

Численное моделирование теплового расширения композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен вариант метода асимптотического осреднения композиционных материалов с термоупругими характеристиками, позволяющий вычислять эффективные коэффициенты линейного теплового расширения (КЛТР) композитов. Сформулированы локальные задачи термоупругости на ячейке периодичности (ЯП) композитов. Дана вариационная формулировка задач термоупругости на ЯП, для численного решения которых применен метод конечных элементов. Для программной реализации этого метода использован программный комплекс, разработанный в Научно-образовательном центре «Симплекс» и на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Представлены примеры численного решения локальной задачи термоупругости для композиционного материала на основе керамических волокон и полимерной матрицы. Рассчитаны эффективные КЛТР композиционных материалов с пространственным расположением керамических волокон и полимерной матрицей при различных температурах. Показано, что наличие процессов термодеструкции полимерной матрицы при высоких температурах приводит к немонотонной зависимости КЛТР от температуры. Предложенный алгоритм позволяет вычислять КЛТР композитов практически с произвольными структурами армирования волокнами и матрицами, претерпевающими физико-химические превращения при высоких температурах. В отличие от большинства известных приближенных методов расчета КЛТР разработанный метод дает возможность находить точные в математическом смысле значения этих коэффициентов.

Ключевые слова: многослойные тонкие оболочки, метод асимптотического осреднения, асимптотическая теория оболочек.

Введение. Для расчета термонапряжений в конструкциях из композиционных материалов при воздействии повышенных температур кроме сведений об упругих характеристиках необходима информация о коэффициентах линейного теплового расширения (КЛТР). Для расчета КЛТР композитов обычно применяют приближенные методы [1–6], которые обеспечивают приемлемую для инженерных расчетов точность, в основном при простых структурах армирования (однонаправленные и слоистые композиты). Для композитов с более сложными структурами (дисперсно-армированных, тканевых, пространственно-армированных) точность приближенных методов заметно снижается. В настоящее время наиболее точным методом расчета упругих и неупругих характеристик композитов, по-видимому, является ме-

тод гомогенизации (метод асимптотического осреднения) [7–14]. В соответствии с этим методом для расчета эффективных характеристик композитов необходимо решение специальных задач на ячейке периодичности (ЯП) композита. Конечно-элементные методы решения таких локальных задач были разработаны в [10, 11]. С помощью указанного метода были рассчитаны упругие модули пространственно-армированных композитов. Целью настоящей работы является дальнейшее развитие метода гомогенизации и численного алгоритма решения локальных задач термоупругости для расчета КЛТР композитов со сложными структурами армирования.

Метод асимптотического осреднения для задач термоупругости. Рассмотрим пространственно-армированный композиционный материал (рис. 1, 2), которому в пространстве R_3 соответствует область V , имеющая поверхность Σ . Композит состоит из N компонентов: компоненты с индексами $\alpha = 1, \dots, N-1$ представляют собой волокна различных типов, ориентированные по α -му направлению в R_3 , а компонент с индексом $\alpha = N$ — матрица. Обозначим как V_α , $\alpha = 1 \dots N$, области в пространстве R_3 , соответствующие α -му компоненту композита, а также: Σ_α — поверхности областей V_α ; $\Sigma_{\alpha N}$ — поверхности контакта матрицы и волокон (волокна полагаем не контактирующими между собой); $\Sigma_{\alpha e}$ — часть поверхности Σ композита, занятая α -м компонентом (причем $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{\alpha e}$ для волокон и $\Sigma_N = \bigcup_{\alpha=1}^{N-1} \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_{Ne}$ для матрицы). Волокна и матрицу полагаем изотропными термоупругими. Тогда в каждой области V_α , $\alpha = 1 \dots N$, можно рассмотреть следующую задачу термоупругости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j}^\alpha = 0 \text{ в } V_\alpha; \\ \sigma_{ij}^\alpha = C_{ijkl}^\alpha (\varepsilon_{kl}^\alpha - \varepsilon_{kl}^{\alpha 0}) \text{ в } V_\alpha \cup \Sigma_\alpha; \\ \varepsilon_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} (u_{i,j}^\alpha + u_{j,i}^\alpha) \text{ в } V_\alpha; \\ u_i^\alpha = u_i^N; (\sigma_{ij}^\alpha - \sigma_{ij}^N) n_j = 0 \text{ на } \Sigma_{\alpha N}; \\ u_i^\alpha = u_{ie} \text{ на } \Sigma_{\alpha e}^1; \sigma_{ij}^\alpha n_j = S_{ie} \text{ на } \Sigma_{\alpha e}^2. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{ij}^\alpha, \varepsilon_{ij}^\alpha, u_i^\alpha$ — напряжения, деформации и перемещения в α -м компоненте; C_{ijkl}^α — компоненты тензора модулей упругости; $\varepsilon_{kl}^{\alpha 0}$ — тепловые деформации [15], которые, вообще говоря, являются нелинейными функциями от температуры, т. е.

$$\varepsilon_{kl}^{\alpha 0} = \int_{\theta_0}^{\theta} a_{kl}^{\alpha}(\theta') d\theta', \quad (2)$$

$a_{kl}^{\alpha}(\theta')$ — компоненты тензора теплового расширения, зависящие от температуры.

Последние два условия в системе (1) — это условия идеального контакта матрицы и волокон, а также условия на границе композита.

Пусть композиционный материал обладает периодической структурой (см. рис. 1, 2), ЯП V_{ξ} которого состоит из N компонентов $V_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1, \dots, N$. Введем малый параметр $\kappa = l/L \ll 1$ как отношение характерного размера ЯП к характерному размеру всего композита, а также глобальные x^k и локальные ξ^k координаты. Будем полагать, что матрица является связной областью. Обозначим также $\Sigma_{\xi\alpha N} = \Sigma_{\alpha N} \cap V_{\xi}$ поверхности раздела матрицы и волокон в ЯП.

В этом случае для такой структуры может быть применен метод асимптотического осреднения [7–10], согласно которому решение задачи (1) для матрицы и волокон строится в виде асимптотических разложений вида

$$\begin{aligned} u_i^{\alpha} &= u_i^{\alpha(0)}(x^k) + \kappa u_i^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 \dots; \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha} &= \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa \varepsilon_{ij}^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 \dots; \\ \sigma_{ij}^{\alpha} &= \sigma_{ij}^{\alpha(0)}(x^k, \xi^l) + \kappa \sigma_{ij}^{\alpha(1)}(x^k, \xi^l) + \kappa^2 \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

причем по аргументу ξ^l эти функции полагают периодическими. Деформации и напряжения «нулевого уровня» имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \left(u_{i/j}^{\alpha(1)} + u_{j/i}^{\alpha(1)} \right); \quad (4)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)} \right); \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}^{\alpha(0)} = C_{ijkl}^{\alpha} \left(\varepsilon_{kl}^{\alpha(0)} - \varepsilon_{kl}^{\alpha 0} \right), \text{ если } \xi^k \in V_{\alpha\xi}, \alpha = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь $_{,i} = \partial / \partial x^i$ и $_{/i} = \partial / \partial \xi^i$ — производные по двум типам координат. При выводе формул (3)–(5) и далее используется правило дифференцирования асимптотических разложений:

$$\frac{df(x_i, \xi_i)}{dx_j} = \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f(x_i, \xi_i)}{\partial \xi_k}.$$

Подставляя разложения (2) в систему (1), применяя правило дифференцирования и собирая члены при одинаковых степенях k , получаем так называемую локальную задачу термоупругости на ЯП:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij/j}^{\alpha(0)} = 0 \text{ в } V_{\xi}; \\ \sigma_{ij}^{\alpha(0)} = C_{ijkl}^{\alpha} (\varepsilon_{kl}^{\alpha(0)} - \varepsilon_{kl}^{\alpha 0}) \text{ в } V_{\xi} \cup \Sigma_s; \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} (u_{i/j}^{\alpha(1)} + u_{j/i}^{\alpha(1)}) \text{ в } V_{\xi}; \\ \left. \begin{array}{l} u_i^{\alpha(1)} = u_i^{N(1)}, \\ (\sigma_{ij}^{\alpha(1)} - \sigma_{ij}^{N(1)}) n_j = 0 \end{array} \right\} \text{ на } \Sigma_{\xi\alpha N}; \\ \langle u_i^{\alpha(1)} \rangle = 0, \llbracket u_i^{\alpha(1)} \rrbracket = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Здесь обозначен оператор осреднения:

$$\langle u_i^{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\xi\alpha}} u_i^{\alpha} dV_{\xi}; \quad \langle \varepsilon_{ij}^{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\xi\alpha}} \varepsilon_{ji}^{\alpha} dV_{\xi}. \quad (8)$$

В (7) условие $\llbracket u_i^{\alpha} \rrbracket = 0$ — это условие периодичности функций на границе ЯП, а условие $\langle u_i^{\alpha} \rangle = 0$ вызвано требованием единственности решения локальной задачи [7]. В силу периодичности функций $u_i^{\alpha(1)}$ имеем следующее соотношение:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \langle \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} \rangle = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}). \quad (9)$$

Решение локальных задач термоупругости L_{pq} на ЯП. Будем полагать далее, что ЯП является симметричной при преобразованиях из группы ортотропии относительно осей координат $O\xi^s$ [16]. Тогда вместо решения локальной задачи (7) на всей ЯП области V_{ξ} можно перейти к решению задачи на области \tilde{V}_{ξ} , представляющей 1/8 часть ЯП.

Перемещения «первого уровня», деформации и напряжения «нулевого уровня», а также тепловые деформации представим в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned} u_i^{\alpha(1)} &= \sum_{p,q=1}^3 u_{i(pq)}^{\alpha}; & \varepsilon_{ij}^{\alpha(0)} &= \sum_{p,q=1}^3 \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha}; & \sigma_{ij}^{\alpha(0)} &= \sum_{p,q=1}^3 \sigma_{ij(pq)}^{\alpha}; \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha 0} &= \sum_{p,q=1}^3 \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha 0}; & \xi^k &\in V_{\alpha\xi}, & \alpha &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (10)$$

где обозначено:

$$\varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha 0} = \Delta_{ijpq} \varepsilon_{pq}^{\alpha 0}, \quad (11)$$

а $\Delta_{ijpq} = 1/2(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$ — единичный тензор 4-го ранга [16] (суммирование по p и q в этих формулах нет).

Для функций $u_{i(pq)}^{\alpha}$ для каждой комбинации (pq) может быть выделена линейная часть по локальным координатам:

$$u_{i(pq)}^{\alpha} = -\bar{\varepsilon}_{pq}(\delta_{ip}\xi_q + \delta_{iq}\xi_p) + U_{i(pq)}^{\alpha}(\xi_l), \quad (12)$$

где δ_{ip} — символ Кронекера; $U_{i(pq)}^{\alpha}(\xi_i)$ — новые неизвестные функции, для которых при каждом фиксированном наборе индексов (pq) получаем локальные задачи термоупругости на ЯП:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha} = 0 \text{ в } \tilde{V}_{\xi}; \\ \sigma_{ij(pq)}^{\alpha} = C_{ijkl}^{\alpha} (\varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha} - \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha 0}) \text{ в } \tilde{V}_{\xi} \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s; \\ \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha} = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j}^{\alpha} + U_{j(pq)/i}^{\alpha}) \text{ в } \tilde{V}_{\xi}; \\ \left. \begin{array}{l} U_{i(pq)}^{\alpha} = U_{i(pq)}^N, \\ (\sigma_{ij(pq)}^{\alpha} - \sigma_{ij(pq)}^N) n_j = 0 \end{array} \right\} \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \end{array} \right. \quad (13)$$

Здесь обозначено:

$$\bar{\varepsilon}_{kl(pq)} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} (\delta_{kp}\delta_{lq} + \delta_{kq}\delta_{lp}). \quad (14)$$

Кроме того, к системе (13) присоединяются условия на координатных плоскостях $\Sigma_s = \{\xi^s = 0\}$ и на торцевых поверхностях ЯП $\Sigma'_s = \{\xi_s = 1/2\}$, $s = 1, 2, 3$, которые записываем следующим образом [10]:

при $(p = q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$U_{i(pq)}^{\alpha} = 1/2 \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}; \quad S_{j(pq)}^{\alpha} = 0; \quad S_{k(pq)}^{\alpha} = 0 \text{ на } \Sigma'_i;$$

при $(p \neq q)$ и $i, j = \{p, q\}$

$$U_{i(pq)}^{\alpha} = (1/4) \bar{\varepsilon}_{ip} \delta_{ip}; \quad S_{j(pq)}^{\alpha} = 0; \quad U_{k(pq)}^{\alpha} = 0 \text{ на } \Sigma'_j;$$

при $(p \neq q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$S_{i(pq)}^{\alpha} = 0; \quad S_{j(pq)}^{\alpha} = 0; \quad U_{k(pq)}^{\alpha} = 0 \text{ на } \Sigma'_k,$$

а также

при $(p = q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$U_{i(pq)}^{\alpha} = 0; \quad S_{j(pq)}^{\alpha} = 0; \quad S_{k(pq)}^{\alpha} = 0 \text{ на } \Sigma_i; \quad (15)$$

при $(p \neq q)$ и $i, j = \{p, q\}$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_j;$$

при $(p \neq q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$S_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_k.$$

(15)

Здесь введены обозначения для векторов усилий: $S_{i(pq)} \equiv \sum_{l=1}^3 \sigma_{il(pq)}^{\alpha\{m\}} n_l$.

Решение задачи (13), (15) разыскиваем в области \tilde{V}_ξ , представляющей 1/8 часть ЯП: $\tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi_i \geq 0)$, здесь также как $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta}$ обозначена поверхность контакта компонентов внутри \tilde{V}_ξ : $\tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta} = \Sigma_{\xi\alpha\beta} \cap \bar{V}_\xi$.

Представим это решение в виде суммы решений двух задач:

$$U_{i(pq)}^\alpha = U_{i(pq)}^{\alpha\{1\}} + U_{i(pq)}^{\alpha\{2\}}. \quad (16)$$

Первая — это задача (13), (15) с нулевыми тепловыми деформациями $\varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha 0} = 0$ (задача L_{pq}):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha\{1\}} = 0 \text{ в } \tilde{V}_\xi; \\ \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{1\}} = C_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{1\}} \text{ в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s; \\ \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{1\}} = \frac{1}{2} \left(U_{i(pq)/j}^{\alpha\{1\}} + U_{j(pq)/i}^{\alpha\{1\}} \right) \text{ в } \tilde{V}_\xi; \\ \left. \begin{array}{l} U_{i(pq)}^{\alpha\{1\}} = U_{i(pq)}^{N\{1\}}, \\ \left(\sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{1\}} - \sigma_{ij(pq)}^{N\{1\}} \right) n_j = 0 \end{array} \right\} \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Здесь

при $(p = q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 1/2 \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}; S_{j(pq)}^\alpha = 0; S_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma'_i; \quad (18)$$

при $(p \neq q)$ и $i, j = \{p, q\}$

$$U_{i(pq)}^\alpha = (1/4) \bar{\varepsilon}_{ip} \delta_{ip}; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma'_j;$$

а также

при $(p = q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; S_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_i; \quad (19)$$

при $(p \neq q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$S_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma'_k;$$

при $(p \neq q)$ и $i, j = \{p, q\}$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_j; \quad (19)$$

при $(p \neq q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$S_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_k;$$

Вторая задача — с нулевыми средними деформациями $\bar{\varepsilon}_{kl(pq)} = 0$
(задача L_{pq}^0)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha\{2\}} = 0 \text{ в } \tilde{V}_\xi; \\ \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{2\}} = C_{ijkl}^\alpha (\varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{2\}} - \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha 0}) \text{ в } \tilde{V}_\xi \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s; \\ \varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha\{2\}} = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j}^{\alpha\{2\}} + U_{j(pq)/i}^{\alpha\{2\}}) \text{ в } \tilde{V}_\xi; \\ \left. \begin{array}{l} U_{i(pq)}^{\alpha\{2\}} = U_{i(pq)}^{N\{2\}}, \\ (\sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{2\}} - \sigma_{ij(pq)}^{N\{2\}}) n_j = 0 \end{array} \right\} \text{ на } \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \end{array} \right. \quad (20)$$

Здесь

при $(p = q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; S_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma'_i;$$

при $(p \neq q)$ и $i, j = \{p, q\}$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma'_j;$$

при $(p \neq q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$S_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma'_k,$$

а также:

при $(p = q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; S_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_i;$$

при $(p \neq q)$ и $i, j = \{p, q\}$

$$U_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_j;$$

при $(p \neq q)$ и $i \neq j \neq k \neq i$

$$S_{i(pq)}^\alpha = 0; S_{j(pq)}^\alpha = 0; U_{k(pq)}^\alpha = 0 \text{ на } \Sigma_k.$$

Расчет эффективных модулей упругости и КЛТР композита.

После решения двух серий задач L_{pq} и L_{pq}^0 для всех комбинаций (pq) проинтегрируем напряжения по областям, занятым компонентами композита. Тогда эффективные упругие модули композита могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij(pq)}^{\{1\}} &= \left\langle \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{1\}} \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\xi\alpha}} \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{1\}} dV; \\ \bar{C}_{ijpq} &= \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)}^{\{1\}}}{\bar{\varepsilon}_{pq}}.\end{aligned}\quad (23)$$

После расчета тензора модулей упругости \bar{C}_{ijpq} вычисляем тензор эффективных упругих податливостей $\bar{P}_{ijpq} = (\bar{C}_{ijpq})^{-1}$, а по его компонентам находим технические константы: $E_i = 1 / P_{iiii}$ — модули Юнга; $\nu_{ij} = -P_{ijij} / P_{iiii}$ — коэффициенты Пуассона; $G_{ijij} = \bar{C}_{ijij}$ — модули сдвига (здесь по i, j суммирование нет). Затем с помощью решения второй серии задач L_{pq}^0 для тепловых напряжений находим эффективные тепловые деформации композита $\bar{\varepsilon}_{kl}^0$:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij}^{\{2\}} &= \left\langle \sigma_{ij}^{\{2\}} \right\rangle; \quad \sigma_{ij}^{\{2\}} = \sum_{p,q=1}^N \sigma_{ij(pq)}^{\alpha\{2\}}; \\ \bar{\varepsilon}_{kl}^0 &= -\bar{P}_{kl ij} \bar{\sigma}_{ij}^{\{2\}}.\end{aligned}\quad (24)$$

Вариационная формулировка локальной задачи L_{pq} . Вариационная формулировка задачи L_{pq} была получена в [10]. Вариационная формулировка задачи L_{pq}^0 при фиксированных значениях p и q для произвольного конечного объема $V \subset \tilde{V}_{\xi}$ имеет вид

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_{\Sigma} \delta U^T S d\Sigma - \int_V \delta \varepsilon^T \hat{\sigma}^0 dV. \quad (25)$$

Здесь обозначены координатные столбцы: псевдоперемещений U , напряжений σ , деформаций ε и поверхностных усилий S :

$$\begin{aligned}U &= \left[U_{1(pq)}^{\alpha}, U_{2(pq)}^{\alpha}, U_{3(pq)}^{\alpha} \right]^T; \\ \sigma &= \left[\sigma_{11(pq)}^{\alpha}, \sigma_{22(pq)}^{\alpha}, \sigma_{33(pq)}^{\alpha}, \sigma_{13(pq)}^{\alpha} / \sqrt{2}, \sigma_{23(pq)}^{\alpha} / \sqrt{2}, \sigma_{12(pq)}^{\alpha} / \sqrt{2} \right]^T; \\ \varepsilon &= \left[\varepsilon_{11(pq)}^{\alpha\{m\}}, \varepsilon_{22(pq)}^{\alpha}, \varepsilon_{33(pq)}^{\alpha}, \varepsilon_{13(pq)}^{\alpha} / \sqrt{2}, \varepsilon_{23(pq)}^{\alpha} / \sqrt{2}, \varepsilon_{12(pq)}^{\alpha} / \sqrt{2} \right]^T; \\ S &= \left[S_{1(pq)}^{\alpha}, S_{2(pq)}^{\alpha}, S_{3(pq)}^{\alpha} \right]^T; \\ \hat{\sigma}^0 &= \left[\hat{\sigma}_{11(pq)}^{\alpha 0}, \hat{\sigma}_{22(pq)}^{\alpha 0}, \hat{\sigma}_{33(pq)}^{\alpha 0}, \hat{\sigma}_{13(pq)}^{\alpha 0}, \hat{\sigma}_{23(pq)}^{\alpha 0}, \hat{\sigma}_{12(pq)}^{\alpha 0} \right]^T; \\ \hat{\sigma}_{ij(pq)}^{\alpha 0} &= C_{ijkl}^{\alpha} \varepsilon_{kl(pq)}^{\alpha 0}.\end{aligned}\quad (26)$$

Определяющие соотношения, следующие из второй группы уравнений в (13), с использованием координатных столбцов записываем таким образом: $\sigma = C\varepsilon$, где C — матрица упругости размером $[6 \times 6]$, составленная из компонентов тензора C_{ijkl}^α стандартным образом [9]. Соотношения Коши (третья группа уравнений в (13)) в матричном виде записываем так: $\varepsilon = DU$, где D — матрица линейных дифференциальных операторов дифференцирования ($\partial_l = \partial / \partial \xi^l$) [10]. Тогда вариационное уравнение (25) можно представить в виде

$$\int_V (D\delta U)^T C D U dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma - \int_V (D\delta U)^T \hat{\sigma}^0 dV. \quad (27)$$

Результаты численного моделирования. Решение вариационного уравнения (27) осуществляли методом конечных элементов с помощью программного обеспечения, разработанного в Научно-образовательном центре «Симплекс» и на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В качестве примера был рассмотрен композиционный материал на основе керамических волокон и полимерной матрицы. Волокна в ЯП были ориентированы по четырем главным диагоналям куба и соприкасались в нескольких точках. Термоупругие свойства волокон и матрицы предполагали изменяющимися при нагреве до высоких температур. При расчетах были использованы значения констант термоупругости и КЛТР и волокон, матрицы приведенные в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Значения констант термоупругости волокон и матрицы, принятые в расчетах

Температура, °С	Модуль упругости волокон, ГПа	Коэффициент Пуассона волокон	Модуль упругости матрицы, ГПа	Коэффициент Пуассона матрицы
20	122	0,17	3	0,37
300	120	0,17	0,5	0,37
1000	100	0,17	0,1	0,37
2000	80	0,17	0,1	0,37
2500	40	0,17	0,1	0,32

Таблица 2

Значения КЛТР матрицы и волокон, принятые в расчетах, а также значения КЛТР для композиционного материала

Температура, °С	КЛТР матрицы, $K^{-1} \cdot 10^{-6}$	КЛТР волокон, $K^{-1} \cdot 10^{-6}$	КЛТР композита, $K^{-1} \cdot 10^{-6}$
20	20	5	11
300	1	5	4
600	-5	5	4,5
2000	4	5,5	5,2
2500	4,4	5,6	5,3

В силу линейности задачи термоупругости (20)–(22) задачи L_{11}^0 , L_{22}^0 , L_{33}^0 могут быть решены совместно как одна задача L_1^0 . Матрица и волокна предполагаются изотропными, поэтому $\varepsilon_{ij(pq)}^{\alpha 0} = 0$ при $p \neq q$, в результате решения задач L_{11}^0 являются нулевыми, т. е. $\sigma_{ij(pq)}^{\alpha \{2\}} = 0$ и $U_{j(pq)}^{\alpha \{2\}} = 0$ при $p \neq q$. В связи с этим для расчета КЛТР композита достаточно решить одну задачу L_1^0 . Некоторые результаты решения локальной задачи L_1^0 для композиционного материала на основе керамических волокон и полимерной матрицы показаны на рис. 3, 4. Было установлено, что в зонах соприкосновения волокон реализуются наибольшие значения нормальных и касательных напряжений.

При нагреве полимерной матрицы значения КЛТР существенно изменяются. При температурах 300...800 °С в матрице происходят процессы термодеструкции, сопровождающиеся усадкой [17, 18], и значение КЛТР становится отрицательным. Были проведены расчеты КЛТР композиционного материала при различных температурах: 20, 300, 600, 2000 и 2500 °С. Результаты расчетов КЛТР композита в зависимости от температуры представлены на рис. 5 и в табл. 2.

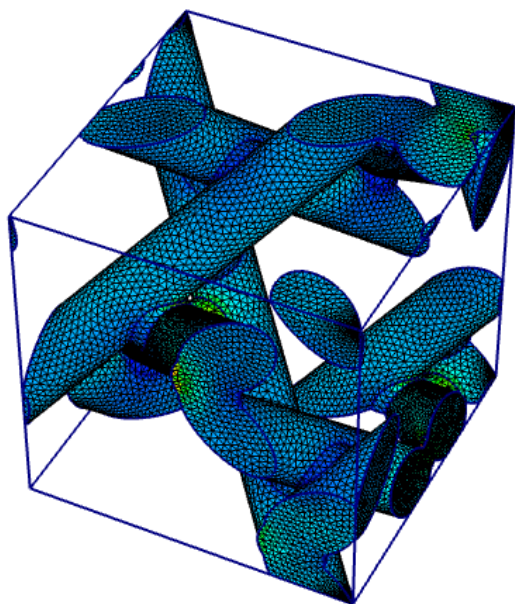


Рис. 1. Компьютерная модель и КЭ-сетка композита с ориентацией волокон 4D (показаны только волокна)

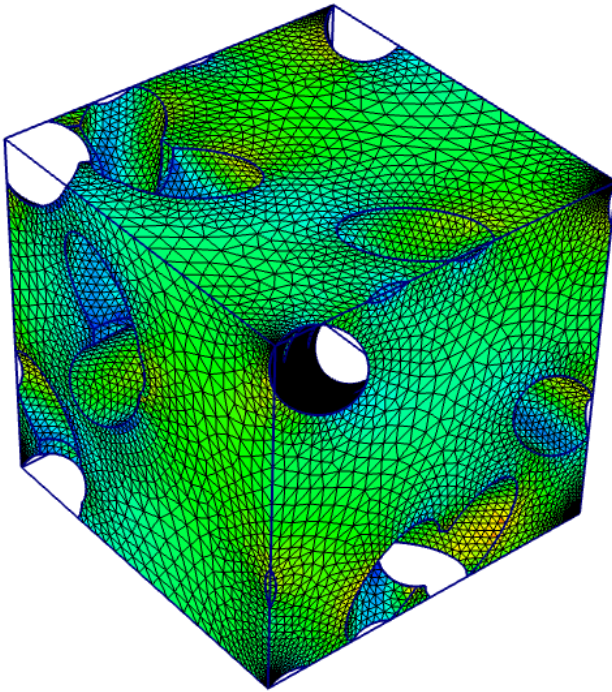


Рис. 2. Компьютерная модель и КЭ-сетка матрицы композита с ориентацией волокон 4D (волокна не показаны)

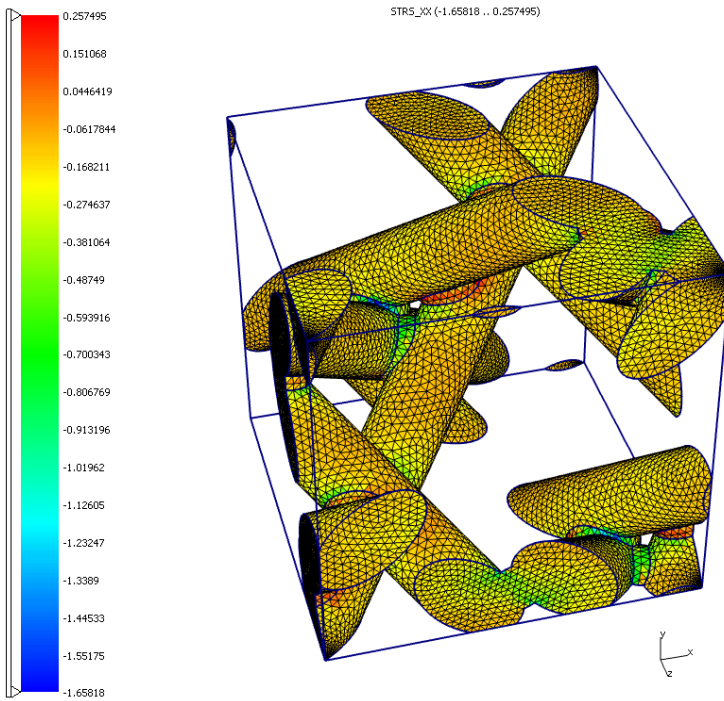


Рис. 3. Поле компонента напряжения $\sigma_{11}^{[2]}$ в ЯП композита

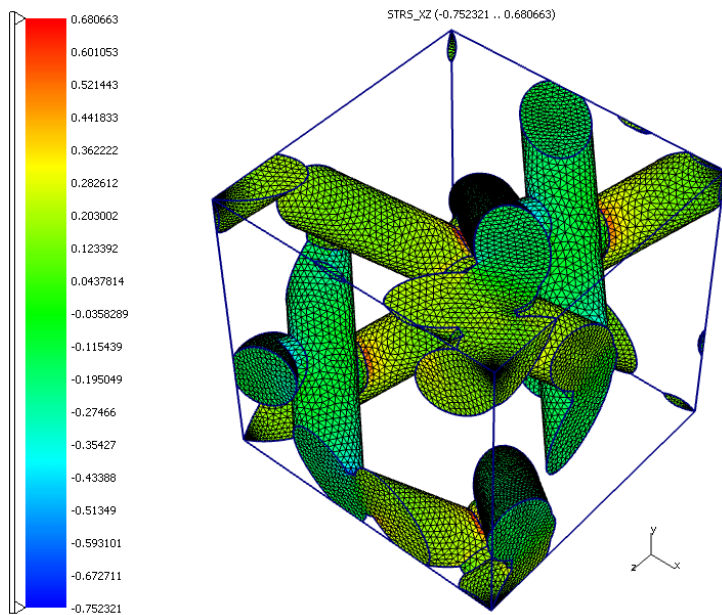


Рис. 4. Поле компонента напряжения $\sigma_{13}^{(2)}$ в ЯП композита

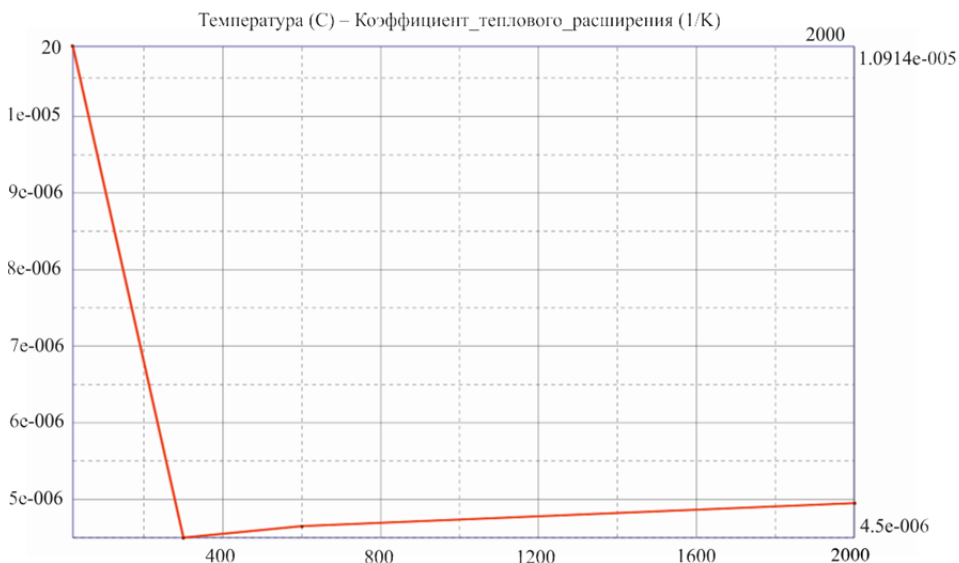


Рис. 5. График изменения расчетных значений КЛТР композиционного материала вдоль направления волокон в зависимости от температуры нагрева

Предложенный алгоритм позволяет вычислять КЛТР композитов практически с произвольными структурами армирования волокнами и матрицами, претерпевающими физико-химические превращения при высоких температурах.

Выводы. Предложен вариант метода асимптотического осреднения композиционных материалов с термоупругими характеристиками, позволяющий вычислять эффективные КЛТР композитов. Сформулированы локальные задачи термоупругости на ЯП композитов. Дана вариационная формулировка задач термоупругости на ЯП, для численного решения которых применен метод конечных элементов.

Представлен пример численного решения локальной задачи термоупругости для композиционного материала на основе керамических волокон и полимерной матрицы. Рассчитаны эффективные КЛТР композитов с пространственным расположением керамических волокон и полимерной матрицей при различных температурах.

Показано, что наличие процессов термодеструкции полимерной матрицы при высоких температурах приводит к немонотонной зависимости КЛТР от температуры.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. Москва, Мир, 1982, 336 с.
- [2] Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы*. Москва, Машиностроение, 1987, 223 с.
- [3] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка методом самосогласования температурного коэффициента линейного расширения с дисперсными включениями. *Наука и образование*, 2015, № 2, с. 197–215.
- [4] Ran Z., Yan Y., Li J., Qi Z., Yang L. Determination of thermal expansion coefficients for unidirectional fiber-reinforced composites. *Chinese Journal of Aeronautics*, October 2014, vol. 27, is. 5, pp. 1180–1187.
- [5] Karadeniz Z.H., Kumlutas D. A numerical study on the coefficients of thermal expansion of fiber reinforced composite materials. *Composite Structures*, March 2007, vol. 78, is. 1, pp. 1–10.
- [6] Rupnowskia P., Gentza M., Sutterb J.K., Kumosaa M. An evaluation of the elastic properties and thermal expansion coefficients of medium and high modulus graphite fibers. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*, March 2005, vol. 36, is. 3, pp. 327–338.
- [7] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 352 с.
- [8] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.
- [9] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 243 с.
- [10] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2002, № 2, с. 95–108.
- [11] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Беленовская Ю.В., Анискович В.А., Перевислов С.Н. Моделирование микроструктурного разрушения и прочности керамических композитов на основе реакционно-связанного SiC. *Наука и образование*, 2013, № 11. doi: 10.7463/1113.0659438 (дата обращения 06.11.2015).

- [12] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным наполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.
- [13] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Федонюк Н.Н. Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волоконистых полимерных композиционных материалов. *Наука и образование*, 2014, № 11. doi: 10.7463/1114.0734246 (дата обращения 03.11.2015).
- [14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
- [15] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды*. В 4 т. Т. 4: Основы механики твердого тела. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
- [16] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 576 с.
- [17] Dimitrienko Yu.I. A Structural Thermo-Mechanical Model of Textile Composite Materials at High Temperatures. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.
- [18] Dimitrienko Yu.I. Thermal Stresses in Ablative Composite Thin-Walled Structures Under Intensive Heat Flows. *International Journal of Engineering Science*, 1997, vol. 35, no. 1, pp. 15–31.

Статья поступила в редакцию 01.07.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Численное моделирование теплового расширения композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1452.html>

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 300 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Сборщиков Сергей Васильевич — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области численного моделирования в механике композитов. e-mail: servasbor@gmail.com

Numerical simulation of composite material thermal expansion by homogenization method

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, S.V. Sbornichikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers a variant of the asymptotic homogenization method for calculation of effective thermal expansion coefficients of composite materials with thermoelastic properties. We formulate problems of local thermoelasticity over a periodicity cell of composites. A variational formulation of the thermoelasticity problem over a periodicity cell is proposed. A finite element method for computational solving of these problems of thermoelasticity is applied. For software implementation of the finite element method we use the software package developed by the Scientific and Educational Center of the BMSTU. We also give examples of numerical solution of the local problems of thermoelasticity for composites based on ceramic fibers and the polymer matrix. Effective coefficients of thermal expansion for composite materials with spatial arrangement of ceramic fibers and a polymer matrix were calculated for different temperatures. We show that processes of thermal decomposition of polymer matrix result in nonmonotonic dependence of the thermal expansion coefficient on temperature. The proposed algorithm allows to calculate the thermal expansion coefficients for composites with almost any structures of fiber reinforced matrices undergoing physicochemical transformations at high temperatures. Unlike a large number of the well-known approximate methods for calculating thermal expansion coefficients the proposed method allows to obtain the mathematically accurate values for these coefficients.

Ключевые слова: *multilayer thin shell, asymptotic homogenization method, asymptotic theory of shells.*

REFERENCES

- [1] Christensen R.M. *Mechanics of Composite Materials*. Wiley-Interscience, New York, 1979, 348 p. [In Russian: Christensen R. M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov*. Moscow, Mir Publ., 1982, 336 p.].
- [2] Tarnopolskiy Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Prostranstvenno armirovannye kompozitsionnye materialy* [Spatially Reinforced Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987, 224 p.
- [3] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. *Nauka i obrazovanie: elektronnyy nauchno-tekhnicheskij zhurnal – Science and Education: Electronic Scientific and Technical Journal*, 2015, no. 2, pp. 197–215.
- [4] Zhiguo Ran, Ying Yan, Jianfeng Li, Zhongxing Qi, Lei Yang. *Chinese Journal of Aeronautics*, October 2014, vol. 27, iss. 5, pp. 1180–1187.
- [5] Z. Haktan Karadeniz, Dilek Kumlutas. *Composite Structures*, March 2007, vol. 78, iss. 1, pp. 1–10.
- [6] Rupnowskia P., Gentza M., Sutterb J.K., Kumosaa M. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, March 2005, vol. 36, iss. 3, pp. 327–338.
- [7] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials*. Springer Publ., 1989, 352 p. [In Russian: Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.].

- [8] Sanchez-Palencia E. *Non-homogeneous media and vibration theory. Lecture Notes in Physics*. Berlin, Springer Publ., 1980, vol. 127, 398 p. [In Russian: Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy. Moscow, Mir Publ., 1984].
- [9] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, MGU Publ., 1984, 352 p.
- [10] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.
- [11] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Belenovskaya Yu.V., Aniskovich V.A., Perevislov S.N. *Nauka i obrazovanie: elektronnyy nauchno-tekhnicheskii zhurnal – Science and Education: Electronic Scientific and Technical Journal*, 2013, no. 11. doi: 10.7463/1113.0659438
- [12] Dimitrienko Yu. I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonuk N.N., Sborshchikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigoryev M.M., Prozorovskiy A.A. *Kompozity i nanostrukturny – Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.
- [13] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Fedonuk N.N. Modeling of viscoelastic properties of laminated fibrous polymer composite materials. *Science and Education: Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 11. doi: 10.7463/1113.0659438
- [14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical modeling and Numerical Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
- [15] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Fundamentals of Solid Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, vol. 4, 624 p.
- [16] Dimitrienko Yu.I. *Tenzornoye Ischislenie* [Calculus of Tensors]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 576 p.
- [17] Dimitrienko Yu.I. *Composites Science and Technology*, 1999, vol. 59, no. 7, pp. 1041–1053.
- [18] Dimitrienko Yu.I. *International Journal of Engineering Science*, 1997, vol. 35, no. 1, pp. 15–31.

Dimitrienko Yu. I. (b.1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci.(Phys. & Math.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Director of Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Software Development, Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, mechanics and thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Gubareva E.A. (b.1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Cand. Sci. (Phys. & Math.), Associated Professor, the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 30 publications in the field of continuum mechanics, tribology, mathematical modeling and composite mechanics. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Sborshchikov S.V. (b.1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. Postgraduate student at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. The author of 20 publications in the field of numerical simulation in mechanics of composites. e-mail: servasbor@gmail.com