

## Исследование возможности непрямого перелета на ограниченную орбиту вокруг точки либрации $L_2$ системы Земля — Луна

© М.С. Гуськова<sup>1</sup>, С.А. Бобер<sup>1,2</sup>, С.А. Аксенов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва, 124458, Россия

<sup>2</sup> ИКИ РАН, Москва, 117997, Россия

*В работе проанализированы возможности перелета на орбиту вокруг транс-лунной точки либрации с использованием гравитационного маневра около Луны. Проведены исследования орбит, на которые может попасть аппарат без применения промежуточных маневров после облета Луны. В работе смоделирован перелет с парковочной околоземной орбиты на различные орбиты. Построены цветовые карты характеристик, зависящих от параметров точки облета и карта, отражающая области на плоскости, соответствующие квази гало-орбитам, при движении по которым космический аппарат не заходит в область полутени Луны.*

**Ключевые слова:** точка либрации, гравитационный маневр, орбиты Лиссажу, квази гало-орбиты.

**Введение.** Использование орбит вокруг точки либрации  $L_2$  (точка Лагранжа), находящейся относительно Земли за Луной на расстоянии примерно 60 тыс. км от нее, позволяет решать недоступные для эллиптических орбит задачи, что вызывает большой интерес в научных кругах. Так, в статье [1] в терминах ограниченной задачи трех тел изучены орбиты вокруг точек либрации  $L_1$ ,  $L_2$  системы Земля — Луна. Однако авторы подчеркивают необходимость учета гравитационного воздействия Солнца на эту систему, а также давления света и лунного эксцентриситета.

В статье [2] подробно описаны научные достижения, такие как изучение кратера Шредингера, расположенного на обратной стороне Луны, и отслеживание низких радиочастот для изучения первых звезд и галактик Вселенной. Статья [2] посвящена исследованию возможности применения точки  $L_2$  для решения актуальных задач космонавтики. Для того чтобы вывести космический аппарат (КА) на орбиту вокруг точки либрации, можно использовать траекторию непрямого перелета, впервые предложенную в работе [3]. Согласно схеме перелета, в окрестностях Луны реально провести два маневра: гравитационный — на расстоянии 100 км от поверхности и промежуточный для перехода на орбиту вокруг точки  $L_2$ .

В статье [4] описан метод нахождения величины и направления маневров, необходимых для удержания КА в некотором торе, вокруг номинальной орбиты гало- или Лиссажу, а также времени проведения маневров.

Данная работа посвящена исследованию возможностей перелета на орбиту вокруг транслунной точки либрации с использованием гравитационного маневра около Луны. С этой целью проанализированы орбиты, на которые может попасть аппарат без применения промежуточных маневров после облета Луны.

**Инструментарий расчета.** Движение материальной точки в гравитационном поле  $N$  притягивающих центров описывается уравнением

$$\ddot{R} = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{(R_i - R)}{|R_i - R|^3},$$

где  $n$  — количество притягивающих центров;  $G$  — гравитационная постоянная;  $R$  — радиус-вектор КА;  $m_i$  — масса  $i$ -го тела;  $R_i$  — радиус-вектор  $i$ -го тела.

Численное интегрирование системы осуществлено с помощью пакета GMAT (General Mission Analysis Tool) — свободно распространяемого программного обеспечения, созданного специалистами NASA. При интегрировании уравнений движения были учтены следующие тела Солнечной системы: Солнце, Венера, Земля, Луна, Марс, Юпитер, а также модель гравитационного поля Земли JGM-2. Для расчетов применялся метод интегрирования Рунге — Кутты 8–9-го порядка.

При численном расчете орбиты вокруг точки либрации необходимо проводить периодическую коррекцию вектора скорости КА, нивелирующую неустойчивую компоненту движения с помощью алгоритма, предложенного в работе [5].

**Схема перелета в окрестность точки  $L_2$ .** В качестве примера будем использовать непрямой перелет, схема которого представлена на рис. 1. На парковочной орбите с помощью маневра ТТІ (Transfer Trajectory Insertion) к Луне отправлен КА. В периселении полученной орбиты (в точке облета) применен второй маневр  $S_1$  — тормозной, выводящий аппарат на ограниченную орбиту в окрестности точки  $L_2$ .

Точку облета Луны задали двумя параметрами:  $R$  — расстояние от периселения до центра Луны;  $DEC$  — угол между радиус-вектором аппарата в системе с центром на Луне и плоскостью вращения Луны.

Расчет траектории до достижения точки  $S_1$  описан в работе [6]. Для заданного момента старта с помощью изменения времени нахождения на парковочной орбите и величины импульса ТТІ находим различные значения  $R$  и  $DEC$ . Подбор величины импульса в точке  $S_1$ ,

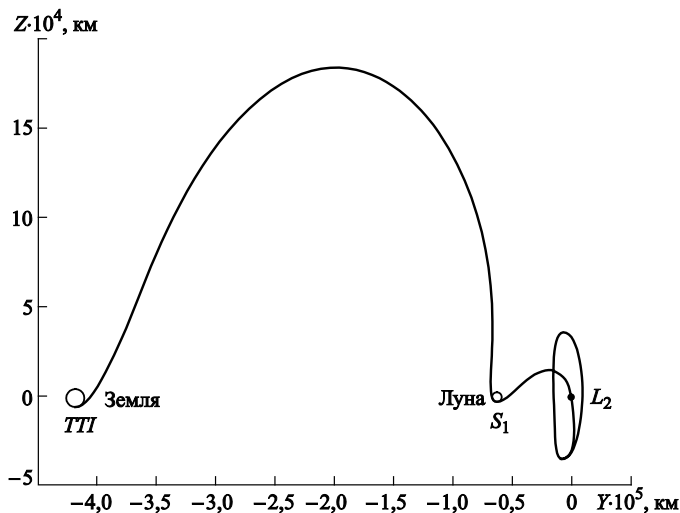


Рис. 1. Непрямой перелет в окрестность точки  $L_2$

необходимого для вывода КА на ограниченную орбиту вокруг точки  $L_2$ , рассчитываем путем исключения неустойчивой компоненты движения согласно алгоритму, описанному в [5]. Для исследования влияния координат точки облета Луны на характеристики орбиты вокруг точки либрации меняем значение параметра  $R$  от 1740 км до 4400 км, а каждое следующее значение увеличиваем на 5 %. Значение  $DEC$  изменяем с шагом в полградуса в пределах значений, которые диктует выбранная схема перелета. На рис. 2 представлена совокупность точек облета Луны во вращающейся системе координат с фиксированной осью Земля — Луна и центром на Луне.

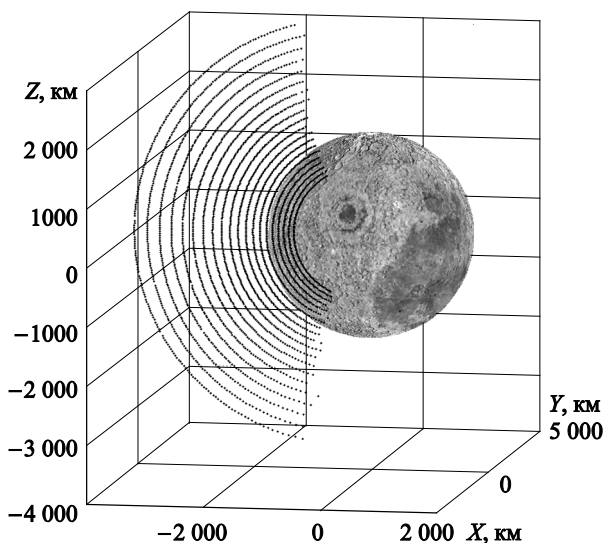


Рис. 2. Множество точек облета Луны, в которых выполняется маневр  $S_1$

**Определение типа орбиты.** Для определения типа орбиты (гало, квази гало или Лиссажу) КА совершает 30 оборотов. На основе полученных данных находят максимальное и минимальное положительные значения координаты  $Z$  ( $Z_{\max}^+$  и  $Z_{\min}^+$ ), максимальное и минимальное отрицательные значения координаты  $Z$  ( $Z_{\max}^-$  и  $Z_{\min}^-$ ) (рис. 3).

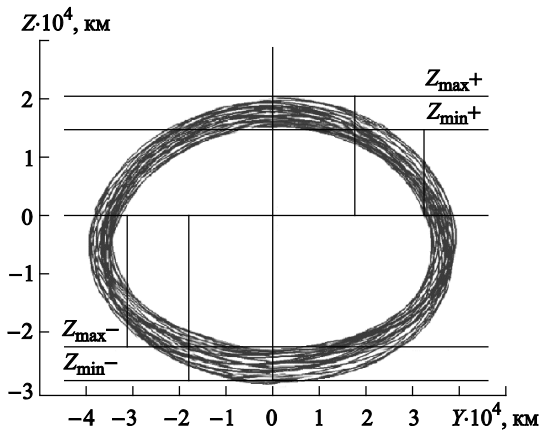


Рис. 3. Характеристики орбиты

**Анализ результатов.** Варианты характеристик координат  $Z_{\max}^+$ ,  $Z_{\min}^+$ ,  $Z_{\max}^-$ ,  $Z_{\min}^-$  при изменении угла  $DEC$  представлены на рис. 4. В интервалах  $(-26^\circ, -5,5^\circ)$  и  $(9^\circ, 43^\circ)$  характеристики  $Z_{\max}^+$  и  $Z_{\min}^-$  близки по абсолютному значению, при этом  $Z_{\min}^+$  и  $Z_{\max}^-$  стремятся к нулю, что соответствует орбитам Лиссажу. Уточнение характеристик орбит на интервале  $(5,5^\circ, 3^\circ)$  показало, что данный тип орбит можно также отнести к орбитам Лиссажу. Интервал  $(3^\circ, 9^\circ)$  соответствует квази гало-орбитам.

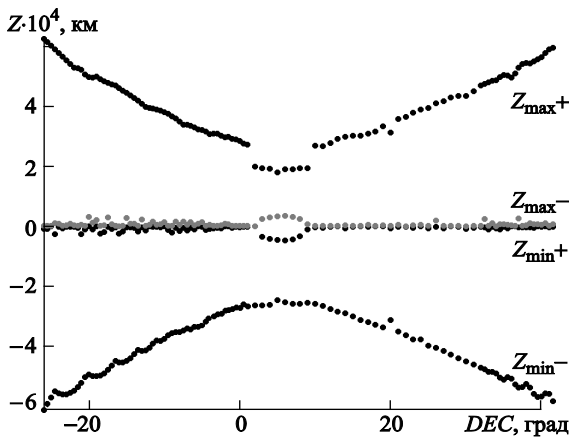


Рис. 4. Зависимость характеристик  $Z_{\max}^+$ ,  $Z_{\min}^+$ ,  $Z_{\max}^-$ ,  $Z_{\min}^-$  от угла  $DEC$  при расстоянии  $R = 1740$  км

На рис. 5 изображены цветовые карты характеристик  $Z_{\max}^+$  и  $Z_{\min}^-$ . В целом карты имеют много общего, но существует несколько различий в интервале  $DEC$  ( $-5^\circ, 15^\circ$ ) и значений  $R < 3000$  км. Для определения степени и области несимметричности введем характеристику  $\delta$ , определяемую по формуле

$$\delta = \frac{(Z_{\min}^+) - (Z_{\max}^-)}{(Z_{\max}^+) - (Z_{\min}^-)}$$

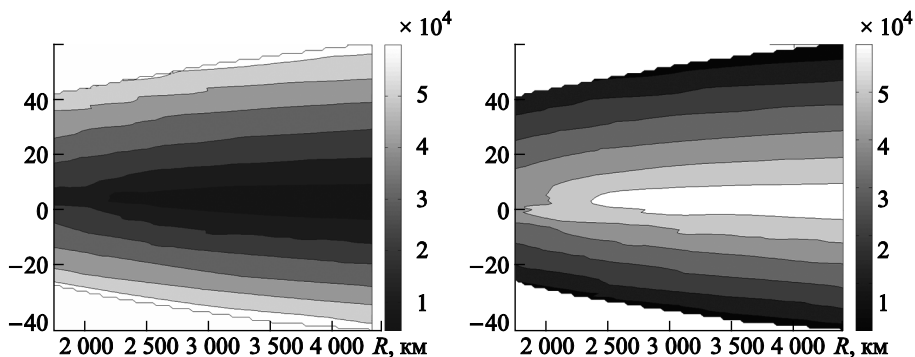


Рис. 5. Цветовые схемы характеристик  $Z_{\max}^+$  и  $Z_{\min}^-$

Исходя из определения, орбитам Лиссажу соответствуют значения  $\delta$ , лежащие около нуля, гало-орбитам — около 1. Остальные значения  $\delta$  соответствуют квази гало-орбитам. На рис. 6, а изображена цветовая карта для характеристики  $\delta$ , где видна область несимметричности, в которой максимальное значение  $\delta$  равно 0,1717. Соответственно можно говорить о том, что выход на гало-орбиту без применения дополнительных маневров невозможен, но при этом квази гало-орбиты достижимы.

Из всех орбит данной зоны были выделены только те, для которых значение координаты  $Z_{\min}^+$  превышает 3099 км (радиус полутени Луны вблизи точки  $L_2$ ), они изображены на рис. 6, б.

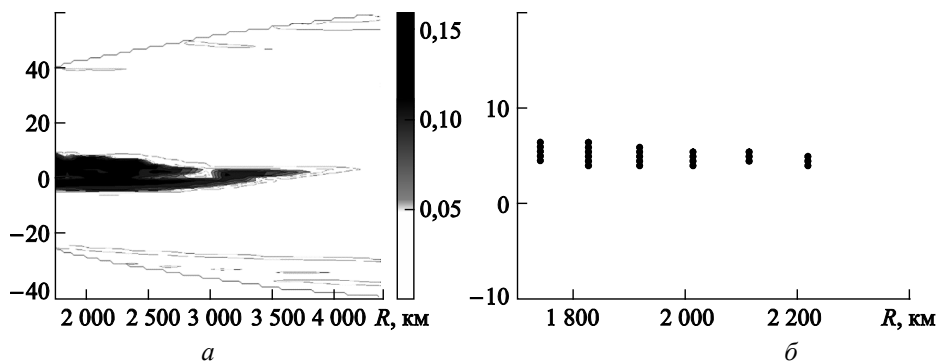


Рис. 6. Цветовая карта характеристики  $\delta$  (а); множество пар  $(R, DEC)$ , соответствующих орбитам, на которых КА не заходит в полутень Луны (б)

Анализ данных, приведенных на рис. 6, показывает, что часть параметров ( $R$ ,  $DEC$ ) в интервале (1740, 3)–(2500, 9) обеспечивает выход на квази гало-орбиты, где КА не попадает в область затенения Луны, радиус которой рассчитан в работе [7] и составляет 3099 км.

Для определения зависимости импульса, исполняемого в периселении, от его положения была создана цветовая карта (рис. 7). Время запуска — 26 октября 2021 г. — выбиралось с учетом окон, рассчитанных в работе [6]. Например, для достижения одной из таких квази гало-орбит, соответствующей параметрам точки облета  $R = 1740$  км,  $DEC = -5^\circ$ , необходимо затратить импульс величиной  $-0,2060$  км/с. Однако облет Луны на таком малом расстоянии от поверхности слишком рискован.

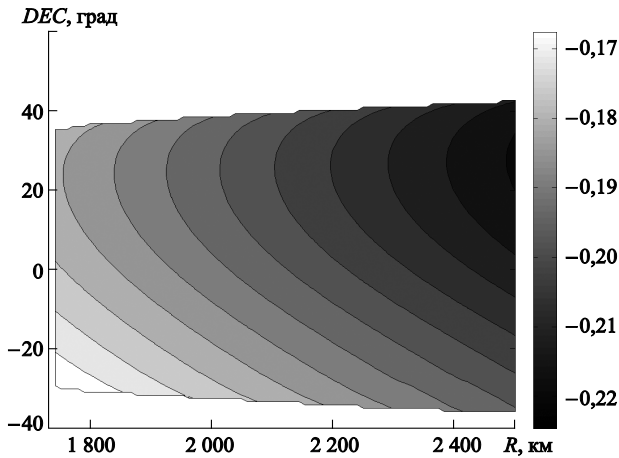


Рис. 7. Цветовая схема для величины импульса  $S_1$

На рис. 8 можно наблюдать квази-гало орбиту с начальными условиями  $R = 2220$  км,  $DEC = 5^\circ$ , а также область затенения Луны, где связь с Землей затруднена или невозможна.

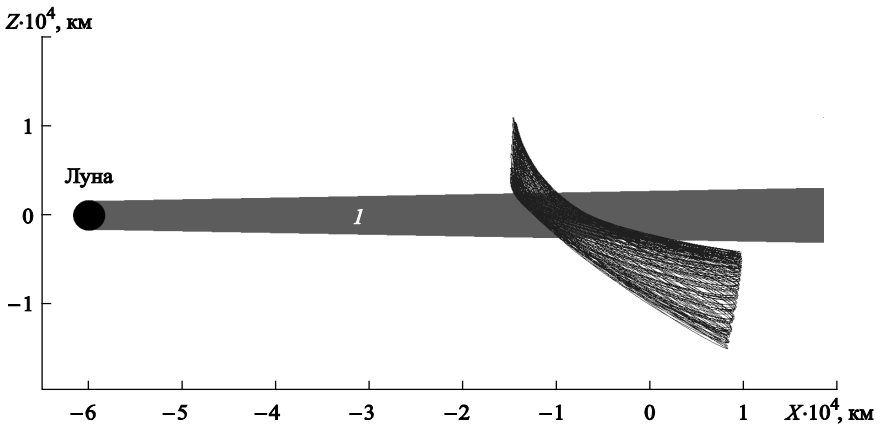


Рис. 8. Проекция квази гало-орбиты на плоскость  $XZ$  ( $R = 1740$  км,  $DEC = -5^\circ$ ). Цифрой 1 отмечена область затенения

**Заключение.** В работе смоделирован перелет с парковочной околоземной орбиты на различные орбиты в окрестности точки  $L_2$  системы Земля — Луна. Для попадания на эти орбиты рассчитаны зависимости характеристик ограниченных орбит  $Z_{\max}^+$ ,  $Z_{\min}^+$ ,  $Z_{\max}^-$ ,  $Z_{\min}^-$  от угла  $DEC$  при расстоянии  $R = 1740$  км и величины импульсов для различных точек гравитационного маневра у Луны. Созданы цветковые карты указанных характеристик. С помощью введённой характеристики  $\delta$  определены типы достижимых орбит. Построена карта, отражающая области на плоскости  $(R, DEC)$ , которые соответствуют квази гало-орбитам; при движении по этим орбитам КА не заходит в область полутени Луны. Построенная карта величины импульса позволяет оценить затраты импульса, необходимые для достижения таких орбит.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Folta D.C., Pavlak T.A., Naapala A.F., Howel K.C., Woodard M.A. Earth-Moon libration point orbit stationkeeping: theory, modeling, and operations. *Acta Astronautica*, 2014, 94 (1), pp. 421–433.
- [2] Burns J.O., Kring D.A., Hopkins J.B., Norris S., Lazio T.J. W., Kasper J. A lunar L2-farside exploration and science mission concept with the Orion Multi-Purpose Crew Vehicle and a teleoperated lander/rover. *Advances in Space Research*, 2013, 52 (2), pp. 306–320.
- [3] Farquhar R.W. *The control and use of libration-point satellites. Technical Report R-346*. NASA, 1970.
- [4] Howell K.C., Pernicka H.J. Station-keeping method for libration point trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1993, 16(1), pp. 151–159.
- [5] Бобер С.А., Аксенов С.А., Николаева Ю.А. Исследование зависимости формы ограниченной орбиты КА от начального вектора состояния в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце — Земля. Новые информационные технологии в автоматизированных системах. *Мат. Восемнадцатого науч.-техн. семинара*. Москва, 2015.
- [6] Николаева Ю.А., Аксенов С.А., Данхэм Д.В. Расчет окон запуска космического аппарата для траектории Земля — точка  $L_2$  системы Земля — Луна. *Тр. междунар. научн.-практ. конф. «International Scientific — Practical Conference “INNOVATIVE INFORMATION TECHNOLOGIES”*», Прага, 2013, с. 22–26.
- [7] Fedorenko Y, Aksenov S.A., Dunham D.W., Evaluation time visibility of the spacecraft when moving around  $L_2$  libration point of the Earth — Moon system. *INNOVATIVE INFORMATION TECHNOLOGIES. Materials of the International Scientific-Practical Conference*, Prague, 2013, p. 2.

Статья поступила в редакцию 27.01.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гуськова М.С., Бобер С.А., Аксенов С.А. Исследование возможности непрямого перелета на ограниченную орбиту вокруг точки либрации  $L_2$  системы Земля — Луна. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 3. URL: <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/1476.html> DOI 10.18698/2308-6033-2016-03-1476

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XL Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 26–29 января 2016 г.*

**Гуськова Мария Сергеевна** — студентка 4-го курса Департамента Прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ. e-mail: [maria.guskova@rambler.ru](mailto:maria.guskova@rambler.ru)

**Аксенов Сергей Алексеевич** — заместитель директора по научной работе МИЭМ НИУ ВШЭ, сотрудник ИКИ РАН. e-mail: [saksenov@hse.ru](mailto:saksenov@hse.ru), [aksenov.s.a@gmail.com](mailto:aksenov.s.a@gmail.com), <https://www.hse.ru/staff/aksenov>

**Бобер Станислав Алексеевич** — ассистент МИЭМ НИУ ВШЭ, программист ИКИ РАН. e-mail: [sbober@hse.ru](mailto:sbober@hse.ru), [stas.bober@gmail.com](mailto:stas.bober@gmail.com), <https://www.hse.ru/staff/botas>



## Study the possibility of indirect flight into the restricted orbit around the Earth—Moon’s L2 libration point

© M.S. Guskova<sup>1</sup>, S.A. Bober<sup>1,2</sup>, S.A. Aksenov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research University  
Higher School of Economics, Moscow, 124458, Russia

<sup>2</sup> Space Research Institute RAS, Moscow, 117997, Russia

*The paper analyzes the possibility of flight into the orbit around the translunar libration point using gravity-assist maneuver near the Moon. The orbits, which spacecraft can enter without the use of intermediate maneuvers after the flyby of the Moon, are studied. The flight from a parking low-Earth orbit into different orbits is simulated. Color maps of characteristics dependent on the parameters of the flyby point and the map showing the areas on the plane corresponding to the quasi-halo orbit, moving on which the spacecraft does not go to the penumbra of the Moon are constructed.*

**Ключевые слова:** libration point, gravity-assist maneuver, lissajous orbit, quasi-halo orbit.

### REFERENCES

- [1] Folta D.C., Pavlak, T.A., Haapala A.F., Howel K.C., Woodard M.A. *Acta Astronautica*, 2014, no. 94 (1), pp. 421–433.
- [2] Burns J.O., Kring D.A., Hopkins J.B., Norris S., Lazio T.J. W., Kasper J. *Advances in Space Research*, 2013, no. 52 (2), pp. 306–320.
- [3] Farquhar R.W. The control and use of libration-point satellites. *Technical Report R-346*. NASA, 1970.
- [4] Howell K.C., Pernicka H.J. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1993, no. 16 (1), pp. 151–159.
- [5] Bober S.A., Aksenov S.A., Nikolaeva Yu.A. Issledovanie zavisimosti formy ogranichennoy orbity kosmicheskogo apparata ot nachalnogo vektora sostoyaniya v okrestnosti toчки libratsii L2 sistemy Solntse–Zemlya [Study of the Dependence of the Restricted Spacecraft Orbit Form on the Initial State Vector in the Vicinity of the Sun – Earth’s L2 Libration Point]. *Materialy Vosemnadtsatogo nauchno-tekhnicheskogo seminar “Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannykh sistemakh”* [Proceedings of the eighteenth scientific and technical workshop “New Information Technologies in Automated Systems”]. Moscow, 2015.
- [6] Nikolaeva Yu.A., Aksenov S.A., Dunham D.W. Raschet okon zapuska kosmicheskogo apparata dlya traektorii Zemlya-tochka L2 sistemy Zemlya-Luna [Calculation of Spacecraft Launch Time Constraints for the Earth — L2 Point Trajectory of the Earth – Moon System]. *Trudy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii “Innovatsionnye Informatsionnye Tekhnologii”* [Proceedings of the International Scientific-Practical Conference “Innovative Information Technologies”]. Prague, 2013, pp. 22–26.
- [7] Fedorenko Yu., Aksenov S.A., Dunham D.W. Evaluation time visibility of the spacecraft when moving around L2 libration point of the Earth – Moon system. *Materials of the International Scientific-Practical Conference “Innovative information technologies”*. Prague, 2013, p. 2.

**Guskova M.S.**, fourth year student, Department of Applied Mathematics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research University Higher School of Economics. e-mail: maria.guskova@rambler.ru

**Aksenov S.A.**, Deputy Director for Science, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research University Higher School of Economics, employee, Space Research Institute RAS. e-mail: saksenov@hse.ru, aksenov.s.a@gmail.com, <https://www.hse.ru/staff/aksenov>

**Bober S.A.**, Assistant Lecturer, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, National Research University Higher School of Economics, programmer, Space Research Institute RAS. e-mail: sbober@hse.ru, stas.bober@gmail.com, <https://www.hse.ru/staff/botas>