

А. В. Манжиров, С. А. Лычев,  
С. И. Кузнецов, И. Федотов

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В РАСТУЩЕМ ШАРЕ

*Работа посвящена исследованию эволюции температурного поля в растущем шаре. Определяется закон движения растущей поверхности, при котором решение начально-краевой задачи теплопроводности может быть представлено в замкнутом виде. Строится спектр линейного дифференциального оператора, порождаемого задачей.*

**E-mail:** manzh@ipmnet.ru, lychevsa@mail.ru, k\_s\_i@bk.ru

**Ключевые слова:** растущее тело, теплопроводность, шар, собственные функции, разложение, замкнутое решение.

Некоторые природные явления и технологические процессы, такие как кристаллизация, электролитическое осаждение, лазерное напыление, формирование осадочных пород, сопровождается увеличением массы твердых тел за счет присоединения к их поверхности дополнительного материала. Изучением объектов, рост которых осуществляется посредством притока вещества извне, занимается механика растущих тел (см., например, [1–5]).

В рамках данной теории уже проводились исследование температурного поля растущего сплошного и полого шара [6]. В этой работе при построении аналитического решения авторы пренебрегают членом, содержащим скорость движения подвижной границы. При достаточно малых скоростях поверхности роста полученное решение обеспечивает достаточно высокую точность. В общем случае, когда закон движения растущей поверхности определяется технологическим процессом, не удастся представить решение начально-краевой задачи в замкнутой форме.

В той же работе предложен метод, позволяющий свести исходную начально-краевую задачу теплопроводности к задаче Коши для бесконечной связанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается приближенными методами. Однако для оценки параметров счета, обеспечивающих требуемую точность и качественное соответствие численного решения аналитическому, необходима отладка вычислительного алгоритма на известных точных решениях.

При определенных режимах роста задача Коши для связанной системы вырождается в последовательность несвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Это позволяет построить распределение температуры в растущем шаре в замкнутой форме. Полученные решения могут быть использованы

для исследования качественных особенностей процесса теплопроводности, а также для тестирования и отладки вычислительных алгоритмов. Целью настоящей работы является поиск таких решений.

**Постановка задачи теплопроводности для растущего шара.** Рассматривается шар радиуса  $R_0$ , состоящий из однородного изотропного линейно-упругого материала, который характеризуется коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ , плотностью  $\rho$  и теплопроводностью при постоянных деформациях  $c_\varepsilon$ . Распределение температуры в начальный момент времени известно и удовлетворяет условию центральной симметрии. Пусть в начальный момент времени к поверхности шара начинают присоединяться сферические слои вещества постоянной толщины, имеющие температуру<sup>1</sup>  $T_e$ . Дополнительный материал свободен от напряжений и идентичен основному телу. В результате присоединения вещества радиус шара изменяется по известному закону  $R(t)$ , где  $t$  — рассматриваемый момент времени. Предполагается отсутствие теплообмена между шаром и окружающей средой после завершения роста.

Введем сферическую систему координат, начало которой совпадает с центром шара. Каждой точке будет соответствовать тройка координат  $(r, \theta, \varphi)$ . В силу центральной симметрии задачи температурное поле будем описывать дважды дифференцируемой по каждому аргументу функцией  $T(r, t)$ . Поле температур удовлетворяет уравнению теплопроводности, которое в сферической системе координат с учетом центральной симметрии будет выглядеть следующим образом [7]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad \text{где} \quad a = \sqrt{\frac{\lambda}{c_\varepsilon \rho}}. \quad (1)$$

Соответствующее начальное условие будет иметь вид

$$T(r, t)|_{t=0} = T_0(r), \quad (2)$$

где  $T_0(r)$  — функция, характеризующая начальное распределение температуры в шаре.

Будем полагать, что в процессе роста температура на растущей поверхности будет равна температуре присоединяемых слоев<sup>2</sup>. Это позволяет записать граничное условие на внешней поверхности в виде

$$T(r, t)|_{r=a(t)} = T^{(e)}. \quad (3)$$

<sup>1</sup>Здесь и далее под температурой понимается избыточная температура.

<sup>2</sup>В общем случае температура на поверхности роста будет равна некоторой эффективной температуре, которая отличается как от температуры присоединяемых слоев, так и от средней температуры вблизи поверхности основного тела. Однако при определенных условиях (например, если рост происходит в среде с большой теплоемкостью) все эти три температуры приблизительно равны.

Чтобы начально-краевая задача теплопроводности имела единственное решение, следует дополнить уравнения (1)–(3) условием ограниченности температуры в центре шара.

**Построение решения в форме спектрального разложения.** Для построения решения в форме спектрального разложения необходимо привести задачу (1)–(3) к виду, в котором краевые условия оказались бы однородными. С этой целью вводятся безразмерные переменные  $\hat{r}$  и  $\hat{t}$ , безразмерная температура  $\Theta$  и параметр, характеризующий движение границы шара  $\xi$ , определяемые следующим образом:

$$\hat{r} = \frac{r}{R_0}, \quad \hat{t} = \frac{a^2 t}{R_0^2}, \quad \Theta = \frac{T - T^{(e)}}{T^{(e)}}, \quad \xi(\hat{t}) = \frac{R \left( \frac{R_0^2 \hat{t}}{a^2} \right)}{R_0}, \quad (4)$$

где  $R_0$  — радиус шара в начальный момент времени. Уравнения (1)–(3) в новых переменных (4) будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \hat{r}^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{r}} \right), \quad \Theta(\hat{r}, \hat{t})|_{\hat{t}=0} = \Theta_0(\hat{r}), \quad \Theta(\hat{r}, \hat{t})|_{\hat{r}=\xi(\hat{t})} = 0, \quad (5)$$

где

$$\Theta_0(\hat{r}) = \frac{T_0(\hat{r}) - T^{(e)}}{T^{(e)}}$$

— распределение безразмерной температуры в начальный момент времени.

Особенностью постановки (5) является то, что поверхность рассматриваемой области является подвижной. Для перехода к фиксированной области перейдем к новым переменным:

$$\tilde{t} = \hat{t}, \quad \tilde{r} = \frac{\hat{r}}{\xi(\hat{t})}.$$

Задача (5) в переменных  $(\tilde{r}, \tilde{t})$  принимает вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\tilde{r}}{\xi(\tilde{t})} \frac{d\xi(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r}^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{r}} \right) \frac{1}{\xi^2(\tilde{t})}, \quad (6)$$

$$\Theta(\tilde{r}, \tilde{t})|_{\tilde{t}=0} = \Theta_0(\tilde{r}), \quad \Theta(\tilde{r}, \tilde{t})|_{\tilde{r}=1} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) в общем случае не допускает разделения переменных. Однако при выполнении условия

$$\xi(\tilde{t}) \frac{d\xi(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{\beta}{2}, \quad \beta = \text{const} \quad (8)$$

разделение переменных возможно, что позволяет строить решение задачи в форме разложения по собственным функциям. При этом функция  $\xi(\tilde{t})$  с учетом условия (8) и замены (4) имеет вид

$$\xi(\tilde{t}) = \sqrt{1 + \beta \tilde{t}},$$

а уравнение (6) запишется следующим образом:

$$(1 + \beta\tilde{t}) \frac{\partial\Theta}{\partial\tilde{t}} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\tilde{r}^2} + \left( \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{r}\beta}{2} \right) \frac{\partial\Theta}{\partial\tilde{r}}. \quad (9)$$

Правая часть уравнения (9) с граничными условиями (7) определяет линейный дифференциальный оператор

$$A[\chi(\tilde{r})] = - \left[ \frac{\partial^2\chi}{\partial\tilde{r}^2} + \left( \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{r}\beta}{2} \right) \frac{\partial\chi}{\partial\tilde{r}} \right],$$

определенный на множестве ограниченных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке  $[0, 1]$  и обращающихся в нуль при  $\tilde{r} = 1$ . Оператор  $A[\chi(\tilde{r})]$  является самосопряженным и положительно определенным относительно скалярного произведения

$$(\chi_1(\tilde{r}), \chi_2(\tilde{r})) = \int_0^1 \chi_1(\tilde{r})\chi_2(\tilde{r})\tilde{r}^2 e^{\frac{\tilde{r}^2\beta}{4}} d\tilde{r}$$

и имеет дискретный спектр. Это позволяет представить решение задачи в форме спектрального разложения по собственным функциям

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\tilde{t})\psi_n(\tilde{r}), \quad (10)$$

где  $\psi_n(\tilde{r})$  — решение задачи Штурма–Лиувилля, которая в переменных принимает вид

$$- \left[ \frac{\partial^2\psi_n(\tilde{r})}{\partial\tilde{r}^2} + \left( \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{r}\beta}{2} \right) \frac{\partial\psi_n(\tilde{r})}{\partial\tilde{r}} \right] = \lambda_n\psi_n(\tilde{r}), \quad (11)$$

$$|\psi(\tilde{r})|_{\tilde{r}=0} < +\infty, \quad \psi(\tilde{r})|_{\tilde{r}=1} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (11) может быть представлено через гипергеометрическую функцию  ${}_1F_1(\dots)$  [8]:

$$\psi_n(\tilde{r}) = C_1 {}_1F_1 \left( \frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2\beta}{4} \right) + \frac{2C_2 {}_1F_1 \left( \frac{\lambda_n}{\beta} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\tilde{r}^2\beta}{4} \right)}{\tilde{r}\sqrt{\beta}}, \quad (13)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы интегрирования. Гипергеометрическая функция может быть представлена в виде ряда

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!}, \quad {}_1F_1 \left( \frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2\beta}{4} \right) \Big|_{\tilde{r}=0} = 1. \quad (14)$$

Из условия ограниченности собственных функций следует, что  $C_2 = 0$ . Подставляя найденное решение (13) в краевое условие (12), получаем набор трансцендентных уравнений для определения соб-

ственных значений оператора  $A$ :

$${}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\beta}{4}\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, собственные функции оператора  $A$  могут быть определены с точностью до константы:

$$\psi_n(\tilde{r}) = C_{11} F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right).$$

Постоянную  $C_1$  находим из условия нормировки

$$\|\psi_n(\tilde{r})\| = \int_0^1 \left( C_1 F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right) \right)^2 \tilde{r}^2 e^{\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}} d\tilde{r} = 1. \quad (15)$$

Интеграл в уравнении (15) в общем случае не удастся отыскать в замкнутом виде. Однако, поскольку функция  $\psi_n(\tilde{r})$  является простой точкой спектра линейного оператора  $A$ , ее норма может быть найдена с использованием теоремы, приведенной в [9]. Нормированные собственные функции будут иметь вид

$$\psi_n(\tilde{r}) = \frac{1}{N(\lambda_n, \beta)} {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right),$$

где

$$N(\lambda_n, \beta) = \sqrt{-\frac{1}{3} \frac{\lambda_n}{\beta} {}_1F_1\left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{5}{2}; \frac{\beta}{4}\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} {}_1F_1\left(\frac{\lambda}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\beta}{4}\right) \Big|_{\lambda=\lambda_n}}.$$

Производная гипергеометрической функции по первому аргументу вычисляется почленным дифференцированием ряда (14):

$$\frac{\partial}{\partial a} {}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!} \right).$$

Для нахождения координатных функций подставим разложение (10) в уравнение (9), в результате чего исходная начально-краевая задача сведется к последовательности задач Коши

$$(1 + \beta \tilde{t}) \frac{d\Theta_n}{d\tilde{t}} = -\lambda_n \Theta_n, \quad \Theta_n(t)|_{t=0} = \Theta_n^{(0)}, \quad (16)$$

где  $\Theta_n^{(0)}$  — проекция начального распределения температуры на элемент ортонормированного базиса  $\psi_n$ :

$$\Theta_n^{(0)} = \int_0^1 \frac{\Theta^{(0)}(\tilde{r})}{N(\lambda_n, \beta)} {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}\right) \tilde{r}^2 e^{\frac{\tilde{r}^2 \beta}{4}} d\tilde{r}.$$

Задача Коши (16) имеет решение

$$\Theta_n = \Theta_n^{(0)}(1 + \beta\tilde{t})^{-\frac{\lambda_n}{\beta}},$$

которое позволяет построить распределение температурного поля по (10). Осуществляя обратный переход к переменным  $(r, t)$ , находим решение исходной начально-краевой задачи

$$T(r, t) = T^{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n^{(0)}(\tilde{r})}{N(\lambda_n, \beta)} \left(1 + \frac{a^2 \beta t}{R_0^2}\right)^{-\frac{\lambda_n}{\beta}} \times \\ \times {}_1F_1\left(\frac{\lambda_n}{\beta}; \frac{3}{2}; -\frac{r^2 \beta}{4R_0^2(1 + \beta t)}\right) + T^{(e)}.$$

Отметим, что при  $\beta \rightarrow 0$  полученное решение в силу асимптотики гипергеометрической функции и первого замечательного предела будет стремиться к известному решению задачи теплопроводности для шара фиксированного радиуса с краевыми условиями типа Дирихле:

$$T(r, t) = T^{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \tilde{\Theta}_n^{(0)} e^{-\lambda_n t} \sin(r\sqrt{\lambda_n})}{r} + T^{(e)}, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{R_0^2}.$$

**Анализ результатов.** Так как распределение температурного поля в растущем шаре строится в форме спектрального разложения, первым шагом в построении решения будет отыскание спектра рассматриваемого линейного оператора. На рис. 1 представлены графики собственных функций линейного оператора  $A$ . Несколько первых собственных

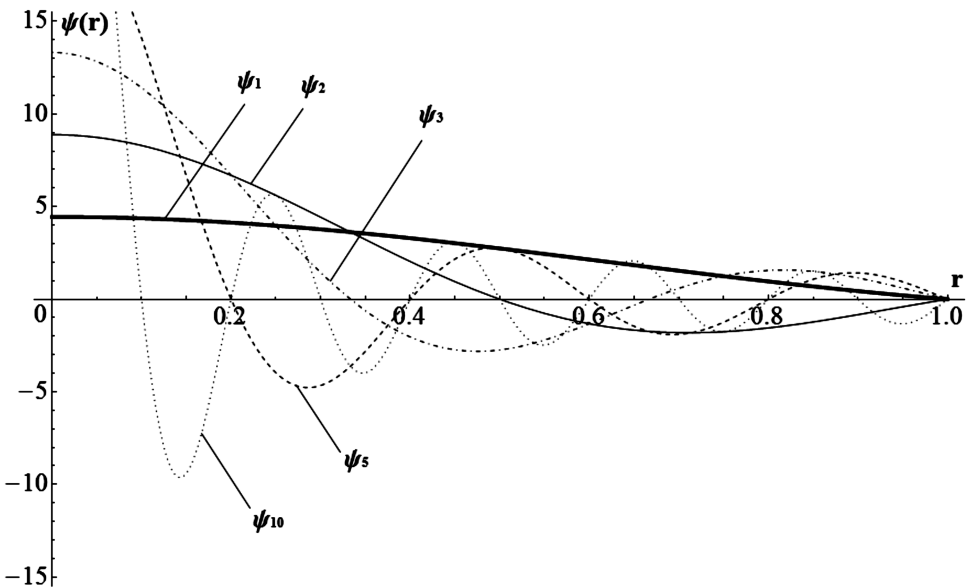


Рис. 1

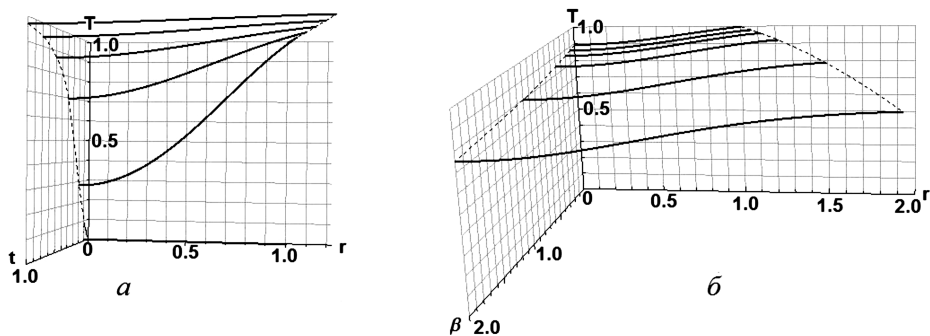


Рис. 2

значений данного линейного оператора для различных значений параметра  $\beta$  представлены в табл. 1.

Таблица 1

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$
$\beta = 0$	9,87	39,48	88,83	157,92	246,74	355,30	483,61	631,66
$\beta = 0,5$	10,25	39,86	89,21	158,29	247,12	355,69	483,99	632,04
$\beta = 1$	10,64	40,25	89,60	158,68	247,51	356,08	484,38	632,43
$\beta = 2$	11,44	41,06	90,41	159,50	248,32	356,89	485,19	633,24
$\beta = 5$	14,06	43,73	93,09	162,18	251,01	359,58	487,88	635,92
$\beta = 10$	19,09	48,99	98,38	167,48	256,31	364,88	493,19	641,23

Для исследования особенностей температурного поля рассмотрим случай, когда в начальный момент времени температура во всех точках шара одинакова. Тогда эволюция температурного поля при фиксированном значении параметра  $\beta$  представлена на рис. 2, а. Сравнение распределений температуры при различных значениях параметра  $\beta$  в некоторый фиксированный момент времени представлено на рис. 2, б.

Видно, что распределение температуры в растущем шаре отличается от соответствующего распределения в шаре с фиксированным радиусом.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 11-01-00669-а, 12-08-01119-а, 11-08-93967-ЮАР\_а.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А р у т ю н я н Н. Х., М а н ж и р о в А. В., Н а у м о в В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. – М.: Наука, 1991. – 175 с.
2. М а н ж и р о в А. В., П а р ш и н Д. А. Нарастивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – № 1. – С. 66–83.

3. Лычев С. А. Связанная динамическая задача термовязкоупругости // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 5. – С. 95–113.
4. Лычев С. А., Лычева Т. Н., Манжиров А. В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 199–208.
5. Лычев С. А., Манжиров А. В., Юбер С. В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 138–154.
6. Кузнецов С. И., Манжиров А. В., Федотов И. Задача теплопроводности для растущего шара // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 6. – С. 139–148.
7. Новацкий С. В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
8. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
9. Сеницкий Ю. Э., Лычев С. А. Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложения // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 8. – С. 60–69.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012