УДК 531.01+521.13 DOI 10.18698/2308-6033-2016-05-1489

Численно-аналитическое построение семейства периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии

© Е.А. Сухов, Б.С. Бардин

Московский авиационный институт (МАИ), Москва, 125993, Россия

Построены семейства периодических движений спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии, как одного из частных случаев движения динамически симметричного спутника — твердого тела относительно центра масс на круговой орбите. Параметрами семейства являются отклонение полной механической энергии от ее значения на гиперболоидальной прецессии и отношение полярного и экваториального моментов инерции спутника (инерционный параметр). При значениях энергии, близких к ее значению на гиперболоидальной прецессии, периодические движения получены методом Ляпунова в виде сходящихся рядов. При произвольных значениях энергии для построения периодических движений применен численный метод продолжения семейства решений по параметрам, предложенный А.Г. Сокольским и С.Р. Каримовым. Дано краткое описание методики исследования, изложены рекомендации по методике выбора приращений параметров, приведены результаты построения семейства периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника.

Ключевые слова: *гамильтонова механика, численные методы, периодические движения, симметричный спутник, гиперболоидальная прецессия.*

Введение. Гиперболоидальная прецессия рассматривается как один из частных случаев движения динамически симметричного спутника — твердого тела относительно центра масс на круговой орбите. В данной работе построено однопараметрическое семейство периодических движений спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии. Параметром данного семейства является отклонение полной механической энергии от ее значения на гиперболоидальной прецессии. При малых значениях параметра периодические движения были получены методом Ляпунова в виде сходящихся рядов. При произвольных значениях энергии для построения периодических движений применялся численный метод продолжения семейства решений по параметрам, предложенный А.Г. Сокольским и С.Р. Каримовым.

Постановка задачи. Рассмотрим спутник — твердое тело, центр масс O которого движется в центральном ньютоновском гравитационном поле сил по круговой орбите. Для описания движения спутника относительно его центра масс введем *орбитальную* $OXYZ$ и *связанную* $Oxyz$ системы координат. Оси OZ, OX и OY направлены по радиусу-вектору центра масс спутника, трансверсали к орбите и нормали к плоскости орбиты соответственно, а оси *Ox, Oy, Oz* направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника, моменты инерции относительно которых обозначим *A, B, C*. Положение связанной системы координат *Oxyz* относительно орбитальной системы координат *OXYZ* задается углами Эйлера ψ, θ, φ.

Будем считать, что спутник является динамически симметричным ($A = B$). При таком предположении угол собственного вращения φ является циклической координатой, а соответствующий импульс p_φ сохраняет постоянное значение.

Уравнения движения симметричного спутника можно записать в каноническом виде с гамильтонианом [1, 2]:

$$H = \frac{p_\psi^2}{2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2} - \left(\frac{\alpha\beta\cos\theta}{\sin^2\theta} + \cos\psi\,\mathrm{ctg}\vartheta\right)p_\psi - \sin\psi p_\psi +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha^2\beta^2\mathrm{ctg}^2\theta + \alpha\beta\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + \frac{3}{2}(\alpha-1)\cos^2\theta. \qquad (1)$$

Здесь p_ψ, p_θ — безразмерные импульсы, соответствующие координатам ψ и θ; α, β — безразмерные параметры ($\alpha = \dfrac{C}{A}, \beta = \dfrac{r_0}{\omega_0}$, где r_0 — проекция абсолютной угловой скорости спутника на его ось динамической симметрии *Oz*; ω_0 — угловая скорость центра масс спутника). Независимой переменной является истинная аномалия $\nu = \omega_0 t$.

Уравнения движения имеют частное решение

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2};\ \cos\psi_0 = -\alpha\beta;\ \ p_{\theta_0} = \sin\psi_0;\ \ p_{\psi_0} = 0, \qquad (2)$$

отвечающее так называемой гиперболоидальной прецессии спутника, при которой ось динамической симметрии *Oz* спутника лежит в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору центра масс, и составляет угол $\pi - \psi_0$ с нормалью к плоскости орбиты [1, 2].

Если гиперболоидальная прецессия устойчива в линейном приближении, то уравнения движения допускают существование однопараметрического семейства периодических решений Ляпунова, рождающихся из гиперболоидальной прецессии. Эти периодические решения могут быть получены в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра [3]. Если параметр семейства не является малым, то в общем случае получить аналитическое представление данных решений невозможно; в связи с этим представляет интерес задача численного построения решений. Цель данной работы — численно-ана-литическое построение семейства периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии.

Метод построения семейств периодических решений гамильтоновой системы. В работе [4] предложен метод численного продолжения по параметрам периодических решений автономных гамильтоновых систем. Идея метода принадлежит A. Deprit и J. Henrard [5]. Суть метода состоит во введении локальных координат — нормального и тангенциального смещений в окрестности некоторого известного (опорного) периодического решения. Это позволяет свести краевую задачу нахождения периодического решения к задаче Коши. Изложим алгоритм построения периодических решений в соответствии с работой [4]. Пусть задана автономная обобщенно-консервативная механическая система с $J+1$ степенью свободы и гамильтонианом $H\left(\overline{z}, \overline{p}\right)$, где $\overline{z} = \left(\overline{x}, \overline{y}\right)^{\mathrm{т}}$, $\overline{x} = \left(x_1 \ldots x_{J+1}\right)^{T}$ — координаты, $\overline{y} = \left(y_1 \ldots y_{J+1}\right)^{\mathrm{т}}$ — импульсы, $\overline{p} = \left(p_1 \ldots p_k\right)^{\mathrm{т}}$ — вектор параметров. Пусть для данной системы известно *опорное* — периодическое решение $\overline{Z} = \overline{Z}(t, \overline{P})$ с константой энергии $H(\overline{Z}) = h$ и параметрами $\overline{p} = \overline{P}$, где t — независимая переменная. Будем искать новое $T^*(\overline{p})$-периодическое решение $\overline{z}(t, \overline{p})$, являющееся аналитическим продолжением (по параметрам) опорного решения, где $\overline{p}$ — новые значения параметров, $H(\overline{z}) = h^*$ — константа энергии для нового решения. Новое решение отвечает условиям периодичности и принадлежности к семейству периодических решений, порождаемых опорным решением:

$$\overline{z}(0, \overline{p}) = \overline{z}\left(T^*(\overline{p}), \overline{p}\right);$$

$$\lim_{\overline{p} \to \overline{P}} \overline{z}(t, \overline{p}) = \overline{Z}(t, \overline{P}); \quad \lim_{\overline{p} \to \overline{P}} T^*(\overline{p}) = T(\overline{P}).$$

Введем обозначения [5]: $\overline{\pi} = \overline{p} - \overline{P}$, $\overline{\xi} = \overline{z} - \overline{Z}$, где $\overline{\pi}$ — заданные приращения параметров, $\overline{\xi}$ — локальные координаты в окрестности опорного периодического решения. Определим в фазовом пространстве подвижную (сопровождающую) систему координат $\overline{w} = \left[\overline{n_u}\, m_u\, \overline{n_v}\, m_v\right]^{\mathrm{т}}$, где $\overline{n_u}$ и $\overline{n_v}$ — нормальные смещения, m_u и m_v — тангенциальное и энергетическое смещения. Переход к подвижной системе координат осуществляется с помощью преобразования $\overline{\xi} = S\overline{w}$, где S — ортогональная симплектическая матрица, алгоритм построения которой приводится в работе [5]. Константу энергии h будем рассматривать как внутренний параметр. В подвижной системе координат канонические дифференциальные уравнения для нормальных смещений не зависят от тангенциальных и энергетических смещений.

Поиск нового периодического решения осуществляется в два этапа: предиктор и корректор. На этапе предиктора в результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающей изменение величин $\overline{n}_u$, m_u, $\overline{n}_v$, m_v, определяются значения нормальных, тангенциального и энергетического смещений, а также поправка к периоду τ, дающие при переходе к исходным координатам начальные условия нового решения, период которого $T^* = T + \tau$. Найденное решение $\overline{z} = \overline{z}(t, \overline{p})$ будет периодическим лишь приближенно. Уточнение начальных условий и периода нового решения выполняются на этапе корректора. На данном этапе в результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений для величин $\overline{n}_u$, m_u, $\overline{n}_v$, m_v становятся известны уточненные начальные условия и период решения $\overline{z} = \overline{z}(t, \overline{p})$. При удачном выборе уточняемого решения каждое применение корректора позволяет найти поправки к начальным условиям и периоду, имеющие следующий порядок малости по сравнению с поправками предыдущего шага. Подробное описание этапов предиктора и корректора приведено в [4].

Для численного построения семейства периодических решений по данному методу необходимо знать опорное решение, не являющееся положением равновесия. Критерием остановки работы алгоритма служит нахождение так называемого *критического* решения, из которого семейство не может быть продолжено данным методом вследствие нарушения достаточных условий теоремы Пуанкаре о существовании периодического решения. Такая ситуация называется «*смертью*», или *естественным завершением* семейства [5, 6].

Методика и алгоритм выбора приращений параметров и константы энергии. При разработке программной реализации приведенного метода возникла необходимость повысить скорость работы алгоритма. Для увеличения быстродействия выбор приращений параметров и константы энергии проводится в зависимости от параметров опорного решения и заданной погрешности ε.

Погрешность работы алгоритма определяется формулой

$$\Delta z = \Delta z(h, \overline{p}, \overline{\pi}) = \left| z(T) - z(0) \right|, \qquad (3)$$

где $\overline{\pi} = (\Delta\overline{p}, \Delta h)^{\mathrm{T}}$ — приращения параметров и константы энергии. Разложив Δz в ряд Тейлора и отбросив члены выше первого порядка малости, получим

$$\Delta z(h, \overline{p}, \overline{\pi}) = \Delta z_0 + \Delta z_h \Delta h + \sum_i \Delta z_{p_i} \Delta p_i + \sum_j \Delta z_{\pi_j} \Delta\pi_j,$$

где $\Delta z_h = \dfrac{\partial(\Delta z)}{\partial h}$; $\Delta z_{p_i} = \dfrac{\partial(\Delta z)}{\partial p_i}$; $\Delta z_{\pi_i} = \dfrac{\partial(\Delta z)}{\partial \pi_i}$.

При $\overline{\pi} = \mathrm{const}$ данное разложение принимает вид

$$\Delta z(h, \overline{p}) = \Delta z_0 + \Delta z_h \Delta h + \sum_i \Delta z_{p_i} \Delta p_i. \qquad (4)$$

Исходя из разложения (4) и учитывая порядок ε, погрешности Δz_0 предыдущего шага, значения приращений можно подобрать так, что будут выполнены следующие оценки:

$$\Delta z_h \Delta h \sim \varepsilon; \; \Delta z_{p_i} \Delta p_i \sim \varepsilon. \tag{5}$$

В программной реализации условие $\overline{\pi} = \text{const}$ обеспечивается за счет объединения последовательных шагов в группы конечной длины, в пределах которых не применяется корректор, а приращения параметров остаются постоянными. В этой задаче длина группы составляет 4 шага. После выполнения последнего шага группы делается проверка на соответствие критерию точности $\Delta z(h, \overline{p}) < \varepsilon$. Если данный критерий выполняется, то, учитывая оценки (5), вычисляют новые значения приращений по формулам

$$\Delta h = \frac{\varepsilon}{\Delta z_h}; \; \Delta p_i = \frac{\varepsilon}{\Delta z_{p_i}}, \tag{6}$$

а затем осуществляют этап корректора, на котором уточняется решение, полученное на последнем шаге. Если же критерий не выполняется, то приращение варьируемого параметра делится пополам и выполнение последней группы шагов повторяются. Блок-схема программной реализации описанной части алгоритма представлена на рис. 1.

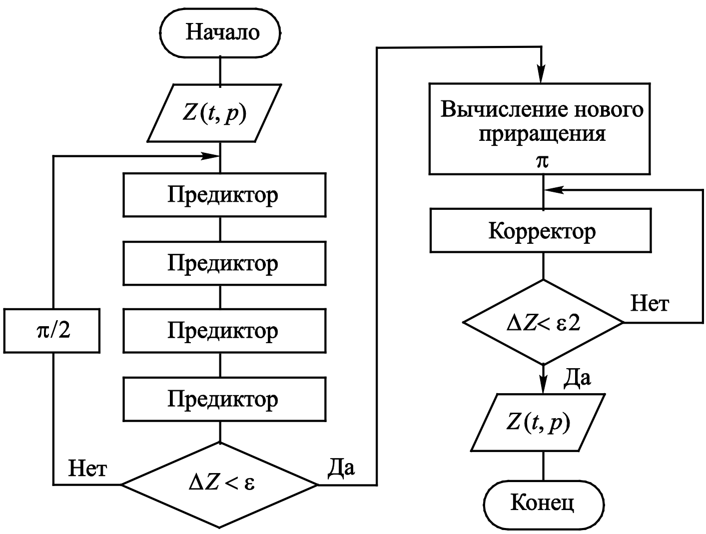

Рис. 1. Блок-схема алгоритма вычисления нового периодического решения: ε2 — задаваемая величина, определяющая точность работы корректора

Численно-аналитическое построение семейств периодических движений симметричного спутника в случае его гиперболоидальной прецессии. Построение семейств периодических решений проводили в два этапа. На первом этапе по методу Ляпунова были найдены опорные решения системы (1) в окрестности гиперболоидальной прецессии (2) в виде сходящихся рядов по малому параметру. В общем случае существуют два семейства периодических решений данного типа с периодами, близкими к $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ и $T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2}$, где ω_1 и ω_2 — частоты малых линейных колебаний ($\omega_1 > \omega_2$). В предлагаемой работе в качестве опорных выбираются так называемые короткопериодические решения с периодами, близкими к T_1, существование которых всегда гарантируется теоремой Ляпунова о голоморфном интеграле [7].

В качестве малого параметра выбрано отклонение полной механической энергии Δh от ее значения на гиперболоидальной прецессии. На втором этапе опорные решения были численно продолжены по параметрам с помощью приведенного алгоритма. В окрестности опорного ляпуновского решения при значениях константы энергии $1 \cdot 10^{-8} \le h \le 1 \cdot 10^{-4}$ приращения параметров выбирали исходя из соотношения $\pi_i \approx h$. При $h > 1 \cdot 10^{-4}$ выбор приращений проводили в соответствии с формулами (6). Погрешность (3) получаемых решений не превышала $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Для спутников с геометрией масс пластинки ($\alpha = 2,\ \beta = 0,3$) и близкой к стержню ($\alpha = 0,1,\ \beta = 0,3$) в аналитическом виде найдены ляпуновские опорные решения и численно построены однопараметрические семейства периодических решений. В качестве параметра использовали константу энергии h. На рис. 2 и 3 для принадлежащих полученным семействам решений приведены зависимости периода от константы энергии и характерные формы траекторий в проекции на плоскость $\psi - \theta$.

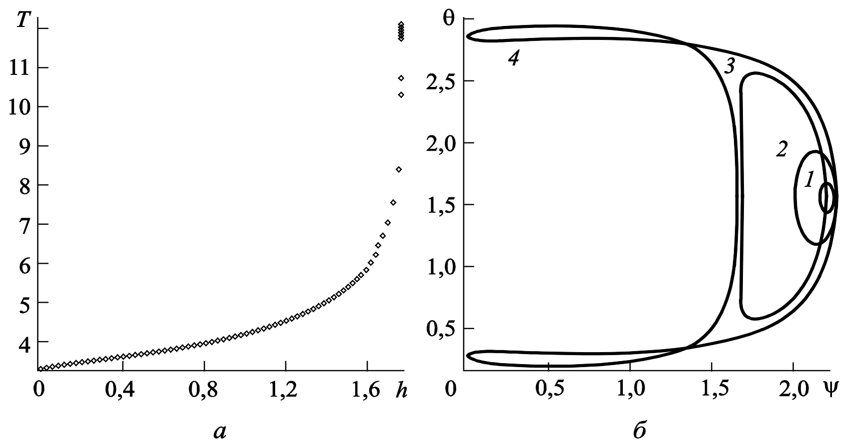

Рис. 2. Зависимость периода T от константы энергии h (*а*) и характерные формы траекторий в проекции на плоскость $\psi - \theta$ (*б*) для спутника-пластинки:
1 — h = 0,02568207654, T = 3,402713243; *2* — 0,2256820665, 3,537270619; *3* — 1,22568204, 4,69963124; *4* — 1,770678236, 12,1523945

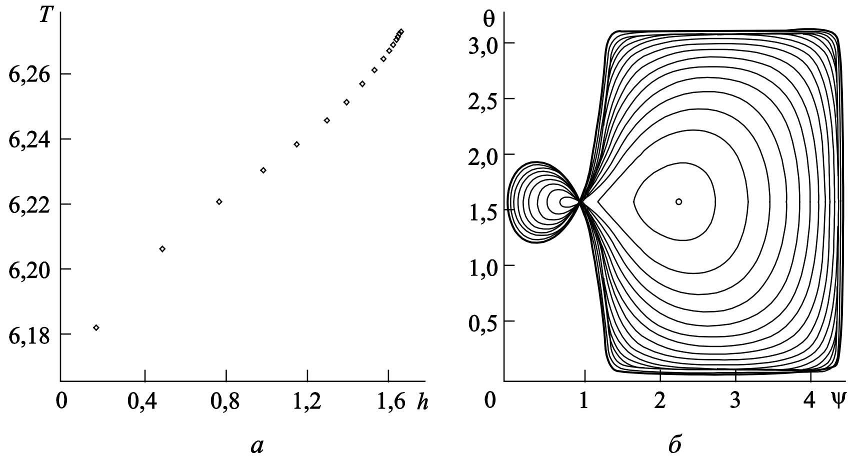

Рис. 3. Зависимость периода T от константы энергии h (*а*) и характерные формы траекторий в проекции на плоскость $\psi - \theta$ (*б*) для спутника, близкого по геометрии масс к стержню

Для короткопериодического ляпуновского решения со значениями параметров $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}3$ построено двухпараметрическое семейство периодических решений с параметрами α и h (рис. 4).

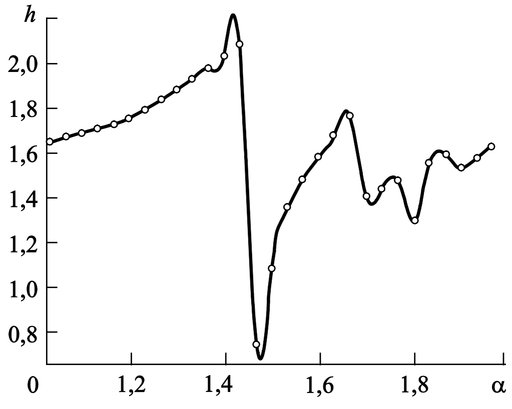

Рис. 4. Зависимость константы энергии h от инерционного параметра α

Заключение. В данной работе разработана программная реализация метода работы [5]. Получены рекомендации по методике выбора приращений параметров и разработан алгоритм, реализующий данные рекомендации. Для определенных значений параметров осуществлено численно-аналитическое построение семейства периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ №14-21-00068 в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белецкий В.В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле*. Москва, Изд-во МГУ, 1975, 308 с.

[2] Маркеев А.П. *Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс*. Москва, Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009, 369 с.

[3] Малкин И.Г. *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*. Москва, ГИТТЛ, 1956, 491 с.

[4] Каримов С.Р., Сокольский А.Г. Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем. *Препринт ИТА АН СССР*, 1990, № 9, 32 с.

[5] Deprit A., Henrard J. Natural Families of Periodic Orbits. *The Astronomical Journal*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 158–172.

[6] Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики*. Москва, Наука, 1967, 524 с.

[7] Дубошин Г.Н. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*. Москва, Наука, 1976, 864 с.

Статья поступила в редакцию 27.04.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сухов Е.А., Бардин Б.С. Численно-аналитическое построение семейства периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 5.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2016-05-1489

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XL Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 26–29 января 2016 г.

Сухов Егор Аркадьевич окончил МАИ в 1990 г. Аспирант кафедры теоретической механики МАИ. Область научных интересов: теория устойчивости, теория нелинейных колебаний, небесная механика, динамика спутников.
e-mail: sukhov.george@gmail.com

Бардин Борис Сабирович окончил МАИ в 1966 г. Д-р. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теоретической механики МАИ, профессор РАН. Область научных интересов: теория устойчивости, теория нелинейных колебаний, небесная механика, динамика спутников. e-mail: bsbardin@yandex.ru

Numerical analysis of periodic motions of a dynamically symmetric satellite originated from its hyperboloidal precession

© E.A. Sukhov, B.S.Bardin

Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, 125993, Russia

The article presents families of periodic satellite movements originated from its hyperboloidal precession as a special case of a dynamically symmetric satellite — solid body motion about the center of mass in a circular orbit. The parameters of the family are total mechanical energy deviation from its value on the hyperboloidal precession and the ratio of the polar and equatorial moments of inertia of the satellite (inertial parameter).When energy values are close to the value in the hyperboloidal precession, periodic motions are obtained by Lyapunov technique as convergent series. For arbitrary values of energy for obtaining periodic motions numerical parameter continuation method for solution families proposed by A.G. Sokolskiy and S.R. Karimov was applied. The research techniques are described briefly, recommendations on the selecting the parameter increments are set out, the results of constructing a family of periodic motions originated from satellite hyperboloidal precession are presented.

Keywords: *hamiltonian mechanics, numerical methods, periodic motions, symmetric satellite, hyperboloidal precession.*

REFERENCES

[1] Beletskiy V.V. *Dvizhenie sputnika otnocitelno tsentra mass v gravitatsionnom pole* [The Motion of the Satellite about the Center of Mass in a Gravitational Field]. Moscow, MGU Publ., 1975, 308 p.

[2] Markeev A.P. *Lineynye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otnositelno tsentra mass* [Linear Hamiltonian Systems and Some Problems of Stability of Satellite Motion about the Center of Mass]. Moscow, Izhevsk, SRC Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Sciences Publ., 2009, 369 p.

[3] Malkin I.G. *Nekotorye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy* [Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations]. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1956, 491 p.

[4] Deprit A., Henrard J. Natural Families of Periodic Orbits. *The Astronomical Journal*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 158–172.

[5] Karimov S.P., Sokolskiy A.G. *Metod prodolzheniya po parametram estestvennykh semeystv periodicheskikh dvizheniy gamiltonovykh system* [Parameter Continuation Method for Natural Families of Periodic Motions of Hamiltonian Systems]. Preprint, Institute of Theoretical Astronomy of the USSR Academy of Sciences Publ., 1990, no. 9, 32 p.

[6] Winter A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1941. [In Russ.: Winter A. Analyticheskie osnovy nebesnoy mekhaniki, Moscow, Nauka Publ., 1967, 524 p.

[7] Duboshin G.N. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoy mekhanire i astrodinamike* [Reference Guide on Celestial Mechanics and Astrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 864 p.

Sukhov E.A., graduated from Moscow Aviation Institute in 1990. Post-graduate (Ph.D.) student, Department of Theory of Mechanics, Moscow Aviation Institute, Research interests: stability theory, theory of nonlinear oscillations, celestial mechanics, dynamics of satellites. e-mail: sukhov.george@gmail.com

Bardin B.S., graduated from Moscow Aviation Institute in 1966. Dr. Sci. (Phys.&Math.), Head of the Department of Theory of Mechanics, Moscow Aviation Institute, Professor, Russian Academy of Sciences. Research interests: stability theory, theory of nonlinear oscillations, celestial mechanics, dynamics of satellites. e-mail: bsbardin@yandex.ru