УДК 539.3

Движение твердого ядра в полости вращающейся несферичной оболочки

© Ю.В. Баркин[1], М.Ю. Баркин[2]

[1]ГАИШ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены интегрируемые случаи ограниченной задачи о поступательно-вращательном движении твердого тела (ядра) в полости гравитирующей несферичной и равномерно-вращающейся оболочки, при этом учитывалось только гравитационное взаимодействие тел. Получены канонические уравнения вращательного движения в переменных Эйлера и в переменных Андуайе. Изучены случаи интегрируемости указанной ограниченной задачи, когда ядро представляет собой осесимметричное твердое тело. Решение задачи при этом сведено к обращению простых квадратур и может быть представлено в эллиптических функциях. Эти исследования открывают новые возможности для изучения связей вынужденных относительных движений ядра и мантии небесных тел с вариациями природных процессов на планетах и спутниках. Динамические исследования системы мантия — жидкое ядро — твердое ядро Земли важны и актуальны для геодинамики и спутниковой геодезии и имеют большое значение при решении инженерных и прикладных задач микрогравитации, при изучении гравитационных взаимодействий и смещений блоков и приборов космической станции, а также для пространственно-временного обеспечения ее работы.

Ключевые слова: *несферичное твердое тело, эллиптические интегралы, переменные Андуайе, система мантия — ядро, микрогравитация, взаимодействие блоков космической станции.*

Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную задачу о поступательно-вращательном движении несферичного твердого тела (ядра) P_i с пренебрежимо малой массой в полости несферичной твердой оболочки P_m (мантии). Оболочка равномерно вращается вокруг своей главной центральной оси инерции $C_m z$ с угловой скоростью ω. Ядро имеет достаточно малые размеры и может свободно размещаться и передвигаться в полости. Тела P_i, P_m являются взаимно-гравитирующими. Задача заключается в изучении движения ядра P_i под действием ньютоновского притяжения оболочки P_m.

Пусть $C_m xyz$ — основная система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции оболочки, C_m — центр масс оболочки, а следовательно, в силу сделанного допущения, и всей системы, $C_i\xi\eta\zeta$ — декартова система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции ядра, C_i — центр масс ядра.

Обозначим через x, y, z декартовы координаты центра масс C_i ядра во вращающейся основной системе координат $C_m xyz$. Вращательное движение ядра (или ориентацию его главных центральных осей инерции) опишем углами Эйлера ψ, θ и φ (углы прецессии, нутации и собственного вращения соответственно). Направляющие косинусы осей координат $C_i\xi\eta\zeta$ в системе координат $C_m xyz$ как функции углов Эйлера определяются известными формулами [1]:

$$
\begin{aligned}
&r_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi;\\
&r_{21} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi; \quad r_{31} = \sin\theta\sin\varphi;\\
&r_{12} = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi;\\
&r_{22} = -\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\theta\cos\varphi; \quad r_{32} = \sin\theta\cos\varphi;\\
&r_{13} = \sin\psi\sin\theta, \;\; r_{23} = -\cos\psi\sin\theta; \quad r_{33} = \cos\theta.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Обозначим через A_m, B_m и C_m главные центральные моменты инерции оболочки, соответствующие осям $C_m x$, $C_m y$ и $C_m z$. Аналогично A_i, B_i и C_i — главные центральные моменты инерции ядра, соответствующие его осям инерции.

Полное и общее разложение силовой функции ньютоновского взаимодействия тел P_m, P_i построено в работе [2]. Здесь без вывода приведем приближенное выражение этой силовой функции, учитывая сделанные ранее допущения. Так, сохраняя лишь первую и вторую гармоники, силовую функцию задачи запишем в следующем виде [3]:

$$
\begin{aligned}
U = {}&\frac{1}{2} m_i n_m^2 \Big[(b_m + c_m - 2a_m) x^2 + (c_m + a_m - 2b_m) y^2 + (a_m + b_m - 2c_m) z^2 \Big] + \\
&+ \frac{3}{2} n_m^2 \Big\{ (a_m - b_m) \Big[(A_i - B_i) r_{22}^2 + (A_i - C_i) r_{23}^2 \Big] + \\
&+ (a_m - c_m) \Big[(A_i - B_i) r_{32}^2 + (A_i - C_i) r_{33}^2 \Big] \Big\},
\end{aligned} \tag{2}
$$

где m_i — масса ядра.

В формуле (2)

$$n_m^2 = f m_m / R_m^3,$$

где f — гравитационная постоянная; m_m — масса мантии; R_m — радиус наибольшей сферы с центром в точке C_m, которую можно «вложить» в полость.

Полагаем, что тело P_i все время находится и движется внутри этой сферы. Величины a_m, b_m и c_m аналогичны осевым моментам инерции оболочки A_m, B_m и C_m, однако определяются для другого закона распределения плотностей и являются безразмерными. Эти величины определяются следующими объемными интегралами:

$$a_m = \frac{R_m^3}{m_m}\iiint\limits_{\tau_m}\frac{y^2+z^2}{r^5}dm;\quad b_m = \frac{R_m^3}{m_m}\iiint\limits_{\tau_m}\frac{x^2+z^2}{r^5}dm;$$

$$c_m = \frac{R_m^3}{m_m}\iiint\limits_{\tau_m}\frac{x^2+y^2}{r^5}dm, \tag{3}$$

где x, y, z, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — координаты элементарного объема $d\tau$ оболочки с массой $dm=\delta\left(x,y,z\right)d\tau$ (δ — плотность), а интегрирование распространено на весь объем оболочки τ_m.

В общем случае произвольных по форме и динамическому строению оболочек P_m выражение силовой функции (2) является приближенным. Однако существует класс тел P_m, для которых формула (2) будет точной. К таким телам относятся однородные оболочки, внешняя и внутренняя поверхности которых являются эллипсоидами. Уравнения этих эллипсоидов в системе координат C_mxyz

$$\frac{x^2}{a_u^2}+\frac{y^2}{b_u^2}+\frac{z^2}{c_u^2}=1,$$

где a_u, b_u, c_u $(u=e,i)$ — их полуоси.

В этом случае коэффициенты квадратичных членов в силовой функции (2) определяются формулами:

$$\frac{1}{2}n_m^2\left(b_m+c_m-2a_m\right)=\left(A_e-A_i\right)\pi f\rho;$$

$$\frac{1}{2}n_m^2\left(c_m+a_m-2b_m\right)=\left(B_e-B_i\right)\pi f\rho; \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}n_m^2\left(a_m+b_m-2c_m\right)=\left(C_e-C_i\right)\pi f\rho,$$

где ρ — плотность оболочки, а величины A_u, B_u, C_u $(u = e,\ i)$ являются известными функциями полуосей эллипсоидальных поверхностей [4]:

$$A_u = \frac{2b_u c_u}{a_u^2 \sin^3 \varphi_u \sin^2 \theta_u}\left[F\left(\theta_u, \varphi_u\right) - E\left(\theta_u, \varphi_u\right)\right];$$

$$B_u = \frac{2b_u c_u}{a_u^2 \sin^3 \varphi_u \sin^2 \theta_u \cos^2 \theta_u} \times \tag{5}$$

$$\times\left[E\left(\theta_u, \varphi_u\right) - F\left(\theta_u, \varphi_u\right)\cos^2 \theta_u - \frac{c_u}{b_u}\sin^2 \theta_u \sin \varphi_u\right];$$

$$C_u = \frac{2b_u c_u}{a_u^2 \sin^3 \varphi_u \cos^2 \theta_u}\left[\frac{b_u}{c_u}\sin \varphi_u - E\left(\theta_u, \varphi_u\right)\right].$$

Здесь E, F — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$E\left(\theta, \varphi\right) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}\ d\varphi;\ \ F\left(\theta, \varphi\right) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}\ d\varphi \tag{6}$$

с обозначениями

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},\ \cos \varphi = \frac{c}{a}. \tag{7}$$

Формулы (4)–(7) имеют место, если $a_u > b_u > c_u$ $(u = e,\ i)$.

Если поверхность полости представляет собой эллипсоид вращения с полуосями $a_e = b_e > c_e$, а поверхность ядра — эллипсоид вращения с полуосями $a_i > b_i = c_i$, то для коэффициентов в формулах (4) имеем элементарные выражения [4]:

$$A_e = B_e = \frac{\sqrt{1 - e_e^2}}{e_e^3}\arcsin e_e - \frac{1 - e_e^2}{e_e^2};\quad C_e = \frac{2}{e_e^2} - \frac{2\sqrt{1 - e_e^2}}{e_e^3}\arcsin e_e;$$

$$A_i = \frac{1 - e_i^2}{e_i^3}\ln\frac{1 + e_i}{1 - e_i} - 2\frac{1 - e_i^2}{e_i^2};\qquad B_i = C_i = \frac{1}{e_i^2} - \frac{1 - e_i^2}{2e_i^3}\ln\frac{1 + e_i}{1 - e_i},$$

где

$$e_e = \sqrt{1 - c_e^2 / a_e^2};\qquad e_i = \sqrt{1 - c_i^2 / a_i^2}.$$

В частном случае, когда указанные поверхности концентрические и имеют одинаковые эксцентриситеты, коэффициенты в формулах

(4) обращаются в нуль. В этом случае силовая функция постоянна и на ядро P_i силы со стороны мантии не действуют.

Силовая функция (2) состоит из двух слагаемых. Первое из них есть функция лишь координат $x, y, z,$ а второе — функция углов Эйлера. Уравнения поступательно-вращательного движения ядра во вращающейся системе координат можно представить в следующем виде:

$$m_i\left(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2 x\right)=\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$m_i\left(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2 y\right)=\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{8}$$

$$m_i\ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z};$$

$$A_i\dot{p}_i-\left(B_i-C_i\right)q_i r_i=\left(\frac{\partial U}{\partial\psi}-\cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}+\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta},$$

$$B_i\dot{q}_i-\left(C_i-A_i\right)r_i p_i=\left(\frac{\partial U}{\partial\psi}-\cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}-\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta}, \tag{9}$$

$$C_i\dot{r}_i-\left(A_i-B_i\right)p_i q_i=\frac{\partial U}{\partial\varphi};$$

$$p_i=\left(\dot{\psi}+\omega\right)\sin\varphi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$q_i=\left(\dot{\psi}+\omega\right)\cos\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\varphi, \tag{10}$$

$$r_i=\left(\dot{\psi}+\omega\right)\cos\theta+\dot{\varphi},$$

где p_i, q_i, r_i — проекции абсолютной угловой скорости вращения тела P_i (по отношению к невращающейся системе координат) на оси координат $C_i\xi$, $C_i\eta$, $C_i\zeta$ соответственно.

Уравнения (8) в силу структуры силовой функции отщепляются от остальных уравнений системы (8)–(10) и интегрируются независимо [3]. Если ввести в качестве независимой переменной $\tau=\omega t$, то после простых преобразований уравнения орбитального движения ядра можно записать в виде

$$x''-2y'+\alpha_m^2 x=0;$$

$$y''+2x'+\beta_m^2 y=0; \tag{11}$$

$$z''+\gamma_m^2 z=0,$$

где штрих означает дифференцирование по τ, а постоянные

$$-\alpha_m^2 = 1 - \frac{n_m^2}{\omega^2}\left(b_m + c_m - 2a_m\right); \quad -\beta_m^2 = 1 + \frac{n_m^2}{\omega^2}\left(c_m + a_m - 2b_m\right);$$

$$\gamma_m^2 = -\frac{n_m^2}{\omega^2}\left(a_m + b_m - 2c_m\right).$$

Уравнения (11) допускают тривиальное решение $x = y = z = 0$, для которого центр масс ядра совпадает с центром масс оболочки. В общем случае эти уравнения легко интегрируются (при произвольных начальных условиях $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$) и описывают соответствующие движения внутреннего ядра [3, 5].

Колебательные движения твердого ядра имеют место при условии, что все корни характеристического уравнения системы (11) являются чисто мнимыми. При этом три вещественные частоты колебаний определяются формулами

$$\omega_{1,2} = \omega\sqrt{-1 + \frac{1}{2}\left(\gamma_m^2 \pm \sqrt{\left(2 - \gamma_m^2\right)^2 - 4\alpha_m^2\beta_m^2}\right)}; \; \omega_3 = \omega\gamma_m .$$

Таким образом, условия устойчивости внутреннего ядра записываются в виде

$$\gamma_m^2 > 0, \quad \left(2 - \gamma_m^2\right)^2 - 4\alpha_m^2\beta_m^2 > 0.$$

Эти условия выполняются в случае сжатой вдоль оси $C_m z$ эллипсоидальной оболочки.

Вращение тела P_i не зависит от его орбитального движения и описывается независимыми дифференциальными уравнениями (9), (10).

Уравнения вращательного движения ядра в канонических переменных Эйлера и Андуайе. Введем по известным правилам [6] канонические импульсы p_ψ, p_θ и p_φ, сопряженные углам Эйлера ψ, θ, φ, и опишем вращательное движение ядра вместо уравнений (9), (10) каноническими уравнениями:

$$\frac{d\left(\psi,\theta,\varphi\right)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial\left(p_\psi, p_\theta, p_\varphi\right)}; \qquad \frac{d\left(p_\psi, p_\theta, p_\varphi\right)}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial\left(\psi,\theta,\varphi\right)}; \quad (12)$$

$$F = \frac{1}{2A_i}\operatorname{cosec}^2\theta\left[\left(p_\psi - p_\varphi\cos\theta\right)\sin\varphi + p_\theta\sin\theta\cos\varphi\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{2B_i}\operatorname{cosec}^2\theta\left[\left(p_\psi - p_\varphi\cos\theta\right)\cos\varphi - p_\theta\sin\theta\sin\varphi\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{2C_i}p_\varphi^2 - \omega p_\psi - U\left(\psi,\theta,\varphi\right), \quad (13)$$

где

$$U = \frac{1}{2}\left(u_{22}r_{22}^2 + u_{23}r_{23}^2 + u_{32}r_{32}^2 + u_{33}r_{33}^2\right),$$

или, согласно формулам (1),

$$U = \frac{1}{2}\Big[u_{22}\left(\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi\right)^2 + u_{23}\left(\cos\psi\sin\theta\right)^2 +$$

$$+u_{32}\left(\sin\theta\cos\varphi\right)^2 + u_{33}\cos^2\theta\Big]. \qquad (14)$$

Здесь u_{ij} — постоянные коэффициенты, определяемые формулами

$$u_{22} = 3n_m^2\left(a_m - b_m\right)\left(A_i - B_i\right);\quad u_{32} = 3n_m^2\left(a_m - c_m\right)\left(A_i - B_i\right);$$

$$u_{23} = 3n_m^2\left(a_m - b_m\right)\left(A_i - C_i\right);\quad u_{33} = 3n_m^2\left(a_m - c_m\right)\left(A_i - C_i\right). \qquad (15)$$

Интегрируемые случаи для осесимметричного ядра. В частном случае, когда тело P_m является осесимметричным по строению, $a_m = b_m$,

$$U = \frac{1}{2}\left(u_{32}r_{32}^2 + u_{33}r_{33}^2\right) = \frac{1}{2}\left(u_{32}\sin^2\theta\cos^2\varphi + u_{33}\cos^2\theta\right) \qquad (16)$$

и уравнения (12)–(16) допускают два первых интеграла:

$$F = C_1 = \text{const},\quad p_\psi = C_2 = \text{const}.$$

Если ядро является осесимметричным твердым телом, тогда $A_i = B_i$,

$$U = \frac{1}{2}\left(u_{23}\sin^2\theta\cos^2\psi + u_{33}\cos^2\theta\right) \qquad (17)$$

и первыми интегралами уравнений (12)–(15), (17) будут

$$F = C_1,\quad p_\psi = C_2.$$

В этом варианте задачи гамильтониан существенно упрощается:

$$F = \frac{1}{2A_i}\operatorname{cosec}^2\theta\left[\left(p_\psi - p_\varphi\cos\theta\right)^2 + p_\theta^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{2C_i}p_\varphi^2 - \omega p_\psi -$$

$$-\frac{1}{2}\left(u_{23}\sin^2\theta\cos^2\psi + u_{33}\cos^2\theta\right). \qquad (18)$$

Канонические уравнения (12)–(16) полностью совпадают с такими же уравнениями (в тех же переменных) для родственной задачи о вращательном движении твердого тела, закрепленного в центре масс, в центральном ньютоновском поле (при учете в выражении силовой функции лишь второй гармоники). Параметры рассматриваемой задачи и задачи Клебша [6] связаны простым соотношением

$$\varepsilon = \frac{3}{2} n_m^2 \left(a_m - c_m \right).$$

К квадратурам уравнения (12)–(16) сведены Коббом и Харламовой [6].

Другой интегрируемый случай имеет место при условиях

$$A_i = B_i, \quad a_m = b_m. \tag{19}$$

Уравнения движения (12)–(18) при этом допускают три первых интеграла:

$$F = C; \;\; p_\varphi = C_\varphi; \;\; p_\psi = C_\psi .$$

и легко сводятся к квадратурам. Этот случай аналогичен случаю интегрируемости в задаче о движении осесимметричного тела с закрепленной точкой в центральном ньютоновском поле, указанному Белецким [6].

Воспользуемся теперь каноническими переменными Андуайе [6] и запишем уравнения движения тела P_i при условиях (19). Для большей общности предположим, что силовая функция задачи имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon \gamma^n \left(\theta \right) \quad \left(\gamma = r_{33} \right). \tag{20}$$

При $n = 1$ силовая функция (20) соответствует классической задаче о движении тяжелого твердого тела в случае Лагранжа [6] и $\varepsilon = 2mgl$ (где g — ускорение свободного падения; l — расстояние от центра масс тела до точки его закрепления).

При $n = 2$, $\varepsilon = 3n_m^2 \left(a_m - c_m \right) \left(A_i - C_i \right)$ силовая функция (20) соответствует рассматриваемой задаче о вращении осесимметричного твердого ядра в полости осесимметричной мантии.

Уравнения движения в переменных Андуайе имеют канонический вид и характеризуются гамильтонианом

$$F = \frac{G^2}{2A_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_i} - \frac{1}{A_i} \right) L^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \gamma^n ,$$

где

$$\gamma = -\frac{\sqrt{G^2 - L^2}\sqrt{G^2 - H^2}}{G^2} \sin g + \frac{LH}{G^2} .$$

Выполним нормирование канонических импульсов L, G, H на $\sqrt{2A_i\varepsilon}$ и введем новую независимую переменную $t' = \dfrac{t}{A_i}\sqrt{A_i\varepsilon}$. В новых переменных уравнения движения вновь запишутся в каноническом виде (для простоты записи штрихи при переменных опустим):

$$\frac{d(l,g,h)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial(L,G,H)}; \qquad \frac{d(L,G,H)}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial(l,g,h)}; \tag{21}$$

$$F = \frac{G^2}{2} + \frac{1}{2}(\kappa-1)L^2 - \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{G^2-L^2}\sqrt{G^2-H^2}}{G^2}\cos g + \frac{LH}{G^2}\right]^n. \tag{22}$$

Гамильтониан (22) содержит лишь один параметр $\kappa = A/C$.

Из интеграла энергии уравнений (21), (22) $F = \dfrac{1}{2}C$, где постоянная интегрирования выражается через начальные значения переменных L_0, G_0, H_0, g_0 и параметр κ:

$$C = G_0^2 + (\kappa-1)L_0^2 - \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{G_0^2-L_0^2}\sqrt{G_0^2-H_0^2}}{G_0^2}\cos g_0 + \frac{L_0H_0}{G_0^2}\right]^n,$$

получаем соотношения

$$\gamma(G) = \left[G^2 + (\kappa-1)L^2 - C\right]^{\frac{1}{n}};$$

$$\cos g = \frac{LH - G^2\gamma(G)}{\sqrt{G^2-L^2}\sqrt{G^2-H^2}}; \tag{23}$$

$$\sin g = \frac{G\Delta(G)}{\sqrt{G^2-L^2}\sqrt{G^2-H^2}};$$

$$\Delta = \sqrt{G^2\left[1-\left[\gamma(G)\right]^2\right] + 2\gamma(G)LH - L^2 - H^2}.$$

Здесь $L = L_0$, $H = H_0$ — постоянные и, следовательно, величины, определяемые формулами (23), являются функциями одной переменной G.

В явном виде уравнения (21), (22) теперь можно записать так:

$$\frac{dl}{dt} = (\kappa-1)L - n\left[\gamma(G)\right]^{n-1}\frac{H - L\gamma(G)}{G^2-L^2},$$

$$\frac{dg}{dt}=G+n\left[\gamma\left(G\right)\right]^{n-1}\frac{LH}{G}\left\{\frac{1}{G^2-H^2}+\frac{1}{G^2-L^2}-\gamma\left(G\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{L}{H\left(G^2-L^2\right)}+\frac{H}{L\left(G^2-H^2\right)}\right)\right\}; \tag{24}$$

$$\frac{dh}{dt}=-n\left[\gamma\left(G\right)\right]^{n-1}\frac{L-H\gamma\left(G\right)}{G^2-H^2};$$

$$\frac{dL}{dt}=0;\quad \frac{dG}{dt}=n\left[\gamma\left(G\right)\right]^{n-1}\frac{\Delta\left(G\right)}{G};\quad \frac{dH}{dt}=0.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи описывается квадратурами:

$$l-l_0=\left(\kappa-1\right)L\left(t-t_0\right)-H\int\limits_{G_0}^{G}\frac{GdG}{\left(G^2-L^2\right)\Delta\left(G\right)}+L\int\limits_{G_0}^{G}\frac{G\gamma\left(G\right)dG}{\left(G^2-L^2\right)\Delta\left(G\right)};$$

$$g-g_0=\int\limits_{t_0}^{t}Gdt+LH\int\limits_{G_0}^{G}\frac{dG}{\left(G^2-H^2\right)\Delta\left(G\right)}+LH\int\limits_{G_0}^{G}\frac{dG}{\left(G^2-L^2\right)\Delta\left(G\right)}-$$

$$-L^2\int\limits_{G_0}^{G}\frac{\gamma\left(G\right)dG}{\left(G^2-L^2\right)\Delta\left(G\right)}-H^2\int\limits_{G_0}^{G}\frac{\gamma\left(G\right)dG}{\left(G^2-H^2\right)\Delta\left(G\right)}; \tag{25}$$

$$h-h_0=-L\int\limits_{G_0}^{G}\frac{GdG}{\left(G^2-H^2\right)\Delta\left(G\right)}+H\int\limits_{G_0}^{G}\frac{G\gamma\left(G\right)dG}{\left(G^2-H^2\right)\Delta\left(G\right)};$$

$$\int\limits_{G_0}^{G}\frac{GdG}{\left[\gamma\left(G\right)\right]^{n-1}\Delta\left(G\right)}=n\left(t-t_0\right). \tag{26}$$

В интегралах (25), (26) также можно перейти к новой переменной интегрирования, полагая

$$\gamma=\left[G^2+\left(\kappa-1\right)L^2-C\right]^{\frac{1}{n}},\quad n\gamma^{n-1}d\gamma=GdG.$$

В результате решение уравнений (24) представим следующими квадратурами:

$$\int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{2\Delta(\gamma)} = t - t_0;$$

$$l - l_0 = (\kappa - 1) L (t - t_0) - \frac{1}{2} nH \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^{n-1} d\gamma}{(\gamma^n - \kappa L^2 + C)\Delta(\gamma)} +$$

$$+ \frac{1}{2} nL \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^{n} d\gamma}{(\gamma^n - \kappa L^2 + C)\Delta(\gamma)};$$

$$g - g_0 = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\sqrt{\gamma^n + (1-\kappa) L^2 + C}}{\Delta(\gamma)} d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2} nLH \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^{n-1} d\gamma}{\sqrt{\gamma^n + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma^n + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)} +$$

$$+ \frac{1}{2} nLH \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^{n-1} d\gamma}{\sqrt{\gamma^n + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma^n - \kappa L^2 + C\right]\Delta(\gamma)} -$$

$$- \frac{1}{2} nL^2 \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^{n} d\gamma}{\sqrt{\gamma^n + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma^n - \kappa L^2 + C\right]\Delta(\gamma)} -$$

$$- \frac{1}{2} nH^2 \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^{n} d\gamma}{\sqrt{\gamma^n + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma^n + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)}; \qquad (27)$$

$$h - h_0 = -\frac{1}{2} nL \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^{n-1} d\gamma}{\left[\gamma^n + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)} +$$

$$+ \frac{1}{2} nH \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^{n} d\gamma}{\left[\gamma^n + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)}.$$

В формулах (27)

$$\Delta(\gamma) = \sqrt{-\gamma^{n+2} + \gamma^n - \gamma^2 a_2 + \gamma a_1 + a_0}\,, \qquad (28)$$

где

$$a_2 = (1-\kappa) L^2 + C; \quad a_1 = 2LH; \quad a_0 = C - \kappa L^2 - H^2.$$

Решение классической задачи Лагранжа в переменных Андуайе получаются из общих квадратур (27), (28) при $n=1$:

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{2\Delta(\gamma)} = t - t_0; \tag{29}$$

$$l - l_0 = (\kappa - 1) L (t - t_0) - \frac{1}{2} H \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\left(\gamma - \kappa L^2 + C\right)\Delta(\gamma)} +$$

$$+ \frac{1}{2} L \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma d\gamma}{\left(\gamma - \kappa L^2 + C\right)\Delta(\gamma)};$$

$$g - g_0 = \frac{1}{2} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\sqrt{\gamma + (1-\kappa) L^2 + C}}{\Delta(\gamma)} d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2} LH \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)} +$$

$$+ \frac{1}{2} LH \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma - \kappa L^2 + C\right]\Delta(\gamma)} -$$

$$- \frac{1}{2} L^2 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{\gamma + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma - \kappa L^2 + C\right]\Delta(\gamma)} -$$

$$- \frac{1}{2} H^2 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{\gamma + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)}; \tag{30}$$

$$h - h_0 = -\frac{1}{2} L \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\left[\gamma + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)} +$$

$$+ \frac{1}{2} H \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma d\gamma}{\left[\gamma + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)},$$

где

$$\Delta(\gamma) = \sqrt{-\gamma^3 - \gamma^2 a_2 + \gamma a_1^* + a_0} \quad \left(a_1^* = a_1 + 1\right).$$

Обращение интегралов (29), (30) осуществляется в функциях Вейерштрасса и других эллиптических функциях.

Решение задачи о вращении осесимметричного тела в полости другого гравитирующего осесимметричного тела получается из общих формул (27), (28) при $n = 2$:

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{2\Delta(\gamma)} = t - t_0, \tag{31}$$

$$l - l_0 = (\kappa - 1) L (t - t_0) - H \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma \, d\gamma}{\left(\gamma^2 - \kappa L^2 + C\right)\Delta(\gamma)} + L \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^2 d\gamma}{\left(\gamma^2 - \kappa L^2 + C\right)\Delta(\gamma)};$$

$$\begin{aligned} g - g_0 = {} & \frac{1}{2} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\sqrt{\gamma^2 + (1-\kappa) L^2 + C}}{\Delta(\gamma)} d\gamma + \\ & + LH \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma^2 + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)} + \\ & + LH \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma^2 - \kappa L^2 + C\right]\Delta(\gamma)} - \\ & - L^2 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^2 d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma^2 - \kappa L^2 + C\right]\Delta(\gamma)} - \\ & - H^2 \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^2 d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (1-\kappa) L^2 + C}\left[\gamma^2 - \kappa L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)}; \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} h - h_0 = {} & -L \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma d\gamma}{\left[\gamma^2 + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)} + \\ & + H \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\gamma^2 d\gamma}{\left[\gamma^2 + (1-\kappa) L^2 - H^2 + C\right]\Delta(\gamma)}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta(\gamma) = \sqrt{-\gamma^4 - \gamma^2 a_2^* + \gamma a_1 + a_0} \quad \left(a_2^* = a_2 + 1\right).$$

Обращение интегралов (31), (32) осуществляется в эллиптических функциях.

Заключение. Ранее предполагалось, что полость мантии пуста. Однако ряд результатов данной работы легко переносится на более общую задачу о движении гравитирующих тел, когда пространство между ними заполнено идеальной однородной, вообще говоря, гравитирующей жидкостью. Так, если центры масс тел совпадают в течение всего времени движения, а поверхности ядра и полости являются концентрическими сферами, то жидкость не оказывает никакого влияния на вращательное движение тел, описываемое по-прежнему уравнениями (12)–(14). Следовательно, найденные решения имеют место и в этом варианте задачи. Применительно к реальным задачам это означает, например, что эффекты во взаимных вращательных движениях ядра и мантии в первую очередь обусловлены их гравитационным взаимодействием, а гидродинамические эффекты пренебрежимо малы в силу малой несферичности указанных поверхностей.

Рассматриваемая задача имеет важное общенаучное значение для небесной механики. Разрабатываемый подход открывает новые возможности для инженерных и физических экспериментов и исследований на борту космических станций для проведения и исследования эффектов микрогравитации, в частности, при изучении гравитационного взаимодействия и относительных смещений частей и блоков станции. Она может быть использована при изучении относительных движений оболочек естественных небесных тел, их взаимодействия и устойчивости. Широкое значение имеет задача о вынужденных относительных колебаниях ядра и мантии планеты под действием гравитационного притяжения окружающих планет и спутников. Благодаря бурному развитию космической геодезии в настоящее время становятся доступными для изучения смещения и колебания центра масс Земли относительно опорных земных систем координат.

Более глубокие динамические исследования динамики системы «мантия — жидкое ядро — твердое ядро» представляют значительный интерес для небесной механики, геодинамики и сейсмологии, особенно в силу недавнего открытия вращательного движения внутреннего ядра Земли на основе современных сейсмологических данных [7] и его предполагаемого винтового долгопериодического движения [8].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы.* Москва, Наука, 1968, 801 с.

[2] Баркин Ю.В. *Динамика системы несферичных небесных тел и теория вращения Луны*. Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1989, 412 с.

[3] Barkin Yu.V. Integrability and Integrable Cases of Some Problems of Rotational Motion of the Celestial Bodies. *IAU Colloquium 165. Dynamics and Astrometry*

of Natural and Artificial Celestial Bodies (Poznan, Poland, July 1–5, 1996). Book of Abstracts. Bureau Des Longitudes, Paris, 1996, p. 16.

[4] Чандрасекар С. *Эллипсоидальные фигуры равновесия*. Москва, Мир, 1973, 288 с.

[5] Баркин Ю.В. К динамике твердого ядра Земли. *Тр. Гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга.* Москва, 1997, т. 65, с. 107–130.

[6] Архангельский Ю.А. *Аналитическая динамика твердого тела*. Москва, Наука, 1977, 328 с.

[7] Song X., Rechards P.G. Seismological Evidence for Differential Rotation of the Earth's Inner Core. *Nature*, 1996, vol. 382, no. 6, pp. 221–224.

[8] Баркин Ю.В. Возможное долгопериодическое движение твердого ядра. *Науч. матер. Всерос. конф. «Геодинамика и эволюция Земли» Новосибирск, 12–15 ноября 1996 г.).* Новосибирск, 1996, с. 10–13.

Статья поступила в редакцию 16.10.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Баркин Ю.В., Баркин М.Ю. Движение твердого ядра в полости вращающейся несферичной оболочки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 12. URL: engjournal.ru/catalog/arse/adb/1451.html

Баркин Юрий Владимирович родился в 1951 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1972 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник ГАИШ МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор более 300 научных публикаций.
e-mail: barkin@inbox.ru

Баркин Михаил Юрьевич родился в 1987 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 2009 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных публикаций. e-mail: barkin@yandex.ru

The movement of the solid core in the cavity of a rotating non-spherical shell

© Yu.V. Barkin[1], M.Yu. Barkin[2]

[1]Sternberg Astronomical Institute at Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents the analysis of the integrable cases of the restricted problem of translational-rotational motion of a rigid body (core) in the cavity of steady rotating gravitating non-spherical shell. Only the gravitational interaction of bodies is considered. The canonical equations of rotational motion in Euler variables and Andoyer variables were obtained. The cases of integrability of the restricted problem when the core is an axisymmetric rigid body are studied. In these cases solution of the problem is reduced to a simple quadrature reversal and can be represented in terms of elliptic functions. This research reveals new possibilities for the study of relationships of core and heavenly body mantle forced relative motions and variations of natural processes on the planets and satellites. Dynamic studies of the Earth mantle — liquid core — rigid core system are of great interest for the modern geodynamics.

Keywords: *non-spherical rigid body, elliptic integrals, Andoyer variables, the mantle – core system, microgravity, interaction of blocks, Space Station blocks.*

REFERENCES

[1] Duboshin G.N. *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial Mechanics. The Main Objectives and Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 801 p.

[2] Barkin Yu.V. *Dinamika sistemy nesferichnykh nebesnykh tel i teoriya vrashcheniya Luny.* Diss. … doct. fiz.-mat. nauk [Dynamics of a Non-Spherical Celestial Body System and the Theory of the Moon's Rotation. Dr. phys. and math. Sci. diss.]. Moscow, SAI Moscow State University Publ., 1989, 412 p.

[3] Barkin Yu.V. Integrability and Integrable Cases of Some Problems of Rotational Motion of the Celestial Bodies. *IAU Colloquium 165. Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies (Poznan, Poland, July 1–5, 1996). Book of Abstracts*. Paris, Bureau Des Longitudes Publ., 1996, p. 16.

[4] Chandrasekhar S. *Ellipsoidalnye figury ravnovesiya*. [Ellipsoidal Figures of Equilibrium]. Moscow, Mir Publ., 1973, 288 p. (In Russian).

[5] Barkin Yu.V. K dinamike tverdogo yadra Zemli [On the Dynamics of the Solid Earth's Core].*Trudy Gos. Astron. In-ta im. P.K. Shternberga MGU* [Proceedings of the SAI MSU], 1997, vol. 65, pp. 107–130.

[6] Arkhangelskiy Yu.A. *Analiticheskaya dinamika tverdogo tela* [The analytical dynamic of the rigid body]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 328 p.

[7] Song X., Rechards P.G. *Nature*, 1996, vol. 382, no. 6, pp. 221–224.

[8] Barkin Yu.V. Vozmozhnoe dolgoperiodicheskoe dvizhenie tverdogo yadra [Possible Long Term Periodic Motion of the Solid Core]. *Nauchnye materialy Vserossiyskoy konferentsii "Geodinamika I evolutsiya Zemli". Novosibirsk, 12–15 noyabrya 1996* [Proceedings of All-Russian Conference "Geodynamics and Evolution of the Earth", Novosibirsk, November 12–15, 1996]. Novosibirsk, 1996, pp. 10–13.

Barkin Yu.V. (b. 1951) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1972. Dr. Sci. (Phys. & Math.), professor, leading researcher in Sternberg Astronomical Institute at Lomonosov Moscow State University. Author of more than 300 research publications. Sphere of scientific interests includes theoretical mechanics, celestial mechanics.
e-mail: barkin@inbox.ru

Barkin M.Yu., (b. 1987) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2009. Cand. Sci. (Phys. & Math.), assistant lecturer of the Theoretical Mechanics Department in Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 research publications. Sphere of scientific interests includes theoretical mechanics, celestial mechanics.
e-mail: barkin@yandex.ru