УДК 541.124

А. В. Котович, $\boxed{\text{Г. А. Несененко}}$

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ, ПОЛУЧЕННОГО ПРИ ПОМОЩИ АСИМПТОТИК ПУАНКАРЕ

Проведен параметрический анализ аналитического решения возмущенной задачи Коши, поставленной для одномерного уравнения теплопроводности с нелинейным источником экспоненциального типа в случае, когда начальное распределение представляет сумму двух функций, каждая из которых распределена по гауссовскому закону. Найдены значения параметров, при которых решение представлено в виде "бегущих тепловых волн". Исследован процесс нелинейного взаимодействия "бегущих тепловых волн" и установлен факт зависимости резкого увеличения их амплитуды от ширины "горячих пятен".

E-mail: shurik.kot@gmail.com

Ключевые слова: *возмущенная задача Коши, одномерное уравнение теплопроводности, асимптотики Пуанкаре.*

Рассмотрим нелинейное сингулярно возмущенное уравнение параболического типа, содержащее нелинейный тепловой источник аррениусовского типа

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \beta \exp\left\{\frac{\Theta}{1 + \mathrm{Ar} \cdot \Theta}\right\}, \tag{1}$$

$$\Theta(\xi, \tau) = \Theta^0(\xi), \quad \tau = +0, \quad -\infty < \xi < \infty, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} \to 0, \quad \xi \to \pm\infty, \tag{3}$$

где безразмерные переменные введены по схеме Д.А. Франк-Каменецкого [1]: $\Theta = (T - T_0)E/RT_0^2$ — безразмерный разогрев вещества, ξ и τ — соответственно пространственная и временна́я безразмерные координаты, $\xi = x/r, \tau = t/t^*$; r и t^* — соответственно пространственный и временно́й масштабы, $t^* = (c\rho RT_0^2)/(QEk(T_0))$ — адиабатический масштаб времени, $T = T(x, t)$ — температура, T_0 — масштабная температура, R — газовая постоянная, E — энергия активации, c — теплоемкость, ρ — плотность, $\mathrm{Ar} = RT_0/E$ — число Аррениуса, Q — тепловой эффект реакции (в единице объема), $k(T)$ — характерная константа скорости реакции при температуре T:

$k(T) = K_0 \cdot \exp\{-E/RT\}$, K_0 — предэкспоненциальный множитель, $\Theta^0 = (T_н^*(x) - T_0)E/(RT_0^2)$ — безразмерное начальное распределение разогрева вещества, $T_н^*(x)$ — распределение температуры в начальный момент времени, β — безразмерный параметр, введенный для удобства изложения: $\beta = 0$ соответствует "инертной" задаче Коши; $\beta = 1$ соответствует режиму очагового теплового взрыва. Приближенное аналитическое решение задачи (1)–(3) мы представим в виде следующей асимптотики Пуанкаре:

$$\Theta(\xi,\tau) \sim d_0(\xi,\tau) + \varepsilon d_1^0(\xi,\tau), \quad \varepsilon \ll 1, \quad \mathrm{Ar} \ll 1, \tag{4}$$

$$d_0(\xi,\tau) = d_0^{(0)}(\xi,\tau) + \mathrm{Ar}\, d_0^{(1)}(\xi,\tau) + \mathrm{Ar}^2 d_0^{(2)}(\xi,\tau), \tag{5}$$

$$d_0^{(0)}(\xi,\tau) = -\ln[\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau], \tag{6}$$

$$d_0^{(1)}(\xi,\tau) = (\ln[\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau] - 1)^2 + \\ + 1 - \frac{B\exp(-\Theta^0(\xi))}{\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau}, \tag{7}$$

$$d_0^{(2)}(\xi,\tau) = -\ln^3[\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau] + 5\ln^2[\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau] - \\ - 10\ln[\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau] + 10 - \frac{4\beta\tau}{\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau} - \\ - \frac{4B\exp(-\Theta^0(\xi))\ln[\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau]}{\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau} - \frac{B^2\exp(-2\Theta^0(\xi))}{[\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau]^2} + \\ + \frac{\{-[\Theta^0(\xi)]^3 - 5[\Theta^0(\xi)]^2 - 10\Theta^0(\xi) - 10 - 4B\Theta^0(\xi) + B^2\}\exp(-\Theta^0(\xi))}{\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau}, \tag{8}$$

где

$$B = 1 + [\Theta^0(\xi) + 1]^2; \tag{9}$$

$$d_1^{(0)}(\xi,\tau) = \frac{1}{\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau} \times \\ \times \left\{ \tau\exp(-\Theta^0(\xi))\left\{(\Theta^0(\xi))'' - [(\Theta^0(\xi))']^2\right\} - \right. \\ \left. - \frac{\Theta^0(\xi)[(\Theta^0(\xi))']^2}{\beta}\exp\{-2\Theta^0(\xi)\} - \frac{[\Theta^0(\xi))']^2\exp(-2\Theta^0(\xi))}{\beta} \right\} \times \\ \times \ln[\exp(-\Theta^0(\xi)) - \beta\tau]. \tag{10}$$

Способ получения аналитических соотношений (4)–(10) изложен в работе [2].

Формулы (4)–(10) позволяют провести аналитический параметрический анализ свойств решения $\Theta(\tau,\xi)$ задачи Коши (1)–(3).

Начальное распределение $\Theta_0(\xi)$ задается согласно формуле:

$$\Theta^0(\xi) = \frac{[T_{\text{н}}(\xi \cdot r) - T_0]E}{RT_0^2}, \tag{11}$$

$$T_{\text{н}}(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{w}\right)^2\right\} + \exp\left\{-\left(\frac{x+a}{w}\right)^2\right\}. \tag{12}$$

В соотношении (12) через a обозначен параметр, задающий расстояние между “горячими пятнами”, а через w — параметр, моделирующий ширину “горячих пятен”. Значения остальных параметров таковы: $\text{Ar} = 0{,}03$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

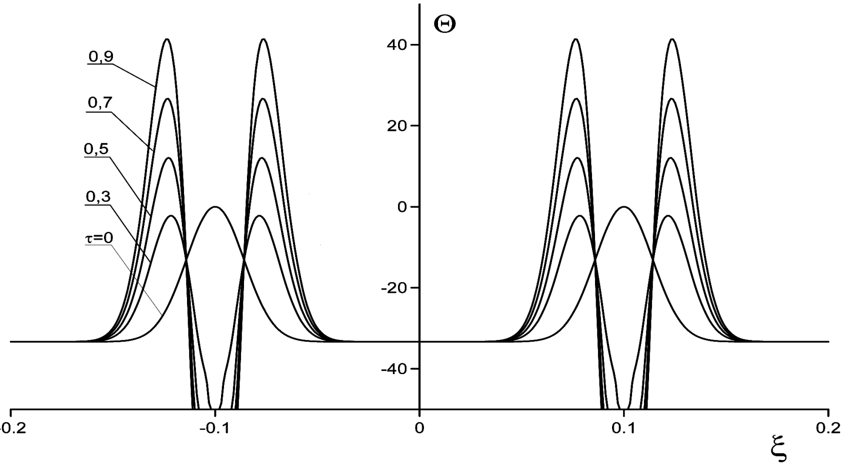

Рис. 1. Зависимость безразмерного разогрева $\boldsymbol{\Theta}$ от безразмерной координаты $\boldsymbol{\xi}$ при $\mathbf{Ar = 0{,}03}$, $\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}001}$, $\boldsymbol{\beta = 1}$, $\boldsymbol{w = 0{,}2}$, $\boldsymbol{a = 0{,}1}$ и различных значениях безразмерного времени $\boldsymbol{\tau}$

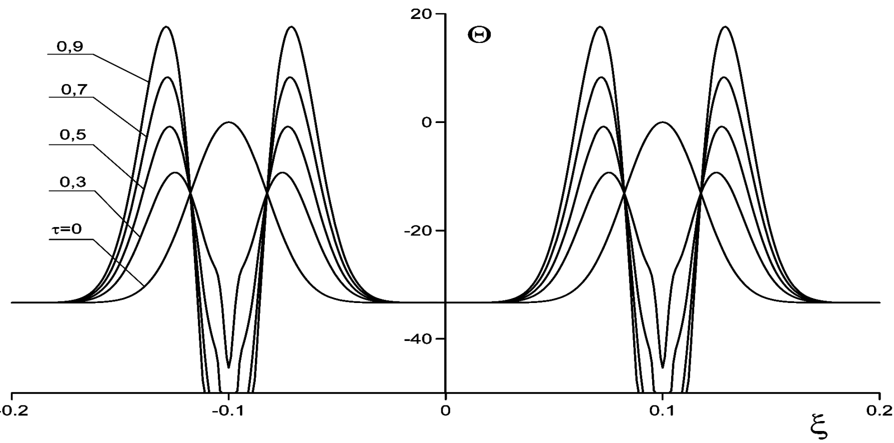

Рис. 2. Зависимость безразмерного разогрева $\boldsymbol{\Theta}$ от безразмерной координаты $\boldsymbol{\xi}$ при $\mathbf{Ar = 0{,}03}$, $\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}001}$, $\boldsymbol{\beta = 1}$, $\boldsymbol{w = 0{,}25}$, $\boldsymbol{a = 0{,}1}$ и различных значениях безразмерного времени $\boldsymbol{\tau}$

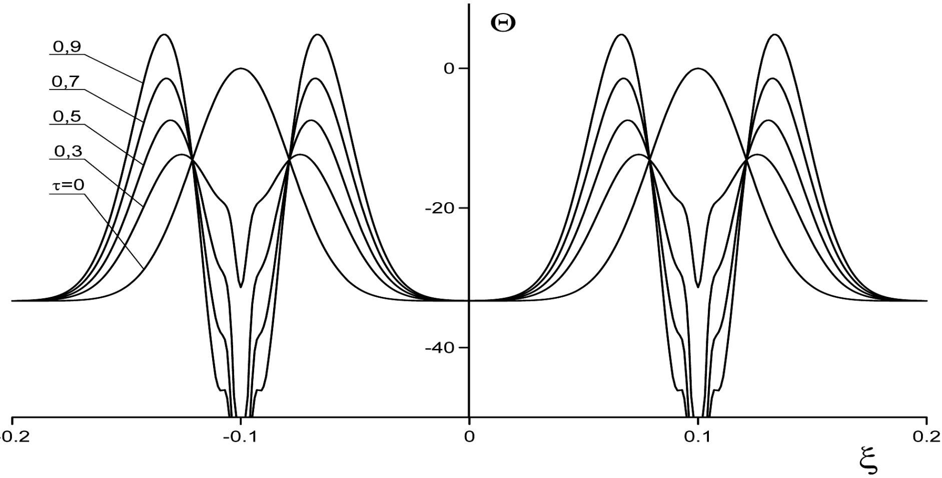

Рис. 3. Зависимость безразмерного разогрева Θ от безразмерной координаты ξ при $\mathrm{Ar} = 0{,}03$, $\varepsilon = 0{,}001$, $\beta = 1$, $w = 0{,}3$, $a = 0{,}1$ и различных значениях безразмерного времени τ

На графиках, приведенных на рис. 1–3 представлены невзаимодействующие бегущие волны ($a = 0,1$) при различных значениях ширины "горячих пятен" w ($w = 0{,}2; 0{,}25; 0{,}3$). Из графиков видно, что каждый из "пиков" $\Theta^0(\xi)$ с течением времени распадается на две симметричные "короткоживущие бегущие волны" с изменяющейся во времени амплитудой; причем одна из "бегущих волн" движется в сторону $+\infty$, а другая — в сторону $-\infty$. Любопытно отметить, что при указанном выше наборе параметров амплитуды "бегущих волн" сначала уменьшаются от нуля до примерно -2 при $w = 0{,}2$, примерно -9 при $w = 0{,}25$ и примерно -12 при $w = 0{,}3$, а затем возрастают до значений, близких к 41 при $w = 0{,}2$, близких к 17 при $w = 0{,}25$ и 5 при $w = 0{,}3$ [3, 4]. Таким образом, с увеличением ширины w "горячих пятен" уменьшение амплитуды становится больше, а ее дальнейшее увеличение становится меньше. Из графиков на рис. 1–3 следует, что расстояние $a = 0{,}1$ между первоначальными "пиками" функции $\Theta^0(\xi)$ является слишком большим для того, чтобы бегущие к началу координат (и, значит, навстречу друг другу) две "короткоживущие бегущие волны" смогли взаимодействовать друг с другом.

На графиках, представленных на рис. 4–6 показан наибольший эффект нелинейного взаимодействия "короткоживущих бегущих волн" для каждого из рассматриваемых значений ширины "горячих пятен" w. Примечательным является тот факт, что при всех значениях w итоговая амплитуда "наложенных короткоживущих волн" в несколько раз превышает первоначальные амплитуды двух "короткоживущих бегущих волн", которые двигались навстречу друг другу [3, 4]. Однако интересно отметить, что увеличение ширины w "горячих пятен" приводит к более значительному нелинейному усилению амплитуд. Так

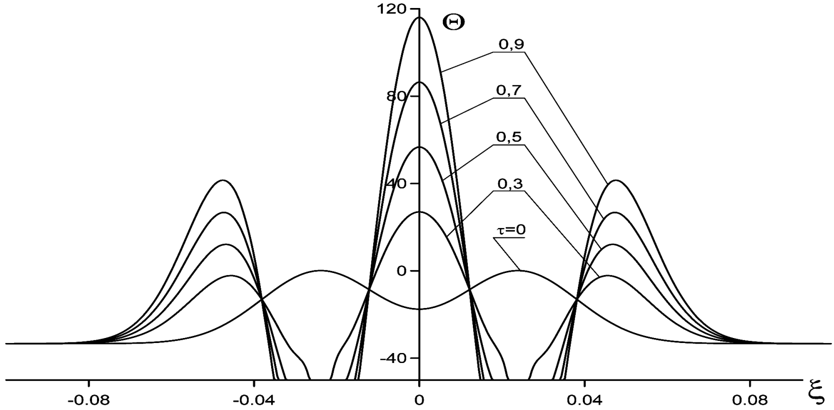

Рис. 4. Зависимость безразмерного разогрева Θ от безразмерной координаты ξ при $\mathrm{Ar} = 0{,}03$, $\varepsilon = 0{,}001$, $\beta = 1$, $w = 0{,}2$, $a = 0{,}024$ и различных значениях безразмерного времени τ

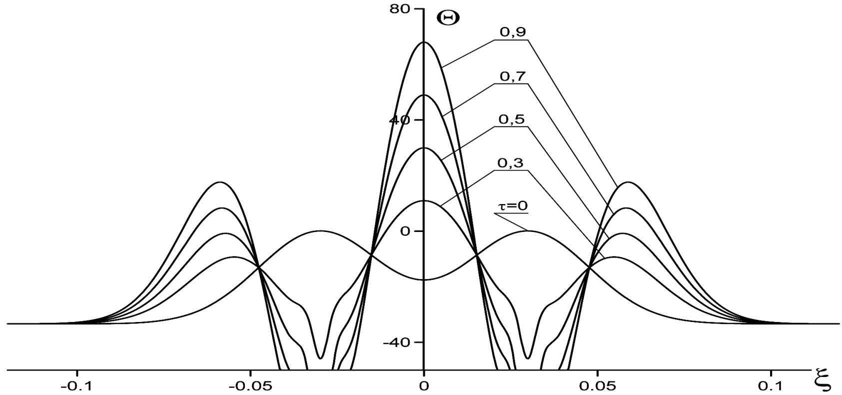

Рис. 5. Зависимость безразмерного разогрева Θ от безразмерной координаты ξ при $\mathrm{Ar} = 0{,}03$, $\varepsilon = 0{,}001$, $\beta = 1$, $w = 0{,}25$, $a = 0{,}03$ и различных значениях безразмерного времени τ

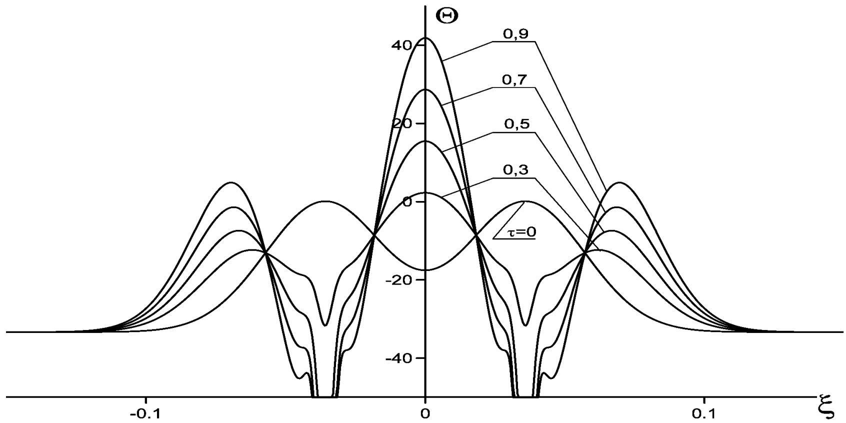

Рис. 6. Зависимость безразмерного разогрева Θ от безразмерной координаты ξ при $\mathrm{Ar} = 0{,}03$, $\varepsilon = 0{,}001$, $\beta = 1$, $w = 0{,}3$, $a = 0{,}036$ и различных значениях безразмерного времени τ

при $w = 0{,}2$ итоговая амплитуда “наложенных короткоживущих волн” достигает значения около 116 (усиление в $2,8$ раза), при $w = 0{,}25$ — примерно 68 (усиление в 4 раза), а при $w = 0{,}3$ — около 42 (усиление в $8{,}4$ раза).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 427 с.
2. Котович А. В., Несененко Г. А. Математическая теория очагового теплового взрыва. Параметрический анализ очаговых режимов теплового взрыва “геометро-оптическим” асимптотическим методом // Математические методы исследования сложных систем, процессов и структур. М.: МГОПУ, 1999. Вып. 2. С. 21–90.
3. Котович А. В., Несененко Г. А. Аналитическое решение полулинейного уравнения теплопроводности: нелинейные эффекты бегущих тепловых волн // Математические методы исследования сложных систем, процессов и структур. М.: МГОПУ, 2000. Вып. 4. С. 25–59.
4. Кравченко В. Ф., Несененко Г. А., Пустовойт В. И. Асимптотики Пуанкаре решений задач нерегулярного тепло- и массопереноса. М.: Физматлит, 2006. 420 с.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012