УДК 330.5

Г. Г. Малинецкий, С. А. Махов,
А. В. Подлазов

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТРАН МИРА ПО ДУШЕВОМУ ВВП: ЭМПИРИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ И ПОПЫТКА ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ОБЪЯСНЕНИЯ

В работе проводится исследование распределения стран мира по такому показателю, как "валовой внутренний продукт на душу населения". Показывается, что зависимость типа ранг — размер для указанного показателя хорошо приближается показательной функцией, что означает равномерное распределение для логарифма этого индикатора. Предлагается и исследуется теоретическая модель, объясняющая данный факт.

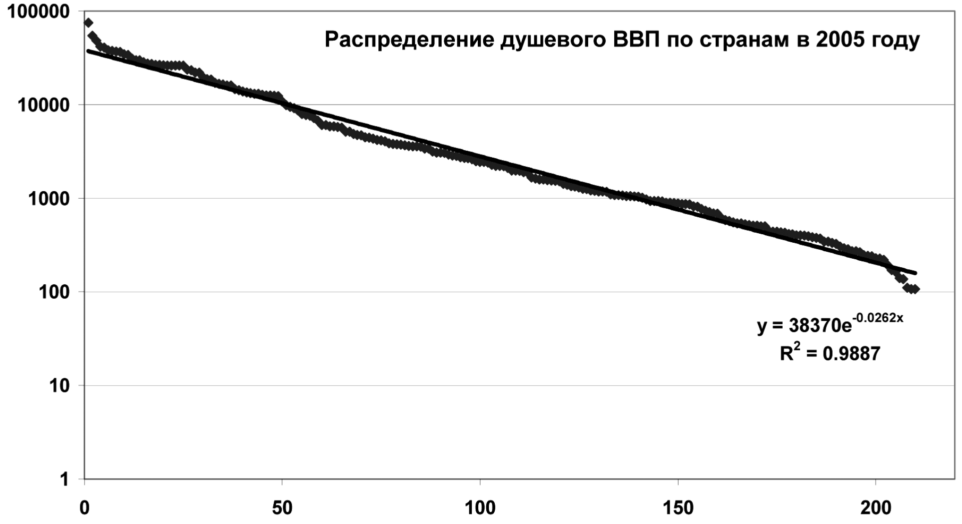
E-mail: s_makhov@mail.ru

Ключевые слова: *математическое моделирование, многоагентные системы, дифференциальные уравнения, стационарные решения, уравнение теплопроводности обратное во времени.*

Анализ эмпирических данных. Для того чтобы исследовать распределение душевого ВВП по странам мира, прежде всего, необходимы источники статистических данных. Были использованы базы данных ООН [1], Всемирного банка [2] и таблицы А. Мэдисона [3]. Наиболее полная информация по всем странам содержится в базе ООН за 1970–2007 гг., поэтому она и использовалась главным образом. Использовались таблицы, показывающие душевой ВВП каждой страны, измеренный в постоянных долларах 1990 г. По ним в текущем году строилась ранг-размерная зависимость по убыванию размера показателя.

Отметим, что еще ранее построение зависимости ранг–размер для душевого ВВП стран было осуществлено С.Ю. Малковым [4], зависимость была построена для 2003 г. по данным А. Мэдисона. Результаты получились те же, что и в настоящей работе.

В качестве примера приведен график зависимости ранг–размер в 2005 г. (см. рисунок), как типичный случай. Мы видим, что ранг-размерная кривая хорошо приближается экспонентой, что иллюстрируется нарисованной линией регрессии, имеющей вид прямой в логарифмическом масштабе. Коэффициент детерминации при этом довольно высок — 0,99. Хотя и имеют место некоторые волнообразные отклонения от линии регрессии и отдельные выбросы на концах (что понятно), в целом можно считать ранг-размерную зависимость душевого ВВП страны ничем иным, как показательной функцией. При переходе к эмпирической функции распределения это означает, что



Зависимость ранг–размера для ВВП на душу населения стран мира в 2005 г. (отдельные точки-ромбики) и регрессия (сплошная линия). График представлен в логарифмическом масштабе. Душевой ВВП измеряется в долларах 1990 г. на человека. Ранг изменяется от 1 до 210. Подавляющее большинство точек лежит на линейном участке, выпадают несколько точек в начале и конце

она также является прямой линией для *логарифма душевого ВВП*, то есть последняя величина имеет *равномерное распределение*.

Чтобы показать, что утверждение о равномерном распределении логарифма душевого ВВП носит неслучайный характер, были построены регрессии для ранг-размерных зависимостей по всем имеющимся годам, с 1970 по 2007 г. Уравнение регрессии:

$$\ln y = \ln a + br, \tag{1}$$

где y — душевой ВВП, r — ранг страны, a, b — коэффициенты регрессии.

Значение коэффициента детерминации при этом весьма высоко: от 0.96 до 0.99, это означает, что самый характер ранг-размерной зависимости не меняется. Следовательно, распределение логарифма странового душевого ВВП можно считать равномерным в течение последних 40 лет.

Резюмируем сказанное: имеется линейный участок на графике зависимости ранг–размер для логарифма душевого ВВП отдельных стран. Этот эмпирический закон наблюдается в разные годы по статистике ООН.

Ниже будет дано теоретическое объяснение этому эмпирическому факту. Иначе говоря, будет построена математическая модель взаимодействующих агентов, демонстрирующая логарифмически равномерное распределение, хотя некоторые выводы можно сделать уже сейчас.

Зависимость ранг–размер носит непрерывный характер, без резких скачков внутри интервала изменения (краевые эффекты не в счет). Это говорит против гипотезы разделения стран на кластеры “богатых” и “бедных”, т.е. на центр и периферию [5]. Точнее говоря, на основании душевого ВВП нельзя сделать вывода о таком разделении. В самом деле, если бы имело место четкое разбиение, то наблюдались бы резкие скачки показателя, превышающие погрешность измерений и заметные на фоне колебаний, чего, в общем-то, нет.

Описание модели и исследование стационарных решений. Пусть имеется дискретная система агентов. Пронумеруем их, начиная с нуля, т.е. 0, 1, 2, ... и т.д. Без ограничения общности будем считать, что агентов бесконечно много.

Далее, каждый агент характеризуется переменной величиной, которую мы обозначим латинской буквой u, не касаясь пока что ее природы (хотя и так понятно, что это душевой ВВП). Считается, что с ростом номера агента i величина u_i убывает, т.е. последовательность $\{u_i\}$ убывающая.

Рассматривается два процесса изменения величины u: автономный рост каждого агента и передача части характеристики u от более “бедного” более “богатому”, т. е., от агента с данным номером i агенту с предыдущим номером $(i-1)$, и так далее, по цепочке, вплоть до нулевого агента. Последний никому ничего не передает.

Это требует небольшого пояснения. Мы предполагаем, что агент взаимодействует с ближайшими соседями, поскольку, условно говоря, они близки по уровню развития технологий (мерой которого может считаться душевой ВВП). Технологически близким странам проще выстроить обменные взаимодействия. Некоторое затруднение может состоять в том, что в реальности страны обмениваются не только с “ближними”, но и с “дальними” соседями, а какие-то страны так и вовсе обмениваются со всеми.

Вс это верно, но при построении идеализированной модели есть резон отказаться от идеи “взаимодействия всех со всеми”, сосредоточившись на локальном взаимодействии, поскольку страны воздействуют друг на друга с различной интенсивностью. То есть, не все связи одинаково сильны и важны, нас интересуют именно сильные связи между странами, понятно, что их немного.

Речь может идти, таким образом, о выборе *радиуса взаимодействия* агента — количестве более сильных соседей, то есть агентов, с которыми осуществляется обмен. Если считать, что взаимодействие симметрично, то число более слабых соседей совпадает с числом более сильных соседей, и радиус взаимодействия одинаков в обе стороны. Пока мы рассматриваем ситуацию, когда радиус равен 1, позже будет сказано о случае произвольного радиуса.

Для удобства записи будем полагать, что время течет непрерывно, тогда для изменения характеристик каждого агента можно записать дифференциальные уравнения. Если считать, что передача части величины u от агента к агенту происходит прямо пропорционально разности их характеристик, то можно записать:

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_i) + c_i(u_i - u_{i+1}) - d_i(u_{i-1} - u_i) \text{ при } i > 0,$$
$$\frac{du_0}{dt} = f_0(t, u_0) + c_0(u_0 - u_1).$$

Дальнейшая спецификация уравнений модели может происходить различными путями, мы рассмотрим самый простой вариант, имея в виду задачу о равномерном распределении логарифма душевого ВВП.

Примем две гипотезы:

1. Все функции f_i зависят явно только от u_i, причем *линейным* образом, и, к тому же, с одним и тем же коэффициентом пропорциональности: $f_i(t, u_i) = k\, u_i$, для нулевого агента $f_0(t, u_0) = k_0\, u_0$, это предположение говорит об автономном экспоненциальном росте каждого агента;
2. Все коэффициенты c_i, d_i, отвечающие за скорость передачи и получения характеристики u, *постоянны* и *одинаковы*: $c_i = d_i = c_0$ (в дальнейшем, для сокращения записи индекс 0 отбросим).

Последнее условие, между прочим, означает выполнение закона сохранения для характеристики при передаче от агента агенту: сколько передано, столько получено.

Новая запись уравнений:

$$\frac{du_i}{dt} = ku_i - c(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \text{ при } i > 0,$$
$$\frac{du_0}{dt} = k_0 u_0 + c(u_0 - u_1). \tag{2}$$

Решать эту систему можно и в таком виде (тем более что она линейная), однако мы сделаем переход от дискретной системы агентов к непрерывной среде, введя переменную x, отвечающую за ранг: $u = u(t, x)$. Заменяя соответствующие разности $u_{j+1} - u_j$ на частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$, получим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3}$$

справедливое при $x > 0$. В нуле, при $x = 0$, величина $u(t, 0)$ должна определяться по непрерывности из данного уравнения в частных производных. Заметим, что задача сформулирована на луче, однако с тем же успехом она может быть сформулирована на отрезке $[0, 1]$.

Обратим внимание читателя на то, что уравнение (3) очень похоже на уравнение теплопроводности, только коэффициент при второй производной по пространственной переменной отрицателен, т.е. по сути, имеем обратное во времени уравнение теплопроводности. Ничего удивительного в этом нет. Уравнение теплопроводности описывает распространение энергии из данного источника по всему пространству, здесь же, наоборот, "энергия" собирается в центре. То есть рассматривается процесс, обратный распространению теплоты, поэтому вполне естественно, что, как вариант, он может быть описан обратным во времени уравнением теплопроводности.

Изучим *стационарные* решения последнего уравнения. Почему именно стационарные? Как мы видели из графика, указанная экспоненциальная зависимость размера от ранга имеет место в отдельно взятые годы, более того, характер зависимости остается таким же для разных лет. Поэтому имеет смысл говорить о *стационарном* распределении душевого ВВП страны.

Имеем при $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$: $0 = ku - cu''$, $u'' - \lambda^2 u \ = 0$, где $\lambda^2 = \dfrac{k}{c}$. Последнее уравнение – линейное с постоянными коэффициентами, решается особенно просто:

$$u(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}.$$

Константы C_1, C_2 найдем из граничных условий, вытекающих из предположений о непрерывности в нуле и конечности суммарной величины u (т.е. конечности интеграла $\int\limits_0^{+\infty} u(x)dx$, что соответствует конечности энергии):

$$u(0) = u_0, \quad u(+\infty) = 0.$$

Тогда получим:

$$u(x) = u_0 e^{-\lambda x},$$

где x — ранг агента, или

$$\ln u(x) = -\lambda x + \ln u_0.$$

Это и означает равномерность распределения логарифма нашей характеристики u.

Уравнение (3), как известно, некорректно: при изменении начального профиля решение может за конечное время уйти в бесконечность. Связано это существенным образом с локальностью взаимодействия агентов. Следовательно, если ввести некоторую нелокальность в нашу систему, то проблема неустойчивости задачи может быть обойдена. Иначе говоря, радиус взаимодействия агентов должен быть больше единицы.

Рассмотрим эту ситуацию в дискретном случае. Обратимся сразу к системе (2), изменения будем проводить для нее. В правую часть добавляются члены аналогичные члену $-c_1(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$, отражающие взаимодействие с соседями 2-го порядка, т.е. агентами с номерами $(i + 2)$ и $(i - 2)$, затем 3-го порядка, и т.д., вплоть до m-го порядка:

$$\frac{du_i}{dt} = ku_i - c_1(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) - c_2(u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}) - \\ - \ldots - c_k(u_{i+m} - 2u_i + u_{i-m}), \quad (4)$$

где m — радиус взаимодействия, $c_1, c_2, ..., c_m$ — скорости взаимодействия с соседями 1, 2, ..., m порядков соответственно, при этом $i \geq m$. Уравнения при $i < m$ рассматриваются отдельно, соответственно, возникнут краевые эффекты в решениях системы уравнений, но нас интересуют не они, а зависимости в целом. При исследовании стационарных решений получится система разностных уравнений, при этом достаточно показать, что она допускает частное решение в виде геометрической прогрессии: $u_i = q^i$, причем $q < 1$. После подстановки и сокращений имеем уравнение, справедливое для *всех агентов*:

$$k - \sum_{j=1}^{m} c_j(q^j - 2 + q^{-j}) = 0. \quad (5)$$

Легко показать, что данное уравнение имеет решение при $0 < q < 1$ и при любых положительных $k, c_1, c_2, \ldots, c_m$. Таким образом, требование локальности взаимодействия агентов для получения экспоненциального характера ранг-размерной зависимости может быть ослаблено.

Замечания и итоги. Заметим, что представленный вывод довольно абстрактен: мы нигде явно не опирались на экономическую природу рассматриваемых объектов и процессов. Рассуждения носят, скорее, физический характер.

В экономике же описанной модели соответствует, скорее всего, модель неравноценного обмена при сделках, когда более сильный и богатый в силу лучшей развитости забирает большую долю, чем слабый и бедный. Правда, обмены происходят посредством денег (или в натуральной форме), т.е., по сути, являются частью ВВП, в то время как изучаемая зависимость относится к душевому ВВП; непосредственно передать часть душевого ВВП физически невозможно. Последний парадокс можно было бы обойти, если считать численность населения каждой страны (агента) одинаковой. Однако в случае стран это не выполняется.

Пока мы оставим в стороне этот недостаток модели, укажем лишь на возможность такого объяснения. Численность населения, как правило, меняется медленнее ВВП, т.е. за год прирост ВВП выше прироста численности населения. Поэтому изменение душевого ВВП определяется в большей степени изменением самого ВВП, чем численностью населения, которая в течение года меняется незначительно и может считаться почти постоянной. Вклад, вносимый обменами в ВВП, при делении на численность населения, даст добавку и в душевой ВВП.

Авторы выражают благодарность О.И. Кривошееву за обсуждение, сделанные замечания и высказанные идеи, как по теоретическому, так и эмпирическому материалу настоящей работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-06-00402-а и 11-06-00471-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базы данных ООН. URL http://data.un.org (последнее обращение 23.07.2012).
2. Всемирный банк. Индикаторы всемирного развития. URL http://www.worldbank.org (последнее обращение 23.07.2012).
3. Maddison Historical Statistics for the World Economy. URL http://www.ggdc.net/MADDISON/oriindex.htm (последнее обращение 23.07.2012).
4. Кирилюк И. Л., Малков С. Ю. Особенности мирового экономического развития: математический анализ статистических данных // Проблемы математической истории: Основания, информационные ресурсы, анализ данных. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2008. – С. 202–215.
5. Валлерстайн И. Анализ мировых систем и ситуация в современном мире. СПб.: Университетская книга, 2001. – 416 с.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012