно с катушкой. Для определения токов, протекающих через катушки, составим уравнения электрических цепей:

$$\frac{d\Phi_j}{dt} + R_j i_j = U_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где  $\Phi_j = L_j i_j$ ;  $R_j = R_{\text{обм},j} + R_{\text{доб},j}$ .

Уравнения (6) запишем в виде

$$L_0 \dot{I}_j + R_j (1 - \tilde{w}_j / d) I_j = U_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Системы дифференциальных уравнений (5) и (7) описывают динамику гироскопа с учетом электрических процессов, обусловленных наличием электромагнитов.

Вводя безразмерное время  $\tau = \omega t$  и относительные перемещения  $w_j = \tilde{w}_j / d = f \cos 2\theta_j + g \sin 2\theta_j$ , где  $f = -4\psi(\alpha_1) f_* / d$  и  $g = (4\psi(\alpha_1) g_*) / d$  — безразмерные обобщенные координаты основной формы колебаний, получаем из уравнений (7)

$$\mu_j \dot{I}_j + (1 - w_j) I_j = U_j / R_j. \quad (8)$$

Здесь  $\mu_j = L_0 \omega / R_j$  — малый параметр. В уравнении (8) и далее точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ .

Уравнения (8) являются сингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями с малым параметром  $\mu_j$  ( $\sim 10^{-2}$ , подбирают с помощью добавочного сопротивления  $R_{\text{доб},j}$ ). Поэтому, обнуляя малый параметр в уравнениях (8), получаем нулевое приближение к решению:

$$I_j = \frac{U_j}{R_j(1-w_j)}. \quad (9)$$

Рассмотрим работу ВТГ с 16 управляющими электромагнитами. В режиме вынужденных колебаний с помощью электромагнитов создается переменное во времени силовое поле, неизменно ориентированное относительно основания гироскопа. На электромагниты напряжение подается следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1 = U_9 = U_0(1+u \cos \omega_0 t); \quad U_5 = U_{13} = U_0(1-u \cos \omega_0 t); \\ U_j = U_0 \sqrt{1+0,5u^2}, \quad j = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $U_j$  — напряжение обмотки катушки  $j$ -го электромагнита;  $U_0$  — постоянное опорное напряжение;  $u$  — нормализованная амплитуда напряжения для возбуждения второй основной моды колебаний резонатора;  $\omega_0$  — частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора.

Подставим  $U_j$  в выражение (9),  $I_j$  — в уравнение (5), в котором вводим безразмерное время  $\tau = \omega t$ , и получим уравнения динамики резонатора:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f = -\gamma \dot{f} + v \dot{g} + \tilde{\varepsilon} \left[ (2+u^2)f + u \cos \beta \tau + 0,5u^2 f \cos 2\beta \tau \right], \\ \ddot{g} + g = -\gamma \dot{g} - v \dot{f} + \tilde{\varepsilon} (2+u^2)g, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\tilde{\varepsilon} = 128\psi^2(\alpha_1)U_0^2L_0/(md^2R^2\omega^2)$  — безразмерный коэффициент, характеризующий малость электрических сил, действующих на резонатор;  $v$  — безразмерная угловая скорость;  $\gamma$  — безразмерный коэффициент демпфирования колебаний.

В случае мягкого резонансного возбуждения  $\beta = \omega_0/\omega = 1 + \tilde{\Delta}$  ( $\tilde{\Delta}$  — относительная частотная настройка между частотой возбуждения  $\omega_0$  и характерной частотой резонатора  $\omega$ ). Точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ .

Пренебрегаем в уравнении (11) слагаемыми  $\tilde{\varepsilon}(2+u^2)f$  и  $\tilde{\varepsilon}(2+u^2)g$ , которые указывают на незначительное уменьшение характерной частоты колебаний. Обозначаем малый параметр  $\varepsilon = \gamma$  и за-

писываем уравнения движения резонатора (11) в виде регулярно возмущенных уравнений, вводя  $\upsilon = \upsilon/\gamma$  и  $\xi = \tilde{\xi}u^2/\gamma$ :

$$\begin{aligned} \ddot{f} + f &= \varepsilon \left( -\dot{f} + \upsilon \dot{g} + 0,5\xi f \cos 2\beta\tau \right) + \tilde{\xi}u \cos \beta\tau; \\ \ddot{g} + g &= \varepsilon \left( -\dot{g} - \upsilon \dot{f} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Полученные уравнения (12) описывают случай комбинированного возбуждения. Слагаемое, содержащее  $\tilde{\xi}u \cos \beta\tau$ , характеризует позиционное возбуждение резонатора, слагаемое, содержащее  $0,5\xi f \cos 2\beta\tau$ , — параметрическое возбуждение.

**Устойчивость стационарных колебаний резонатора.** Заменой переменных  $x_1 = f$ ,  $x_2 = \dot{f}$ ,  $x_3 = g$ ,  $x_4 = \dot{g}$  сводим уравнения (12) к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1(\tau))x + F, \quad (13)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi \cos 2\beta\tau & -1 & 0 & \upsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\xi}u \cos \beta\tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вводя частотную настройку  $\tilde{\Delta} = \varepsilon\Delta$ , т. е.  $\beta = 1 + \varepsilon\Delta$ , используя, согласно [14],  $2\pi$ -периодическую замену  $x = S_0 e^{\Lambda_0\tau} z$  в уравнениях (13), где  $S_0: S_0^{-1}A_0S_0 = \Lambda_0 = \text{diag}\{-i, i, -i, i\}$ , и усредняя по периоду параметрического возбуждения, приходим к системе уравнений с почти постоянной матрицей:

$$\dot{z} = \varepsilon(C_1 + \varepsilon G(\tau))z + \tilde{F}. \quad (14)$$

Здесь

$$C_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + i\Delta & -\frac{i\xi}{8} & \frac{\upsilon}{2} & 0 \\ \frac{i\xi}{8} & -\frac{1}{2} - i\Delta & 0 & \frac{\upsilon}{2} \\ -\frac{\upsilon}{2} & 0 & -\frac{1}{2} + i\Delta & 0 \\ 0 & -\frac{\upsilon}{2} & 0 & -\frac{1}{2} - i\Delta \end{pmatrix}; \quad \tilde{F}(\tau) = e^{-\Lambda_0\tau} S_0^{-1} F,$$

где  $\|G(\tau)\| \leq C = \text{const}$ .

Принимаем в системе уравнений (14) первый порядок точности по  $\varepsilon$ , вводим безразмерные переменные  $\xi_0 = \xi/4$ ,  $\Delta_0 = 2\Delta$  и уменьшаем масштаб времени в 2 раза. Если действительные части всех собственных значений матрицы системы отрицательны, то решения системы уравнений (13) и, как следствие, системы (12) будут асимптотически устойчивы.

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (15)$$

где  $a_1 = 4$ ;  $a_2 = 2\Delta_0^2 + 2\nu^2 + 6 - \xi_0^2$ ;  $a_3 = 2(2\Delta_0^2 + 2\nu^2 + 2 - \xi_0^2)$ ;  $a_4 = \Delta_0^4 + \nu^4 - 2\nu^2(\Delta_0^2 - 1) + 2\Delta_0^2 + 1 - \xi_0^2(\Delta_0^2 + 1)$ . Согласно критерию устойчивости Льенара — Шипара, для того чтобы многочлен (15) имел все корни с отрицательными действительными частями, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты полинома были положительными и, кроме того, выполнялось неравенство для минора:  $a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0$ . Учитывая, что коэффициенты  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 4$  положительны и условие  $a_2 > 0$  выполняется при  $a_3 > 0$ , представим условия асимптотической устойчивости в виде системы трех неравенств:

$$\begin{aligned} 2 + 2\Delta_0^2 + 2\nu^2 - \xi_0^2 &> 0; \\ 1 + 2\nu^2 + 2\Delta_0^2 - \xi_0^2 + \nu^4 - 2\nu^2\Delta_0^2 - \xi_0^2\Delta_0^2 + \Delta_0^4 &> 0; \\ 16 + 16\nu^2 + 16\Delta_0^2 - 8\xi_0^2 - 4\nu^2\xi_0^2 + \xi_0^4 + 16\nu^2\Delta_0^2 &> 0. \end{aligned} \quad (16)$$

На рис. 2 области асимптотической устойчивости колебаний заштрихованы, по оси абсцисс отложена частотная настройка  $\Delta_0$ , по

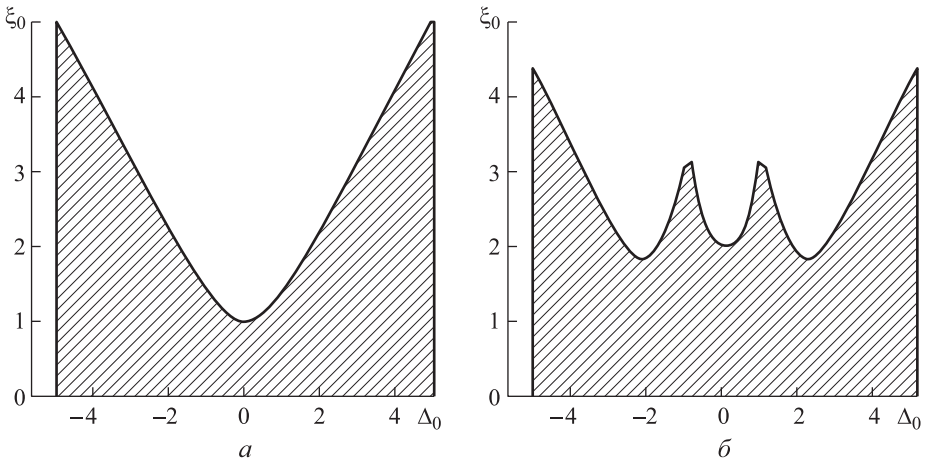


Рис. 2. Области асимптотической устойчивости колебаний



оси ординат — параметр  $\xi_0$ . На рис. 2, а представлен случай  $\nu = 0$ , на рис. 2, б —  $\nu = 2$ .

**Заключение.** Построенная математическая модель гироскопа с цилиндрическим резонатором описывает электромагнитные и механические колебания во взаимосвязанной форме при позиционном возбуждении колебаний электромагнитной системой управления. При использовании позиционного возбуждения появляется сопутствующее ему параметрическое возбуждение колебаний. Получено условие асимптотической устойчивости стационарных колебаний резонатора.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00772-А, 16-08-01269-А).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пешехонов В.Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем. *Гироскопия и навигация*, 2011, № 1, с. 3–17.
- [2] Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Фомичев А.В., Чуманкин Е.А., Юрин А.В. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2014, № 4, с. 80–96.
- [3] Джанджгава Г.И., Бахонин К.А., Виноградов Г.М., Требухов А.В. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе твердотельного волнового гироскопа. *Гироскопия и навигация*, 2008, № 1, с. 22–33.
- [4] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. *Волновой твердотельный гироскоп*. Москва, Наука, 1985. 125 с.
- [5] Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А., Чуманкин Е.А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности. *Наука и образование. Электрон. издание*, 2013, № 6. DOI <http://dx.doi.org/10.7463/0613.0579179>
- [6] Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. Static Balancing of Metal Resonators of Cylindrical Resonator Gyroscopes. *Gyroscopy and Navigation*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 213–218.
- [7] Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. Algorithms and Technologies for Surface Balancing of Hemispherical and Cylindrical Resonator Gyroscopes. 22<sup>nd</sup> Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. ICINS 2015 – Proceedings 22. 2015, pp. 383–386.
- [8] Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора. *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*, 2014, № 5, с. 24–29.
- [9] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V. Studying Stationary Oscillation Modes of the Gyro Resonator in the Presence of Positional and Parametric Excitations. *Gyroscopy and Navigation*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 224–228.
- [10] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V. Nonlinear Effects in Dynamics of Cylindrical Resonator of Wave Solid-State Gyro with Electrostatic Control System. *Gyroscopy and Navigation*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 224–229.
- [11] Рогинский В.Д., Юрманов С.Ю., Денисов Р.А. *Способ возбуждения колебаний в чувствительном элементе твердотельного волнового гироскопа и*

- устройство для его осуществления. Пат. 2518632 Российская Федерация, 2014, бюл. № 16.
- [12] Koning M. G. *Vibrating Cylinder Gyroscope and Method*. Pat. 4793195 USA, 1988.
- [13] Salaberry de B. *Vibrating Gyroscope with Electromagnetic Excitation and Detection*. Pat. 6443009 USA, 2002.
- [14] Коняев Ю.А. О некоторых методах исследования устойчивости. *Мат. сборник*, 2001, т. 192, № 3, с. 65–82.
- [15] Konyaev Y.A., Mikhailov D.V., Romanova E.Y. Asymptotic Analysis of a Model Gyro System. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 6, pp. 760–764.
- [16] Меркурьев И.В., Подалков В.В. *Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов*. Москва, Физматлит, 2009, 228 с.
- [17] Мартыненко Ю.Г. *Аналитическая динамика электромеханических систем*. Москва, МЭИ, 1984, 64 с.

Статья поступила в редакцию 27.01.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Маслов Д.А. Устойчивость стационарных колебаний цилиндрического резонатора гироскопа с электромагнитной системой управления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 5.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-05-1493>

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XL Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 26–29 января 2016 г.*

**Маслов Дмитрий Александрович** родился в 1993 г., окончил НИУ «МЭИ» в 2015 г. по специальности «Прикладная математика и информатика». Аспирант кафедры высшей математики НИУ «МЭИ». Автор 5 научных работ по исследованию динамики волновых твердотельных и микромеханических гироскопов. e-mail: dm\_93@live.ru, MaslovDmA@mpei.ru

## Stability of stationary vibrations of cylindrical gyro resonator with electromagnetic control system

© D.A. Maslov

National Research University Moscow Power Engineering Institute,  
Moscow, 111250, Russia

*The article considers dynamics of a cylindrical resonator of the wave solid-state gyro with an electromagnetic control system allowing reducing the instrument readiness time for operation comparing to electrostatic control system. The mathematical model describing the resonator vibrations and the electromagnetic processes in the vibration excitation system in the coherent manner is created. It is shown that when the positional excitation is used attendant parametric excitation of vibrations appears. The case is considered when the simultaneous action of forced position excitation and attendant parametric excitation results in combined vibration. Using a method of splitting the non-autonomous systems of differential equations with periodic matrices and Lienard – Shepherd criterion of stability the condition of asymptotic stability of stationary vibrations of gyro resonator is obtained. The regions of asymptotic stability of stationary vibrations of gyroscope resonator in the space of system parameters are constructed.*

**Keywords:** wave solid-state gyro, cylindrical resonator, parametric excitation, stability of vibrations.

### REFERENCES

- [1] Peshekhonov V.G. *Гироскопия и навигация — Gyroscopy and Navigation*, 2011, no. 1, pp. 3–17.
- [2] Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., Fomichev A.V., Chumankin E.A., Yurin A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Priborostroyeniye — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Engineering*, 2014, no. 4, pp. 80–96.
- [3] Dzhandzhgava G.I., Bakhonin K.A., Vinogradov G.M., Trebukhov A.V. *Гироскопия и навигация — Gyroscopy and Navigation*, 2008, no. 1, pp. 22–33.
- [4] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoy tverdotelnyy гироскоп [The Wave Solid-State Gyro]*. Moscow, Nauka Publ., 1985, 125 p.
- [5] Matveev V.A., Lunin B.S., Basarab M.A., Chumankin E.A. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchnoe izdanie — Science and Education: Electronic Scientific Journal*, 2013, no. 6. DOI <http://dx.doi.org/10.7463/0613.0579179>
- [6] Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. *Gyroscopy and Navigation*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 213–218.
- [7] Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Chumankin E.A. Algorithms and Technologies for Surface Balancing of Hemispherical and Cylindrical Resonator Gyroscopes. *Proceedings of the 22nd International Conference on Integrated Navigation Systems. ICINS 2015 –22. Saint Petersburg*, 2015, pp. 383–386.
- [8] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkur'yev I.V. *Pribory i sistemy, Upravlenie, kontrol, diagnostika — Devices and Systems. Control, monitoring, diagnostics*, 2014, no. 5, pp. 24–29.
- [9] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkur'yev I.V. *Gyroscopy and Navigation*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 224–228.
- [10] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkur'yev I.V. *Gyroscopy and Navigation*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 224–229.

- [11] Roginskiy V.D., Yurmanov S.Yu., Denisov R.A. *Sposob возбужdeniya kolebaniy v chuvstvitelnom elemente tverdotelnogo volnogo giroskopa i ustroystvo dlya ego osushchestvleniya* [The Method of Vibration Excitation in the Sensor of Wave Solid-State Gyroscopes and a Device for Its Implementation]. Patent RF, no. 2518632, 2014, bull. 16.
- [12] Menno G. Koning. *Vibrating cylinder gyroscope and method*. Patent USA, no. 4793195, 1988.
- [13] Bernard De Salaberry. *Vibrating Gyroscope with Electromagnetic Excitation and Detection*. Patent USA, no. 6443009, 2002.
- [14] Konyaev Yu.A. *Matematicheskiy sbornik — Mathematical collection*, 2001, vol. 192, no. 3, pp. 65–82.
- [15] Konyaev Y.A., Mikhailov D.V., Romanova E.Y. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 6, pp. 760–764.
- [16] Merkur'yev I.V., Podalkov V.V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnogo tverdotelnogo giroskopov* [Dynamics of Micromechanical and Wave Solid-State Gyroscopes]. Moscow, Fismatlit Publ., 2009, 228 p.
- [17] Martynenko Yu.G. *Analiticheskaya dinamika elektromekhanicheskikh system* [Analytical Dynamics of Electromechanical Systems]. Moscow, MEI Publ., 1984, 64 p.

**Maslov D.A.** (b. 1993) graduated from National Research University Moscow Power Engineering Institute in 2015. M. Sc. in Applied Mathematics and Informatics, post-graduate (Ph.D.) student, Department of Higher Mathematics, National Research University Moscow Power Engineering Institute. Author of 5 research publications in the field of dynamics of vibrating micromechanical and wave solid-state gyroscopes. e-mail: dm\_93@live.ru, MaslovDmA@mpei.ru