

## Анализ оптимального трехимпульсного перехода на орбиту искусственного спутника Луны

© Е.С. Гордиенко<sup>1,3</sup>, В.В. Ивашкин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>НПО им. С.А. Лавочкина, Химки, 141400, Россия

<sup>2</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

<sup>3</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Исследована задача оптимального выведения космического аппарата от Земли на высокую круговую полярную орбиту искусственного спутника Луны (ИСЛ) радиусом 6 тыс. км. Выполнено сравнение одноимпульсной и трехимпульсной схем выведения. Анализ проведен с учетом возмущений от нецентральной поля Луны, гравитационных полей Земли и Солнца, а также конечности тяги двигателя. Показано, что трехимпульсный переход с начальной селеноцентрической гиперболы подлета к Луне на конечную орбиту ИСЛ заметно лучше по конечной массе, чем обычное одноимпульсное торможение. Приведены параметры управления, реализующего данный маневр и обеспечивающего практически те же энергетические затраты, что и в кеплеровском случае. Выявлено, что в отличие от кеплеровского в рассмотренном случае реального гравитационного поля существует оптимальное максимальное расстояние маневра.*

**Ключевые слова:** космический аппарат, лунные траектории, оптимальный переход, трехимпульсный переход, спутник Луны.

**Введение.** В данной работе рассмотрена задача оптимального выведения космического аппарата от Земли на высокую круговую орбиту искусственного спутника Луны (ИСЛ) с заданными величинами радиуса и наклона к плоскости лунного экватора. Для случая импульсов и кеплеровского поля при достаточно большом радиусе орбиты ИСЛ энергетически оптимальным будет трехимпульсный перелет с начальной селеноцентрической гиперболической орбиты подлета к Луне на конечную орбиту ИСЛ. В работе исследован случай перелета в реальном поле и с учетом конечности тяги.

Анализ выполнен в три этапа. На первом этапе трехимпульсный перелет рассмотрен для кеплеровского случая. Первый, тормозной импульс сообщается в периселении начальной гиперболической орбиты, максимально близко к Луне, на высоте 100 км. Затем КА летит от Луны к точке приложения второго импульса — далеко от Луны, близко к границе сферы действия Луны. Принято, что расстояние от Луны равно 50 тыс. км. Второй импульс — ускоряющий — увеличивает расстояние в периселении до радиуса конечной орбиты ИСЛ, принятого равным 6 тыс. км. Третий, тормозной импульс — переводит КА на конечную орбиту ИСЛ. Определены характеристики перелета для данного случая кеплеровского поля.

На втором этапе при анализе движения КА учтены возмущения от нецентральнойности поля Луны, гравитационные поля Земли и Солнца. При этом рассмотрен импульсный случай, когда величина тяги неограниченна. В результате исследования определено, что можно так выполнить трехимпульсный перелет в реальном поле, что он будет реализован при практически тех же энергетических затратах, что и в кеплеровском случае. При этом влияние возмущений парируется для обеспечения конечных условий подходящим выбором вектора прицельной дальности гиперболы подлета к Луне. Показано, что для данного реального поля существует оптимальное максимальное расстояние перелета, в отличие от случая кеплеровского поля, когда энергетика перелета уменьшается с ростом максимального расстояния.

На третьем этапе анализа учтена ограниченность тяги двигателя при перелете, при этом энергетические затраты практически не изменены.

**Постановка задачи.** Необходимо решить задачу оптимизации (с точки зрения минимизации расхода топлива) перехода с селеноцентрической гиперболической орбиты на высокую круговую орбиту ИСЛ с заданными величиной большой полуоси  $a(t_f) = a_f = R_M + H_f$  (6000 км), эксцентриситета  $e(t_f) = e_f = 0$  и наклона к плоскости лунного экватора  $i(t_f) = i_f(90^\circ)$ . Задана также начальная масса КА  $m_0$  (~2040 км). Сравним одноимпульсный и трехимпульсный варианты перехода на орбиту ИСЛ.

**Одноимпульсный вариант торможения.** Рассмотрим схему прямого перелета, при котором КА, стартуя с космодрома (Байконур, Восточный, Куру), выходит на промежуточную опорную орбиту, где в течение примерно 1–1,5 часов происходит пассивный полет. В расчетный момент двигательная установка (ДУ) разгонного блока (РБ) сообщает импульс скорости, переводящий КА на траекторию полета к Луне. Далее в течение около 4,5–5,5 суток после отделения от РБ КА летит к Луне. Для перехода на орбиту ИСЛ двигатель КА сообщает тормозной импульс. Рассмотрим минимизацию характеристической скорости для этого торможения.

Время и дату подлета к Луне выбирают так, чтобы в момент перехода на орбиту ИСЛ обеспечить видимость КА с наземных станций слежения, расположенных в Медвежьих озерах и Уссурийске. (Здесь и далее рассматривается случай, при котором КА, двигаясь от Земли, переходит на орбиту ИСЛ 28.09.2016 г.)

Определим характеристическую скорость одноимпульсного перехода на круговую орбиту ИСЛ:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_f, \quad V_1 = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_M}{r_f}}, \quad V_f = \sqrt{\frac{\mu_M}{r_f}}, \quad (1)$$

где  $V_1$  — величина вектора скорости в периселении подлетной гиперболической орбиты.

Время перелета с орбиты ИСЗ на орбиту ИСЛ составляет примерно 4,6 суток, скорость на бесконечности при подлете к Луне  $V_\infty = 821,627$  м/с,  $V_1 = 1519,651$  м/с. В нашем случае  $r_f = a_f = 6000$  км,  $V_f = 903,954$  м/с. Тогда  $\Delta V_{imp} = 615,697$  м/с.

Конечную массу после торможения вычисляем по формуле Циолковского:  $m_f = 1653,064$  кг. (Здесь и далее в расчетах использованы следующие параметры ДУ:  $P = 420$  кгс,  $P_{уд} = 298,7$  с,  $W_e = P_{уд}g_0$ , где  $g_0 = 9,80665$  м/с<sup>2</sup> — ускорение свободного падения.)

**Трехимпульсный вариант торможения.** Известно, что в случае кеплеровского поля Луны при достаточно большом радиусе орбиты ИСЛ энергетически оптимальным будет трехимпульсный перелет с начальной селеноцентрической орбиты подлета к Луне на конечную орбиту ИСЛ [1–3]. Рассмотрим схему трехимпульсного маневра у Луны (рис. 1).

Первый, тормозной импульс  $\Delta V_1$  сообщается в периселении  $P_1$  начальной гиперболической орбиты  $T_0$ . После этого КА летит от Луны к точке  $P_2$  приложения второго импульса  $\Delta V_2$  на эллиптической орбите  $T_1$  далеко от Луны. Второй импульс — ускоряющий — увеличивает расстояние в периселении  $P_3$  эллиптической орбиты  $T_2$  до радиуса  $r_f$  конечной орбиты ИСЛ  $T_f$ . Третий, тормозной импульс  $\Delta V_3$  переводит КА на конечную орбиту ИСЛ  $T_f$ . Все импульсы — апсидальные.

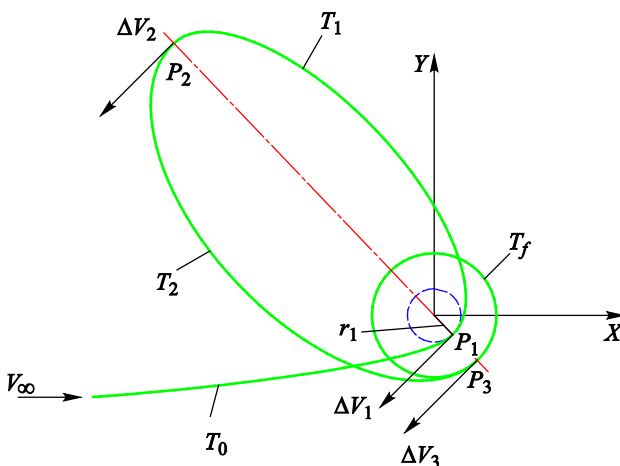


Рис. 1. Трехимпульсный маневр торможения КА у Луны

**Анализ задачи трехимпульсного перехода.** Анализ проведен в три этапа. На первом рассмотрено движение КА в центральном ньютоновском гравитационном поле притяжения Луны (кеплеровский случай), в импульсном приближении.

Сравним одноимпульсный и трехимпульсный переходы. Имеем задачу оптимального схода с гиперболической орбиты с известной величиной  $V_\infty$  на заданную околокруговую орбиту ИСЛ.

Если задано максимальное расстояние  $r_{\max}$ , которое больше, чем  $r_1$  и  $r_f$ , при переходе с гиперболической орбиты на круговую, тогда для оптимальной траектории перехода все импульсы будут апсидальными [1–3], при этом сообщается либо один, либо три импульса (см. рис. 1):

а) при  $V_\infty < V^* = \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_{\max}}}$  оптимальной будет траектория одно-

импульсного перехода с тангенциальным импульсом в перигеуме эллипса;

б) при  $V_\infty > V^*$  оптимальной будет траектория трехимпульсного перехода, причем для нее:

$$r_1 = r_{\pi 0} = r_{\pi 1}; \quad r_{\max} = r_2 = r_{\alpha 1} = r_{\alpha 2}; \quad r_3 = r_{\pi 3} = r_f.$$

Первый импульс сообщается в периселении пролетной гиперболической орбиты  $T_0$  на минимально возможном расстоянии, второй — в апоселении высокоэллиптической орбиты  $T_1$  на максимально возможном расстоянии, третий — в периселении высокоэллиптической орбиты  $T_2$ ;

в) при  $V_\infty = V^*$  имеет место независимость (по сумме импульсов скорости) трехимпульсного перехода  $T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_f$  от начального перицентрального расстояния в диапазоне

$$r_{\min} \leq r_{\pi 0} \leq r_f.$$

При  $\mu_M = 4902,79944 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ,  $r_{\max} = 50\,000 \text{ км}$  — критическая скорость  $V^* = 442,845 \text{ м/с}$ . Для заданных нами условий  $V_\infty = 821,627 \text{ м/с}$ ; следовательно, имеем второй случай, т. е. оптимальна трехимпульсная траектория перехода на орбиту ИСЛ.

Теоретический анализ показал, что для данной задачи трехимпульсного перехода суммарная характеристическая скорость становится меньше с увеличением  $r_2$  и уменьшением  $r_1$ . Рассмотрим соответствующие зависимости для задачи торможения у Луны.

**Влияние максимального расстояния  $r_2$  на величину суммарного импульса скорости.** «Заморозим» величины радиусов приложения первого и третьего импульсов:  $r_1 = 1838,57 \text{ км}$  и  $r_3 = 6000 \text{ км}$  — и будем изменять расстояние в апоселении  $r_2$  эллиптической орбиты  $T_1$  в диапазоне от  $6000 \text{ км}$  до  $10^5 \text{ км}$ . На рис. 2 и 3 представлены зависимости суммарной характеристической скорости трехимпульсного перехода, а также величин первого, второго и третьего импульсов в зависимости от величины радиуса апоселения  $r_2$ .

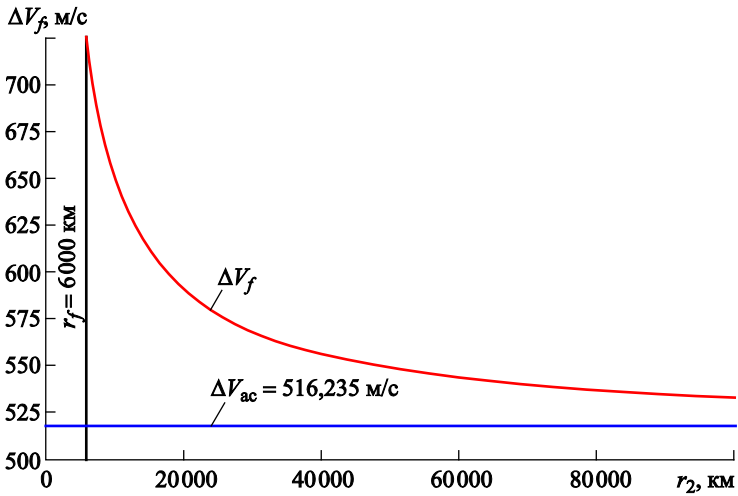


Рис. 2. Зависимость суммарной характеристической скорости трехимпульсного перехода, а также ее асимптотического значения от величины  $r_2$

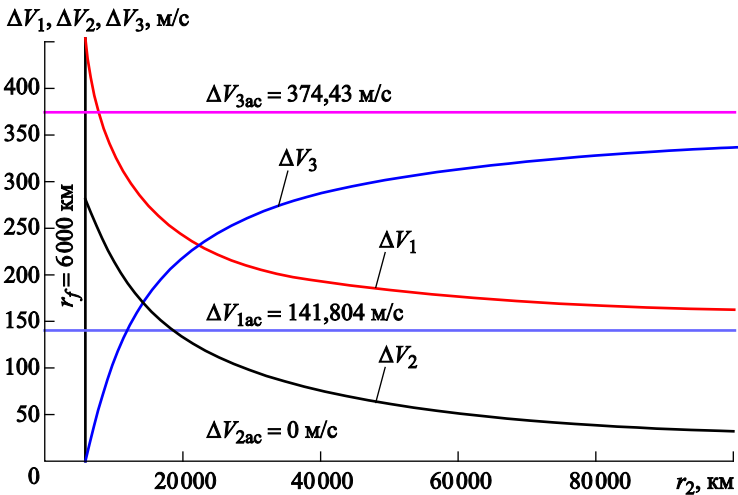


Рис. 3. Зависимости величин первого (красная кривая), второго (черная кривая) и третьего (фиолетовая кривая) импульсов скорости от величины  $r_2$

В рамках центрального поля Луны получают следующее:

$$V_{\pi 0} = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2\mu_M}{r_1}}, V_{\pi 1} = \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_1} \frac{r_2}{r_1 + r_2}}, \Delta V_1 = V_{\pi 0} - V_{\pi 1}, \quad (2)$$

$$V_{\alpha 1} = \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_2} \frac{r_1}{r_1 + r_2}}, V_{\alpha 2} = \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_2} \frac{r_3}{r_3 + r_2}}, \Delta V_2 = V_{\alpha 2} - V_{\alpha 1}, \quad (3)$$

$$V_{\pi 2} = \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_f} \frac{r_2}{r_f + r_2}}, V_f = \sqrt{\frac{\mu_M}{r_f}}, \Delta V_3 = V_{\pi 2} - V_f, \quad (4)$$

$$\Delta V_f = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3|. \quad (5)$$

В асимптотическом случае, когда  $r_2 \rightarrow \infty$ ,

$$V_{\pi 1} \rightarrow \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_1}}, V_{\alpha 1} \rightarrow 0, V_{\alpha 2} \rightarrow 0, \Delta V_2 \rightarrow 0, V_{\pi 2} \rightarrow \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_f}}, \quad (6)$$

$$\Delta V_f \rightarrow \Delta V_{ac} = V_{\pi 0} - \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_1}} + \sqrt{\frac{2\mu_M}{r_f}} - V_f.$$

Тогда получаем следующие значения:

$$V_{\pi 0} = 2451,193 \text{ м/с}, V_{\pi 1} \rightarrow 2309,388 \text{ м/с}, \Delta V_1 \rightarrow 141,804 \text{ м/с},$$

$$V_{\pi 2} \rightarrow 1278,384 \text{ м/с}, \Delta V_3 \rightarrow 374,431 \text{ м/с}, \Delta V_f \rightarrow \Delta V_{ac} = 516,235 \text{ м/с}.$$

Асимптотические значения импульсов представлены в виде горизонтальных линий на рис. 2 и 3.

Анализ показывает, что без учета возмущений в рамках центрального поля Луны суммарная характеристическая скорость монотонно уменьшается с увеличением расстояния  $r_2$ : чем дальше отлетаем от центра Луны, тем меньше топлива затратим. Для  $r_2 = 60\,000$  км суммарная характеристическая скорость составляет  $\Delta V_f \cong 542$  м/с (больше  $\Delta V_{ac}$  на 26 м/с), а для  $r_2 = 50\,000$  км –  $\Delta V_f \cong 548$  м/с (больше  $\Delta V_{ac}$  на 32 м/с).

При подходе к границе сферы действия Луны и выходе за ее возмущения траектория полета КА существенным образом изменяется. Поэтому в качестве расстояния в апоселении промежуточной орбиты, выбираем расстояние в пределах сферы действия Луны:  $r_2 = 50\,000$  км. Для получения результатов, более близких к реальным, следует учесть нецентральность гравитационного поля Луны и конечность тяги двигателя КА.

**Влияние величины  $r_1$  на величину суммарного импульса скорости.** «Заморозим» величины радиусов приложения второго и третьего импульсов и будем менять величину радиуса в периселении  $r_1$  пролетной орбиты  $T_0$  в пределах от  $r_{\min} = 1838,57$  км до  $r_f = 6000$  км.

Зависимость суммарных затрат характеристической скорости от радиуса  $r_1$  в периселении пролетной орбиты  $T_0$  имеет монотонно возрастающий характер (рис. 4).

Из анализа формул для вычисления  $\Delta V_3$ ,  $a_2$ ,  $e_2$  видно, что  $\Delta V_3 = f(a_2, e_2, r_3)$ , а  $a_2 = f(r_2, r_3)$ ,  $e_2 = f(r_2, r_3) \Rightarrow \Delta V_3 = f(r_2, r_3)$ . Отсюда следует, что при фиксированных  $r_2, r_3 = r_f$  величина третьего импульса торможения не зависит от  $r_1$ :  $\Delta V_3 = \text{const}$ .

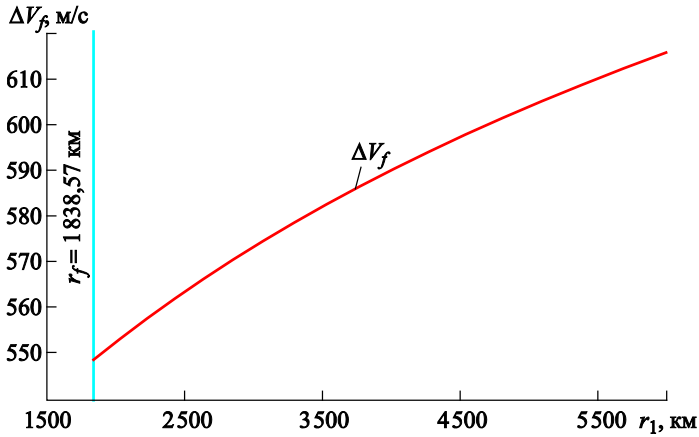


Рис. 4. Зависимость суммарной величины трехимпульсного перехода от величины  $r_1$

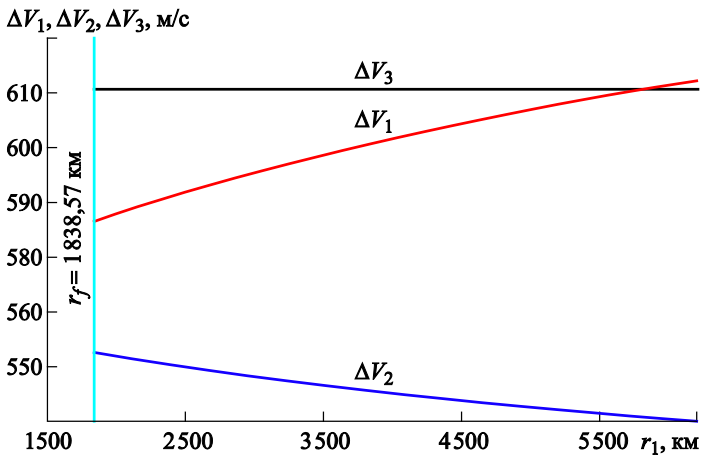


Рис. 5. Зависимости величин первого (красная кривая), второго (синяя кривая) и третьего (черная кривая) импульсов перехода от величины  $r_1$

Из анализа рис. 4 и 5, а также формул  $\Delta V_1 = f(r_1, r_2)$ ,  $\Delta V_2 = f(r_1, r_2, r_3)$ ,  $\Delta V_3 = f(r_2, r_3)$  следует, что с увеличением радиуса  $r_1$  величина суммарного импульса скорости монотонно возрастает. Таким образом, критерию минимизации характеристических затрат соответствует условие максимально близкого пролета КА от центра Луны в точке  $P_1$ . Поэтому для радиуса пролетной орбиты выбираем величину  $r_1 = 1838,57$  км.

Итак, оптимальным считаем вариант трехимпульсного перехода в центральном поле Луны при следующих значениях параметров, характеризующих траекторию перелета КА на орбиту ИСЛ:  $r_1 = 1838,57$  км,  $r_2 = 50\,000$  км,  $r_3 = 6000$  км,  $\Delta V_f = 548,689$  м/с, масса КА  $m_f = 1691,315$  кг.

Энергетически такой переход лучше, чем одноимпульсный. Выигрыш в характеристической скорости и конечной массе КА для трехимпульсного перехода по сравнению с одноимпульсным в центральном поле Луны при величине  $r_2 = 50\,000$  км составит:  $\delta V = 67,008$  м/с и  $\delta m = 38,251$  кг; а при  $r_2 = 60\,000$  км:  $\Delta V_f = 543,459$  м/с,  $\delta V = 72,238$  м/с,  $\delta m = 41,273$  кг.

Отметим, что далее будут необходимы характеристики перехода при  $r_2 = 45\,000$  км. Приведем их:  $\Delta V_f = 551,632$  м/с,  $\Delta V_1 = 187,128$  м/с,  $\Delta V_2 = 67,626$  м/с,  $\Delta V_3 = 296,878$  м/с,  $\delta V = 64,035$  м/с,  $\delta m = 36,552$  кг.

**Модель поля и уравнения движения КА при учете возмущений.** Расчет траектории перелета к Луне при учете возмущений осуществляют в рамках задачи четырех тел (КА, Земля с учетом ее сжатия (т. е. 2-й зональной гармоники  $J_2$ ), Луна с учетом ее нецентральной в разложении в ряд  $8 \times 8$  и Солнце) и определяют численным интегрированием системы дифференциальных уравнений движения точки в невращающейся геоцентрической геоэкваatorialной системе прямоугольных координат  $OXYZ$ . При этом используют среднее равноденствие и средний геоэкваатор стандартной эпохи  $J2000.0$ . Дифференциальные уравнения, описывающие движение КА, имеют вид:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_M}{r^3} \bar{r} + \sum_{i=1}^2 \mu_i \left( \frac{\bar{r}_i - \bar{r}}{|\bar{r}_i - \bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} \right) + \bar{a}_E + \bar{a}_M + \frac{\bar{P}}{t}, \quad (7)$$

где  $r$  — селеноцентрический радиус-вектор КА;  $\mu_M$  — гравитационный параметр Луны;  $\mu_i$  и  $r_i$  — гравитационные параметры и радиус-векторы возмущающих небесных тел (Земля, Солнце), где  $i = 1$  соответствует возмущениям от притяжения Земли, а  $i = 2$  — притяжению Солнца;  $a_M = \{a_{Mx}, a_{My}, a_{Mz}\}$  — возмущающее ускорение, вызванное нецентральностью поля тяготения Луны в разложении в ряд  $8 \times 8$ ;  $\bar{a}_E = \{\bar{a}_{Ex}, \bar{a}_{Ey}, \bar{a}_{Ez}\}$  — возмущающее ускорение, вызванное нецентральностью поля тяготения Земли,

$$a_{Ex} = a_{E0} \left[ -1 + \frac{5z^2}{r^2} \right] \frac{x}{r}, \quad a_{Ey} = a_{E0} \left[ -1 + \frac{5z^2}{r^2} \right] \frac{y}{r}, \quad (8)$$

$$a_{Ez} = a_{E0} \left[ -3 + \frac{5z^2}{r^2} \right] \frac{z}{r}, \quad a_{E0} = \frac{3\mu_E J_2 R_e^2}{2r^4},$$

где  $R_e, J_2$  — экваториальный радиус и коэффициент 2-й зональной гармоники геопотенциала Земли.

Векторы состояния Луны и Солнца определяем из табличных эфемерид DE-405 [4]. В исследовании использованы следующие константы:  $\mu_E = 398600,4481$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>;  $\mu_M = 4902,79914$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>;  $\mu_s =$



$= 1,32712439935 \cdot 10^{11} \text{ км}^3/\text{с}^2$ ;  $J_2 = 0,0010826348$ ;  $R_e = 6378,136 \text{ км}$ .  
Эфемеридная поправка  $\Delta t(\text{TDB}-\text{UTC})$  принята равной 68,184 с.

**Анализ трехимпульсного перелета с учетом гравитационных возмущений.** На втором этапе анализ проведен с учетом возмущений от Земли и Солнца, а также гармоник поля Луны. При этом рассмотрен импульсный случай, когда величина тяги не ограничена, а трехимпульсный переход выступает в качестве биэллиптического с обеспечением наклона конечной орбиты КА к плоскости лунного экватора  $i_f$  (точка  $P_3$ ). Движение КА описывается дифференциальными уравнениями (7).

Решение задачи трехимпульсного перехода на орбиту ИСЛ проведено по следующей методике.

КА, двигаясь по гиперболической траектории, достигает периселения в момент  $t_f$ , при этом расстояние в периселении (точка  $P_1$ )  $r_1$  равно 1838,57 км, наклон конечной орбиты радиусом  $r_f = 6000 \text{ км}$  к плоскости лунного экватора  $i_f$  ( $90^\circ$ ). Определим энергетические характеристики трехимпульсного перехода при наличии возмущений.

Первый, тормозной, импульс сообщается в точке  $P_1$  противоположно скорости; величина его изменяется так, чтобы обеспечить заданное расстояние  $r_2$  в апоселении эллиптической орбиты  $T_1$ . При этом допустимая ошибка по радиусу апоселения принята равной  $\epsilon(r_a) = 10 \text{ м}$ .

Второй, разгонный, импульс сообщается в точке  $P_2$  по скорости. Его величина меняется так, чтобы обеспечить нужное расстояние в периселении эллиптической орбиты  $T_2$  (точка  $P_3$ ), равное большой полуоси конечной орбиты ИСЛ:  $r_3 = r_f = a_f$ . Допустимая ошибка по радиусу периселения равна  $\epsilon(r_\pi) = 10 \text{ м}$ .

В точке  $P_3$  определяют необходимую величину третьего, тормозного, импульса скорости для перехода с высокоэллиптической орбиты  $T_2$  на конечную круговую орбиту ИСЛ. Затем в точке  $P_3$  определяют наклонение получившейся конечной орбиты  $i_3$  и его рассогласование  $\Delta i_f$  с заданной величиной  $i_f$ :  $\Delta i_f = i_3 - i_f$  и сравнивают с заданной величиной точности  $\epsilon(i_f)$ .

Изменяем наклонение  $i_0$  начальной гиперболической орбиты так, чтобы конечное наклонение  $i_3$  равнялось заданному  $i_f$ ,  $|\Delta i_f| < \epsilon(i_f)$ . При расчетах допустимая ошибка  $\epsilon(i_f)$  принята равной  $0,001^\circ$ . При этом сходимость получается хорошей. Задачу решаем за 4–5 итераций.

Применим описанную выше методику к задаче анализа трехимпульсного перехода на орбиту ИСЛ с учетом возмущений. Учтем, что радиус апоселения орбиты  $T_1$  менялся в диапазоне  $r_2 = [6000, 56\ 000] \text{ км}$  с тем, чтобы можно было выявить зависимость характеристик перехода от расстояния  $r_2$ . Результаты анализа представлены на рис. 6–8 и в табл. 1.

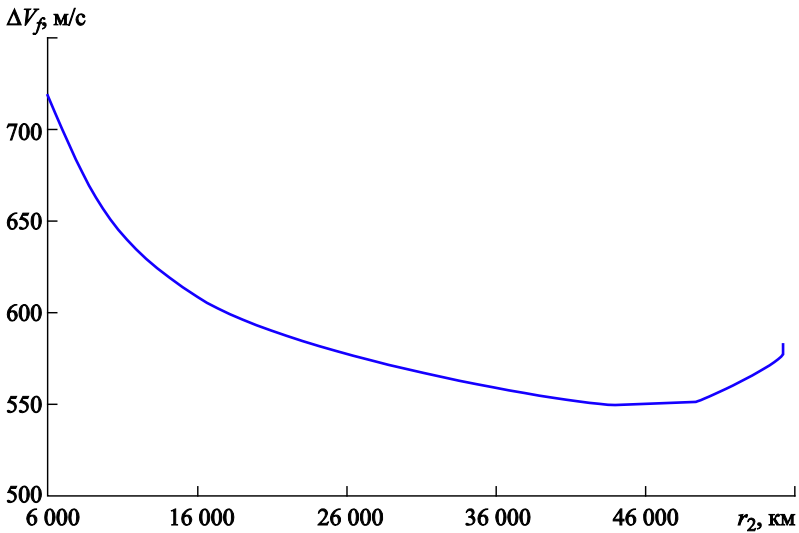


Рис. 6. Зависимость суммарной характеристической скорости при переходе на орбиту ИСЛ от величины  $r_2$

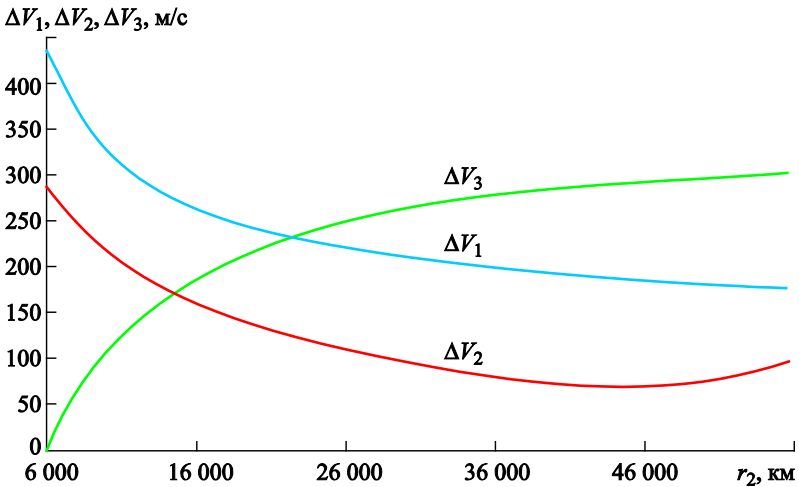


Рис. 7. Зависимость величин первого (синяя кривая), второго (красная кривая) и третьего (зеленая кривая) импульсов скорости от величины  $r_2$

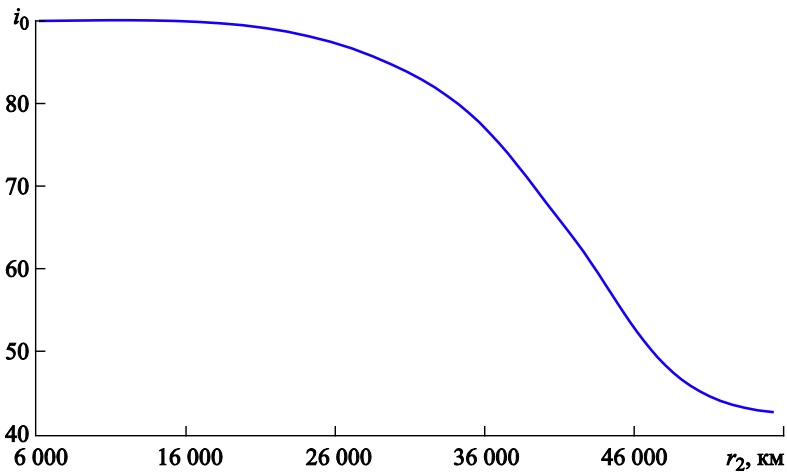


Рис. 8. Зависимость селенографического наклона подлетной гиперболы  $i_0$  от величины  $r_2$

Таблица 1

Энергетические характеристики перелета с учетом возмущений для конечного наклона  $i_f = 90^\circ$

$r_2$ , км	$\Delta V_1$ , м/с	$\Delta V_2$ , м/с	$\Delta V_3$ , м/с	$\Delta V_f$ , м/с	$i_0$ , °
6000	430,702	284,955	0,012	715,778	89,997
10000	328,798	216,282	106,976	652,057	89,865
15000	271,806	165,199	177,073	614,079	89,768
20000	241,672	133,340	218,164	593,175	89,192
25000	223,318	111,492	245,157	579,967	87,777
30000	210,760	95,337	263,963	570,061	84,600
35000	201,360	82,733	277,132	561,225	78,560
40000	193,928	73,753	285,709	553,391	68,337
42500	190,494	71,563	288,577	550,6343	61,816
45000	187,209	71,532	290,916	549,657	55,357
47500	184,105	73,577	293,022	550,704	49,547
50000	181,355	76,650	295,184	553,188	45,617
55000	177,596	95,555	301,249	574,400	42,772

По данным рис. 6, 7 и табл. 1 видно, что для конечного наклона в  $90^\circ$  оптимальным по критерию минимизации характеристической скорости будет трехимпульсный переход с параметрами:  $r_1 = 1838,57$  км,  $r_2 = 45\ 000$  км,  $r_3 = 6000$  км и  $i_0 = 55,357^\circ$ . При этом получают следующие величины импульсов скорости:  $\Delta V_1 = 187,209$  м/с,  $\Delta V_2 = 71,532$  м/с,  $\Delta V_3 = 290,916$  м/с, суммарная характеристическая скорость  $\Delta V_f = 549,657$  м/с.

Анализ показывает, что при учете возмущений зависимость характеристической скорости от промежуточного расстояния  $r_2$  не является монотонно убывающей. Существует оптимальное значение  $r_2$  (~45000 км), при котором можно достичь минимальное значение суммарной характеристической скорости, в отличие от случая кеплеровского поля, когда энергетика перелета уменьшается с ростом максимального расстояния  $r_2$ .

Для селенографического наклонения конечной орбиты  $i_f = 90^\circ$  с увеличением расстояния  $r_2$  до 16 000 км, когда возмущения малы, начальное наклонение  $i_0$  в точке  $P_1$  близко к конечному наклонению  $i_f$  (см. рис. 8). При дальнейшем увеличении расстояния  $r_2$ , когда возмущения возрастают, наблюдается существенное уменьшение наклонения пролетной гиперболы  $i_0$ . Так, при  $r_2 \cong 55$  тыс. км разница между начальным наклонением ( $i_0 = 55,357^\circ$ ) и конечным наклонением ( $i_f = 90^\circ$ ) достигает ~34,65°.

Таким образом, трехимпульсный перелет в реальном поле можно выполнить так, что его энергетические затраты будут практически теми же, что и в кеплеровском случае ( $\Delta V_f = 548,689$  м/с).

Для оптимального трехимпульсного перехода в данном реальном гравитационном поле (см. рис. 6, 7) получаем следующие значения пара-метров, характеризующих траекторию перелета КА на орбиту ИСЛ:  $r_1 = 1838,57$  км,  $r_2 = 45 000$  км,  $r_3 = 6000$  км,  $\Delta V_f = 549,657$  м/с, масса КА (в импульсном случае)  $m_{\text{фимп}} = 1690,76$  кг.

Выигрыш в характеристической скорости и конечной массе КА после трехимпульсного перехода по сравнению с одноимпульсным в центральном поле Луны составляет  $\delta V = 66,04$  м/с и  $\delta m = 27,696$  кг при оптимальной величине  $r_2 = 45 000$  км.

**Анализ трехимпульсного перелета с учетом гравитационных возмущений и конечности тяги двигателя.** На третьем этапе анализ проведен с учетом возмущений от полей Земли и ее сжатия, Солнца, Луны с учетом ее нецентральности в разложении в ряд  $8 \times 8$ , а также конечности величины тяги.

Приняты следующие параметры двигателя: тяга  $P = 420$  кг/с, удельный импульс  $P_{\text{уд}} = 298,7$  с,  $W_e = P_{\text{уд}} g_0$ , где  $g_0 = 9,80665$  м/с<sup>2</sup> — ускорение свободного падения. Масса КА при подлете к Луне составляет  $m_0 = 2039,736$  кг.

Для решения задачи перехода на орбиту ИСЛ в рамках третьего этапа используем результаты, полученные на втором.

На первом активном участке торможения, в окрестности переселения  $P_1$  начальной гиперболической орбиты  $T_0$ , тяга двигателя противоположна скорости, а длительность работы двигателя  $\Delta t_{\text{ЛУ1}}$  варьируется так, чтобы обеспечить заданное значение расстояния  $r_2$  в апоселении получающейся высокоэллиптической орбиты  $T_1$ .

При известной величине импульса  $\Delta V_1$  длительность торможения  $\Delta t_{\Delta V_1}$  определяем по формуле Циолковского:

$$\Delta t_{\Delta V_1} = \frac{m_0 - m_f}{\dot{m}}, \quad (9)$$

где  $m_f = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta V_1}{P_{уд} g_0}\right)$  — конечная масса после торможения;

$\dot{m} = \frac{P}{P_{уд} g_0}$  — постоянный массовый расход топлива, в котором тяга  $P$

задается в Ньютонах.

Тормозной импульс в точке  $P_1$  (см. рис. 1) распределяется симметрично относительно периселения пролетной орбиты. Для этого длительность работы двигателя делится пополам —  $\Delta t_{0\Delta V_1} = 0,5\Delta t_{\Delta V_1}$ . На заданный интервал времени  $\Delta t_{0\Delta V_1}$  отодвигаемся назад от периселения пролетной орбиты  $T_0$ , получившаяся точка считается точкой начала работы двигателя.

Итерационно решая краевую задачу методом Ньютона, варьируем длительность работы двигателя  $\Delta t_{\Delta V_1}$  так, чтобы расстояние в апоселении получившейся орбиты  $T_1$  получилось равным заданному  $r_2$ . Допустимая ошибка по радиусу апоселения принята равной  $\epsilon(r_a) = 10$  м. Сходимость получается хорошей, задача решается за три итерации.

Вектор тяги на втором активном участке в окрестности апоселения  $P_2$  орбиты  $T_1$  направлен по вектору скорости. Продолжительность работы двигателя  $\Delta t_{\Delta V_2}$  изменяется так, чтобы обеспечить значение расстояния в периселении  $P_3$  получившейся орбиты  $T_2$ , равное конечному радиусу  $r_f$ . При этом допустимая ошибка принята равной  $\epsilon(r_a) = 10$  м. Сходимость также получается хорошей, задача решается за три итерации.

Решение третьей краевой задачи схода с высокоэллиптической орбиты  $T_2$  на конечную круговую орбиту  $T_f$  строится следующим образом.

Исходя из величины импульса, который надо сообщить КА в точке  $P_3 - \Delta V_3$ , чтобы перейти на конечную круговую орбиту ИСЛ  $T_f$ , по формуле Циолковского определяется длительность работы двигателя  $\Delta t_{\Delta V_3}$ . Так же как и при решении первых двух краевых задач, сдвигаемся назад от точки  $P_3$  на время, равное половине длительности работы двигателя  $\Delta t_{\Delta V_3} = 0,5\Delta t_{\Delta V_3}$ . Получившаяся точка считается точкой начала работы двигателя. Вектор тяги направлен против вектора скорости.

Момент выключения двигателя определяем условием достижения заданной величины большой полуоси для конечной орбиты  $a_f$ .

Итерационно сводим к нулю величину радиальной скорости  $V_r$  (с точностью  $\varepsilon(V_r) = 1$  мм/с) в конце активного участка. При этом в качестве варьируемого параметра выбираем время начала работы двигателя  $\Delta t_{0\text{АУЗ}}$ . Сходимость получается хорошей. Задачу решаем за одну-две итерации.

Определяем апсидальное расстояние  $r_{\alpha 3}$  получившейся орбиты  $T_3$  в данной точке  $P_3$  и его отклонение от конечного радиуса  $r_f$ . Далее возвращаемся ко второму активному участку и изменяем расстояние в периселении высокоэллиптической орбиты  $T_2$  так, чтобы после третьего активного участка  $r_{\alpha 3} = r_f$  в пределах заданной точности  $\varepsilon(\Delta r_f) = 25$  м. Сходимость получается хорошей. Задачу решаем за две-три итерации.

Приведем численные результаты решения задачи на третьем этапе. Анализ влияния конечности тяги выполнен для оптимального варианта, полученного на втором этапе. Для него:  $r_1 = 1838,57$  км,  $r_2 = 45\ 000$  км,  $r_3 = 6000$  км, конечная масса КА (при импульсной реализации тяги)  $m_{\text{финп}} = 1690,76$  кг, наклонение начальной гиперболической орбиты к плоскости экватора Луны составляет  $i_0 = 55,357^\circ$ , наклонение конечной орбиты к плоскости экватора Луны задано равным  $i_f = 90^\circ$ .

Результаты решения задачи на третьем этапе представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Массово-энергетические характеристики решения задачи трехимпульсного перехода с учетом ограниченности тяги**

$\Delta t_{\text{ау1}}$ , с	$\Delta V_{x1}$ , м/с	$\delta V_{\text{гр1}}$ , м/с	$\Delta t_{\text{ау2}}$ , с	$\Delta V_{x2}$ , м/с	$\delta V_{\text{гр2}}$ , м/с	$\Delta t_{\text{ау3}}$ , с	$\Delta t_{0\text{ау3}}$ , с	$\Delta V_{x3}$ , м/с	$\delta V_{\text{гр3}}$ , м/с	$\Delta V_{x\Sigma}$ , м/с	$\delta V_{\text{гр\Sigma}}$ , м/с	$m_f$ , кг
90,11	187,845	0,636	32,803	71,536	0,004	125,532	61,273	290,929	0,013	550,31	0,653	1690,379
<p><i>Примечание.</i> <math>\Delta V_x</math> — характеристическая скорость с конечной тягой; <math>\Delta V_x = W_e \ln(m_0/m_f)</math>; <math>\delta V_{\text{гр}} = \Delta V_x - \Delta V_{\text{имп}}</math>, <math>\delta V_{\text{гр}}</math> — гравитационные потери.</p>												

Согласно проведенному анализу, суммарные гравитационные потери очень малы и составляют менее 1 м/с; начальное наклонение для третьего этапа практически совпадает с наклонением второго этапа, отличие менее  $0,1^\circ$ .

Энергетические характеристики перехода (скорость и масса) и масса КА для всех трех этапов представлены в табл. 3. Отметим, что их значения очень близки друг к другу: скорость отличается в пределах 1 м/с, а масса — в пределах 1 кг. Геометрически траектория при учете возмущений заметно отличается от траектории в идеальном кеплеровском варианте по начальному наклонению  $i_0$  и по промежуточному расстоянию  $r_2$ .

**Массово-энергетические характеристики решения задачи трехимпульсного перехода для трех этапов анализа**

Номер этапа	$\Delta V_x$ , м/с	$m_{kaf}$ , кг	$\Delta m_{kaf}$ , кг	$r_2$ , км	$i_0$ , град	$i_f$ , град
1	551,632	1689,616	36,552	45000	90	90
2	549,657	1690,756	37,696		55,357	
3	550,406	1690,324	37,260		55,269	
<p><i>Примечание.</i> <math>\Delta m_{kaf}</math> — выигрыш по массе трехимпульсного варианта перехода над одноимпульсным.</p>						

**Закключение.** При рассмотрении задачи оптимального торможения КА при подлете к Луне по начальной гиперболической орбите и переходе на высокую круговую орбиту ИСЛ проведено сравнение обычного одноимпульсного и трехимпульсного торможения с удаленной точкой приложения промежуточного импульса.

Анализ трехимпульсного перехода проведен в три этапа. На первом этапе рассматривали решение в рамках задачи двух тел, т. е. в центральном поле Луны. На втором создали математическую модель с учетом полей Земли и ее сжатия, Солнца, Луны и ее нецентральности при разложении в ряд  $8 \times 8$ . Проанализирован случай импульсной тяги. На третьем этапе к учтенным на предыдущем этапе возмущениям было добавлено условие конечности тяги двигателя.

Выявлено, что учет возмущений приводит к новым характеристикам оптимального трехимпульсного перехода по сравнению со случаем кеплеровского поля Луны. Показано, что существует оптимальное значение расстояния в точке сообщения промежуточного импульса — примерно 45 тыс. км для конечного наклонения в  $90^\circ$ . Кроме того, определено, что начальное наклонение за счет влияния возмущений отличается от конечного примерно на  $35^\circ$ .

Показано, что энергетические оптимальные характеристики трехимпульсного перехода при учете возмущений и конечности тяги практически те же, что и в кеплеровском варианте. Учет конечности тяги приводит к увеличению затрат топлива по массе и характеристической скорости примерно на 0,75 кг и 0,8 м/с соответственно.

Выигрыш в суммарной характеристической скорости и конечной массе КА для оптимального трехимпульсного перехода при учете возмущений и конечности тяги по сравнению с одноимпульсным составил примерно 65,3 м/с и 37,3 кг.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивашкин В.В. *Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет*. Москва, Наука, 1975.
- [2] Фролов К.В. и др., ред. *Машиностроение: энциклопедия*: в 40 т. Т. IV–22, кн. 1. Ракетно-космическая техника. Москва, Машиностроение, 2012.

- [3] Нариманов Г.С., Тихонравов М.К., ред. *Основы теории полета космических аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1972.
- [4] Standish E.M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*. Interoffice memorandum: JPL IOM 312, F, 1998, August 26, pp. 98–048. URL: <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
- [5] Гордиенко Е.С., Ивашкин В.В., Лю В. Анализ оптимальных маневров разгона и торможения космического аппарата при его полете к Луне. *Космонавтика и ракетостроение*, 2015, № 1 (80), с. 37–47.
- [6] Гордиенко Е.С., Ивашкин В.В. Разработка универсального алгоритма определения траектории попадания в Луну для случая центральной траектории полета к Луне. *Молодежный научно-технический вестник*, 2012, № 5. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/467776.html>
- [7] Гордиенко Е.С., Лю В. Анализ оптимального разгона КА при полете к Луне. *Молодежный научно-технический вестник*, 2013, № 9. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/606352.html>
- [8] Эльясберг П.Е. *Введение в теорию полета искусственных спутников Земли*. Москва, Наука, 1965.
- [9] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. *Введение в механику космического полета*. Москва, Наука, 1990.
- [10] Степаньянц В.А., Львов Д.В. Эффективный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений движения, *Математическое моделирование*, 2000, т. 12, вып. 6, с. 9–14.

Статья поступила в редакцию 27.01.2016

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гордиенко Е.С., Ивашкин В.В. Анализ оптимального трехимпульсного перехода на орбиту искусственного спутника Луны. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 3. URL: <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/1472.htm>  
DOI 10.18698/2308-6033-2016-03-1472

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XL Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 26–29 января 2016 г.*

**Гордиенко Евгений Сергеевич** родился в 1990 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2013 г. Аспирант кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 7 научных работ в области моделирования и построения лунных траекторий. e-mail: [gordienko.evgeny@gmail.com](mailto:gordienko.evgeny@gmail.com)

**Ивашкин Вячеслав Васильевич** родился в 1937 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1960 г. Главный научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Д-р физ.-мат. наук, профессор, академик Российской академии космонавтики им. К.Э. Циолковского, профессор-консультант Харбинского технологического института (Китай). Профессор кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» факультета «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных публикаций в области механики космического полета, оптимальных траекторий, лунных траекторий, космической навигации, проблемы обеспечения астероидно-кометной безопасности, истории космонавтики. e-mail: [ivashkin@keldysh.ru](mailto:ivashkin@keldysh.ru)



## Analysis of optimal three-impulse transfer to an artificial lunar satellite orbit

© E.S. Gordienko<sup>1,3</sup>, V.V. Ivashkin<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Lavochkin Research and Production Association, Khimki, 141400, Russia

<sup>2</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 125047, Russia

<sup>3</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article studies a problem of optimal transfer of a spacecraft from the Earth into a high circular Artificial Lunar Satellite (ALS) polar orbit with the radius of 6000 km. The single-impulse scheme is compared with the three-impulse one. The analysis is performed taking into account lunar gravitational field harmonics, gravitational attractions of the Earth and the Sun, and the engine thrust being limited. The results show that the three-impulse transfer from the initial selenocentric hyperbolic orbit to the final ALS one is better in terms of final mass than ordinary single-impulse deceleration. Control parameters implementing this operation and providing virtually the same power consumption as in the Keplerian case are given. The study reveals that there exists an optimal maximum distance of the maneuver in the case of real gravitational field, unlike in the Keplerian case.*

**Keywords:** spacecraft, lunar trajectories, optimal transfer, three-impulse transfer, lunar satellite.

### REFERENCES

- [1] Ivashkin V.V. *Optimizatsiya kosmicheskikh manevrov pri ogranicheniyakh na rasstoyaniya do planet* [Optimising space manoeuvres when distances to planets are limited]. Moscow, Nauka Publ., 1975.
- [2] Frolov K.V., ed. *Mashinostroenie. Entsiklopediya*. [Mechanical Engineering. Encyclopaedia]. In 40 vols. Vol. IV-22, book 1. Raketno-kosmicheskaya tekhnika [Missile and aerospace technology]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2012.
- [3] Narimanov G.S., Tikhonravov M.K., ed. *Osnovy teorii poleta kosmicheskikh apparatov* [Basic aspects of the theory of spacecraft flight]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972.
- [4] Standish E.M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26*. Available at: <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>
- [5] Gordienko E.S., Ivashkin V.V., Lyu V. *Kosmonavtika i raketostroenie – Cosmonautics and Rocket Engineering*, 2015, no. 1 (80), pp. 37–47.
- [6] Gordienko E.S., Ivashkin V.V. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskij vestnik – Youth Science and Technology Herald*, 2012, no. 5. Available at: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/467776.html>
- [7] Gordienko E.S., Lyu V. *Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskij vestnik – Youth Science and Technology Herald*, 2013, no. 9. Available at: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/606352.html>
- [8] Elyasberg P.E. *Vvedenie v teoriyu poleta iskusstvennykh sputnikov Zemli* [Introduction to the theory of artificial Earth satellites]. Moscow, Nauka Publ., 1965.
- [9] Okhotsimskiy D.E., Sikharulidze Yu.G. *Vvedenie v mekhaniku kosmicheskogo poleta* [Introduction to the mechanics of space flight]. Moscow, Nauka Publ., 1990.
- [10] Stepanyants V.A., Lvov D.V. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Modeling*, 2000, vol. 12, no. 6, pp. 9–14.

**Gordienko E.S.** (b. 1990) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2013. Post-graduate student of the Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University. Author of 7 scientific papers in the field of modelling and lunar trajectory plotting.  
e-mail: gordienko.evgenyy@gmail.com

**Ivashkin V.V.** (b. 1937) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1960. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academician of the Russian Academy of Cosmonautics. Professor of the Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft at Bauman Moscow State Technical University, Professor–Consultant at Harbin Institute of Technology (China). Chief Research Scientist at Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences. Author of over 200 scientific publications in the field of space flight dynamics, optimal space trajectories, lunar trajectories, space navigation, asteroid and comet impact hazard problems, history of astronautics. e-mail: ivashkin@keldysh.ru