

В. С. З а р у б и н, Г. Н. К у в ы р к и н,
И. Ю. С а в е л ь е в а

ЭФФЕКТИВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТА ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ КОНТАКТЕ ШАРОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И МАТРИЦЫ

Построена математическая модель переноса тепловой энергии в композите с включениями шаровой формы (в общем случае в виде полых шаров). Учтена возможность возникновения неидеального теплового контакта между включениями и матрицей. Получены оценки эффективного коэффициента теплопроводности такого композита, в том числе с применением двойственной формулировки вариационной задачи стационарной теплопроводности в неоднородном твердом теле. Проведенный параметрический анализ позволил установить области применения найденных оценок, которые могут быть использованы для прогноза эффективного коэффициента теплопроводности композитов, в частности, модифицированных наноструктурными элементами.

E-mail: zarubin@bmstu.ru, gnk1914@mail.ru, inga_fn2@mail.ru

Ключевые слова: композит с включениями шаровой формы, эффективный коэффициент теплопроводности, наноструктурные элементы

Перспектива модификации композитов наноструктурными элементами (в том числе фуллеренами), имеющими высокие механические характеристики, связана с повышением макроскопических характеристик композитов в целом как конструкционных материалов. Для конструкций, испытывающих одновременно как механические, так и тепловые воздействия, помимо информации о механических характеристиках композита важно располагать данными и о его теплофизических свойствах (в частности, о коэффициенте теплопроводности). Эффективное значение коэффициента теплопроводности композита, модифицированного наноструктурными элементами, зависит от их объемной концентрации C_V , от соотношения между коэффициентами теплопроводности матрицы и применяемых при модификации элементов, а также от условий теплового контакта между этими элементами и матрицей. В данной работе ограничимся рассмотрением композита, модифицированного элементами в виде полого шара, который можно считать приемлемым приближением к геометрической форме фуллере-на [1].

Математическую модель переноса тепловой энергии в композите построим в предположении, что шаровые включения в общем случае не контактируют между собой, т.е. отделены друг от друга слоем материала матрицы. Композит считаем состоящим из множества составных шаровых частиц, каждая из которых включает полый шар с

наружным радиусом R_1 , окруженный слоем материала матрицы. Примем, что такая составная частица с наружным радиусом R_2 является представительным элементом структуры композита и в тепловом отношении взаимодействует с неограниченным массивом однородного материала, коэффициент теплопроводности λ которого подлежит определению как эффективная характеристика композита. Таким образом, модель композита содержит три фазы: включение, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала. При этом отношение R_1^3/R_2^3 равно объемной концентрации C_V включений в композите. Такая модель формально применима во всем промежутке $C_V \in [0, 1]$, но ее использование корректно до таких значений $C_V < 1$, при которых влияние теплового взаимодействия между соседними включениями можно считать мало существенным.

Рассмотрим тепловое взаимодействие отдельно взятой составной частицы и окружающего ее однородного материала, полагая коэффициенты теплопроводности λ_1 и λ_2 материалов соответственно полого шара и матрицы заданными. Термическое сопротивление между включением и матрицей, характеризующее неидеальный тепловой контакт на разделяющей их поверхности радиусом R_1 , является величиной, обратной коэффициенту α контактного теплообмена. При $\alpha \rightarrow \infty$ тепловой контакт на этой поверхности становится идеальным. Тепловой контакт на сферической поверхности радиусом R_2 , отделяющей составную частицу от массива однородного материала, примем идеальным.

Центр полого шара с внутренним радиусом R_0 и наружным радиусом $R_1 < R_2$ поместим в начале сферической системы координат. Примем, что на большом расстоянии r от начала координат задан вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси сферической системы координат, от которой происходит отсчет угловой координаты θ , т.е. при $r \rightarrow \infty$ установившееся распределение температуры в этом материале описывает функция $T_\infty(r, \theta) = Gr \cos \theta$, где G — модуль вектора градиента. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

В данном случае благодаря параллельности заданного вектора градиента температурного поля и оси отсчета угловой координаты θ распределение температуры симметрично относительно этой оси и не зависит от угловой координаты φ , т.е. $\partial^2 T / \partial \varphi^2 \equiv 0$.

По мере приближения к составной шаровой частице температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое

также удовлетворяющим уравнению (1) дополнительным слагаемым $\Delta T(r, \theta) = (B/r^2) \cos \theta$, где B – подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при $r \rightarrow \infty$ и уравнению (1), описывает функция

$$T(r, \theta) = T_\infty(r, \theta) + \Delta T(r, \theta) = (Gr + B/r^2) \cos \theta. \quad (2)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения температуры в шаровом включении

$$T_1(r, \theta) = (A_1 r + B_1/r^2) \cos \theta \quad (3)$$

и в слое материала матрицы

$$T_2(r, \theta) = (A_2 r + B_2/r^2) \cos \theta. \quad (4)$$

В равенства (2)–(4) входят 5 неизвестных коэффициентов B , A_1 , B_1 , A_2 и B_2 , которые необходимо найти из граничных условий на сферических поверхностях с радиусами R_0 , R_1 и R_2 . При $r = R_0$ из условия отсутствия теплообмена в полости шарового включения с учетом равенства (3) получим

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=R_0} = (A_1 - 2B_1/R_0^3) \cos \theta = 0$$

или

$$A_1 = 2B_1/R_0^3. \quad (5)$$

При $r = R_1$ из условия непрерывности плотности теплового потока следует

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=R_1} = \alpha (T_2(R_1, \theta) - T_1(R_1, \theta)) = \lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=R_1}.$$

Отсюда с использованием равенств (3) и (4) находим

$$A_2 - 2B_2/R_1^3 = \beta \left(A_2 - A_1 + (B_2 - B_1)/R_1^3 \right) = \bar{\lambda} (A_1 - 2B_1/R_1^3), \quad (6)$$

где $\beta = \alpha R_1/\lambda_2$ и $\bar{\lambda} = \lambda_1/\lambda_2$. Наконец, при $r = R_2$ условия идеального теплового контакта, соответствующие непрерывности не только плотности теплового потока, но и распределения температуры, позволяют записать

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_2} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=R_2}, \quad T(R_2, \theta) = T_2(R_2, \theta).$$

После подстановки в эти равенства соотношений (2) и (3) получим

$$\tilde{\lambda} (G - 2B/R_2^3) = A_2 - 2B_2/R_2^3 \quad \text{и} \quad G + B/R_2^3 = A_2 + B_2/R_2^3, \quad (7)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_2$.

Последовательным исключением неизвестных из равенств (5)... (7) находим

$$\frac{2B}{R_2^3} = G \frac{\tilde{\lambda}(2C_1 + C_2C_V) - 2(C_1 - C_2C_V)}{\tilde{\lambda}(2C_1 + C_2C_V) + C_1 - C_2C_V}, \quad (8)$$

где

$$C_1 = \bar{\lambda}(2 + \beta)(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(2 + \bar{R}_0^3), \quad C_2 = 2\bar{\lambda}(1 - \beta)(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(2 + \bar{R}_0^3)$$

и $\bar{R}_0 = R_0/R_1$. В случае включения в виде сплошного шара $\bar{R}_0 = 0$.

Замена составной шаровой частицы равновеликим шаром радиусом R_2 с искомым коэффициентом теплопроводности λ приведет к исчезновению возмущения температурного поля в окружающем ее однородном материале с тем же значением λ . Тогда в равенстве (2) следует положить $\Delta T(r, \theta) = 0$, что равносильно условию $B = 0$, которое с учетом формулы (8) позволяет записать

$$\tilde{\lambda} = \frac{2(C_1 - C_2C_V)}{2C_1 + C_2C_V}. \quad (9)$$

В частном случае идеального теплового контакта на сферической поверхности радиусом R_1 , разделяющей включение и матрицу, $\beta \rightarrow \infty$ и равенство (9) при $\bar{R}_0 = 0$ переходит в известную формулу Максвелла [2]

$$\tilde{\lambda} = \frac{2 + \bar{\lambda} - 2(1 - \bar{\lambda})C_V}{2 + \bar{\lambda} + (1 - \bar{\lambda})C_V}, \quad (10)$$

полученную на основе более простой двухфазной модели, состоящей из включения в виде сплошного шара и окружающего его материала матрицы. При полном отсутствии теплового контакта на этой поверхности $\beta = 0$ и из равенства (9) следует

$$\tilde{\lambda} = \frac{2(1 - C_V)}{2 + C_V} = 1 - \frac{3C_V}{2 + C_V}, \quad (11)$$

что соответствует пористому материалу с коэффициентом теплопроводности λ_2 , объемная концентрация пор в котором равна C_V . Равенство (9) переходит в соотношение (11) и в случае абсолютно нетеплопроводных включений ($\bar{\lambda} = 0$). Наоборот, при абсолютно теплопроводных включениях ($\bar{\lambda} \rightarrow \infty$) из равенства (9) получим формулу

$$\tilde{\lambda} = \frac{2 + \beta - 2(1 - \beta)C_V}{2 + \beta + (1 - \beta)C_V}, \quad (12)$$

аналогичную формуле (10) Максвелла, но с заменой параметра $\bar{\lambda}$ на параметр β . Наконец, предельным переходом в правой части формулы (12) при $\beta \rightarrow \infty$, что соответствует идеальному тепловому контакту между матрицей и идеально теплопроводным включением, приходим

к соотношению

$$\tilde{\lambda} = \frac{1 + 2C_V}{1 - C_V} = 1 + \frac{3C_V}{1 - C_V}.$$

Проведенный анализ частных случаев, описываемых формулой (9), может служить косвенным подтверждением корректности использованной выше процедуры получения этой формулы.

Используем двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [3, 4] для получения двусторонних оценок эффективного коэффициента теплопроводности рассматриваемого композита. Область V , содержащую представительный элемент структуры композита в виде половины составной частицы радиусом R_2 , выберем в форме прямого цилиндра с достаточно большой площадью S_0 параллельных оснований, одно из которых соответствует в сферических координатах значению $\theta = \pi/2$, а точки второй имеют координаты $r \cos \theta = H$, т.е. высота цилиндра равна H , причем $H \gg R_2$. Боковую поверхность цилиндра примем идеально теплоизолированной, температуру основания при $\theta = \pi/2$ положим равной нулю, а на втором основании зададим температуру GH . Однородный материал в части области вне составной частицы имеет коэффициент теплопроводности λ . Таким образом, в неоднородной цилиндрической области объемом $V_0 = HS_0$, ограниченной поверхностью S , распределение температуры $T(M)$ и коэффициент теплопроводности $\Lambda(M)$ являются функциями координат точки $M \in V$, причем функция $\Lambda(M)$ кусочнопостоянная и принимает значения λ_1 при $R_0 \leq r \leq R_1$, λ_2 при $R_1 \leq r \leq R_2$ и λ при $r \geq R_2$.

Для минимизируемого функционала [4]

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V \Lambda(M) (\nabla T(M))^2 dV(M) + 2\pi R_1^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi/2} \Delta T_K(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (13)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, а $\Delta T_K(\theta)$ — разность температур на контактной полусферической поверхности радиусом R_1 , примем при $r \geq R_1$ в качестве допустимого линейное по высоте цилиндра распределение температуры с постоянной составляющей градиента G , т.е.

$$T^*(r, \theta) = Gr \cos \theta, \quad (14)$$

а в шаровом включении аналогично соотношению (3)

$$T_1^*(r, \theta) = (\bar{A}_1 r + \bar{B}_1/r^2) \cos \theta. \quad (15)$$

Из условия отсутствия теплообмена в полости шарового включения с учетом соотношения (15) получим равенство

$$\bar{A}_1 = 2\bar{B}_1/R_0^3, \quad (16)$$

аналогичное формуле (5). При $r = R_1$ из условия непрерывности плотности теплового потока с использованием соотношений (15) и (16) следует

$$\beta(G - \bar{A}_1(1 + \bar{R}_0^3/2)) = \bar{\lambda}\bar{A}_1(1 - \bar{R}_0^3).$$

Отсюда находим

$$\bar{A}_1 = \frac{G\beta}{\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)} \quad (17)$$

и

$$\Delta T_{\text{к}}(\theta) = \frac{GR_1\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)\cos\theta}{\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)}. \quad (18)$$

Составляющие градиента температуры в шаровом включении, согласно соотношению (15), равны

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial r} = (\bar{A}_1 - 2\bar{B}_1/r^3)\cos\theta \quad \text{и} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial T_1^*}{\partial\theta} = -(\bar{A}_1 + \bar{B}_1/r^3)\sin\theta,$$

что позволяет вычислить

$$(\nabla T_1^*)^2 = (\bar{A}_1^2 + 2\bar{A}_1\bar{B}_1)(1 - 3\cos^2\theta)/r^3 + \bar{B}_1^2(1 + 3\cos^2\theta)/r^6. \quad (19)$$

Тогда из формулы (13) с учетом равенств (14), (16), (18) и (19) получим

$$J_1[T] = \lambda\frac{G^2}{2}HS_0 - \frac{2\pi R_2^3}{3}\lambda\frac{G^2}{2} + 2\pi\frac{R_2^3 - R_1^3}{3}\lambda_2\frac{G^2}{2} + 2\pi\frac{R_1^3 - R_0^3}{3} \times \\ \times \lambda_1\frac{\bar{A}_1^2}{2}(1 + \bar{R}_0^3/2) + 2\pi\frac{R_1^3}{3}\lambda_2\frac{\bar{\lambda}^2\beta(1 - \bar{R}_0^3)^2}{(\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2))^2}. \quad (20)$$

Примем для максимизируемого функционала [4]

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2}\int_V \frac{(\mathbf{q}(M))^2}{\Lambda(M)} dV(M) - \int_S T(P)\mathbf{q}(P) \cdot \mathbf{n}(P) dS(P) - \\ - 2\pi R_1^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi/2} \Delta T_{\text{к}}(\theta) \sin\theta d\theta, \quad P \in S, \quad (21)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , в качестве допустимого распределения вектора плотности теплового потока \mathbf{q} при $r \geq R_1$ постоянное значение $q = -\lambda G$ единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра.

В шаровом включении скалярный квадрат вектора плотности теплового потока представим с учетом соотношения (19) в виде

$$\mathbf{q}^2 = \lambda_1^2 (\nabla T_1^\circ)^2 = (\tilde{A}_1^2 + 2\tilde{A}_1\tilde{B}_1)(1 - 3\cos^2\theta)/r^3 + \tilde{B}_1^2(1 + 3\cos^2\theta)/r^6, \quad (22)$$

соответствующим распределению температуры во включении, определяемому формулой

$$T_1^\circ(r, \theta) = (\tilde{A}_1 r + \tilde{B}_1/r^2) \cos\theta, \quad (23)$$

аналогичной формуле (15). Из условия отсутствия теплообмена в полости шарового включения с учетом соотношения (23) находим

$$\tilde{A}_1 = 2\tilde{B}_1/R_0^3, \quad (24)$$

а при $r = R_1$ из условия непрерывности плотности теплового потока с использованием соотношений (23) и (24) следует

$$q = -\lambda G = -\lambda_1(\tilde{A}_1 - 2\tilde{B}_1/R_1^3) = -\lambda_1\tilde{A}_1(1 - \bar{R}_0^3).$$

Отсюда находим

$$\tilde{A}_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{G}{1 - \bar{R}_0^3}. \quad (25)$$

В данном случае $\Delta T_K(\theta) = (\lambda/\alpha)G \cos\theta$ и формула (21) с учетом соотношений (22), (24) и (25) примет вид

$$I_1[q] = -\frac{(\lambda G)^2}{2} \left(\frac{HS_0 - 2\pi R_2^3/3}{\lambda} + 2\pi \frac{R_2^3 - R_1^3}{3\lambda_2} + 2\pi R_1^3 \frac{(1 + \bar{R}_0^3/2)}{3\lambda_1(1 - \bar{R}_0^3)} + 2\pi \frac{R_1^3}{3\lambda_2\beta} \right) + \lambda G^2 HS_0. \quad (26)$$

Принятые в качестве допустимых распределения температуры и плотности теплового потока для неоднородной области отличаются от действительных и поэтому значения $J_1[T]$ и $I_1[q]$ не будут совпадать, причем $J_1[T] > I_1[q]$. В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение $J_0 = (\lambda/2)G^2 HS_0$ минимизируемого функционала (13) для однородной области с коэффициентом теплопроводности λ . Тогда при $(R_1/R_2)^3 = C_V$ с учетом формулы (20) из условия $J_1[T] \geq J_0$ получим

$$\tilde{\lambda} \leq (1 - C_V) + \bar{\lambda}\beta \frac{\bar{\lambda} + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)(1 - \bar{R}_0^3)}{(\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2))^2} = \tilde{\lambda}_+,$$

а при использовании формулы (26) из условия $I_1[q] \leq J_0$ найдем

$$\tilde{\lambda} \geq \frac{1}{1 - C_V + (C_V/\bar{\lambda})(1 + \bar{R}_0^3/2)/(1 - \bar{R}_0^3) + C_V/\beta} = \tilde{\lambda}_-.$$

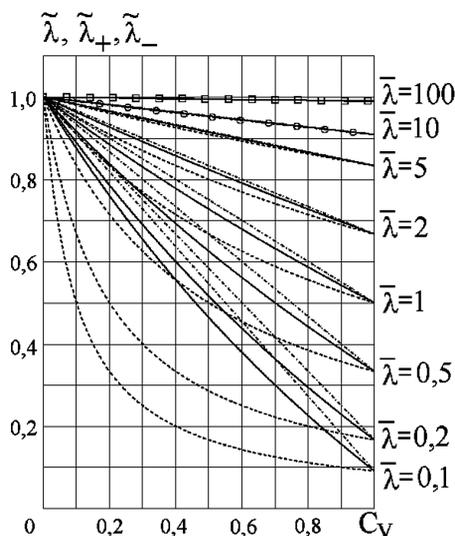


Рис. 1

На рис. 1 для случая $R_0 = 0$ и $\beta = 1$ при различных значениях $\bar{\lambda}$ приведены графики зависимостей от C_V верхней $\tilde{\lambda}_+$ (штрихпунктирные линии) и нижней $\tilde{\lambda}_-$ (штриховые линии) оценок отношения $\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_2$. Сплошными линиями представлены графики зависимостей $\tilde{\lambda}$, построенные по формуле (9), которая в случае $R_0 = 0$ принимает вид

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\bar{\lambda} + \beta(2 + \bar{\lambda}) - 2(\beta(1 - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda})C_V}{2\bar{\lambda} + \beta(2 + \bar{\lambda}) + (\beta(1 - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda})C_V}. \quad (27)$$

Из этого рисунка следует, что разность $\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-$ уменьшается по мере увеличения значения $\bar{\lambda}$. При $\bar{\lambda} = 10$ и $\bar{\lambda} = 100$ кривые для $\tilde{\lambda}_-$, отмеченные соответственно светлыми кружками и квадратами, практически совпадают со сплошными кривыми для $\tilde{\lambda}$ и штрихпунктирными кривыми для $\tilde{\lambda}_+$, поскольку различие в значениях $\tilde{\lambda}_-$, $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\lambda}_+$ очень мало. Например, для $C_V = 0,5$ при $\bar{\lambda} = 10$ $\tilde{\lambda}_- = 0,9524$, $\tilde{\lambda} = 0,9538$ и $\tilde{\lambda}_+ = 0,9545$, а при $\bar{\lambda} = 100$ $\tilde{\lambda}_- = 0,995025$, $\tilde{\lambda} = 0,995041$ и $\tilde{\lambda}_+ = 0,995050$.

С увеличением параметра β тепловой контакт между включениями и матрицей улучшается. Поэтому при прочих равных условиях значения $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_-$ и $\tilde{\lambda}_+$ возрастают. На рис. 2 представлены зависимости, аналогичные графикам на рис. 1, но при $\beta = 10$. Следует отметить, что в случае сплошных шаровых включений ($R_0 = 0$) оценки $\tilde{\lambda}_-$ и $\tilde{\lambda}_+$, а также правая часть формулы (23) не изменяют своих значений при перестановке значений β и $\bar{\lambda}$. Например, графики на рис. 2 для $\bar{\lambda} = 1$ идентичны графикам на рис. 1 для $\bar{\lambda} = 10$.

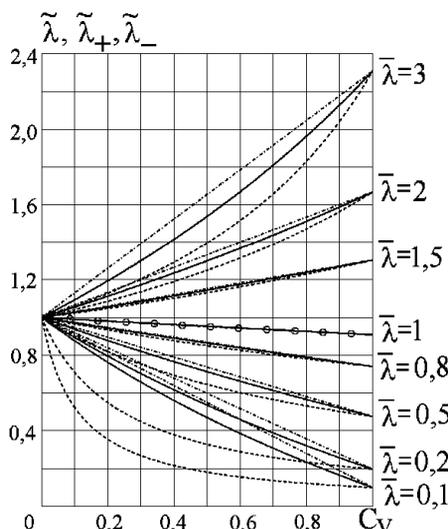


Рис. 2

Из рис. 1 видно, что при $\beta = 1$ ширина полосы, ограниченной кривыми для верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок, увеличивается по мере уменьшения значения $\bar{\lambda}$ несмотря на совпадение значений $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_-$ при $C_V = 0$ и $C_V = 1$. При $\beta = 10$ ширина такой полосы растет по мере отклонения значений $\bar{\lambda}$ от единицы. Возможная причина состоит в том, что для таких сочетаний β и $\bar{\lambda}$ использованные выше допустимые для функционалов распределения плотности теплового потока и температуры становятся достаточно грубыми. Уточним эти распределения с учетом переменных плотности теплового потока и градиента температуры не только в шаровом включении, но и в шаровом слое матрицы, входящем в представительный элемент структуры композита.

В дополнение к формуле (15), описывающей распределение температуры в шаровом включении, допустимое для минимизируемого функционала (13) распределение температуры в шаровом слое матрицы примем аналогично соотношению (4) в виде

$$T_2^*(r, \theta) = (\bar{A}_2 r + \bar{B}_2 / r^2) \cos \theta. \quad (28)$$

Для нахождения коэффициентов \bar{A}_2 и \bar{B}_2 и уточненного соотношения для коэффициента \bar{A}_1 в формуле (15) используем с учетом равенства (16) условие непрерывности плотности теплового потока при $r = R_1$ в виде

$$\bar{A}_2 - 2\bar{B}_2 / R_1^3 = \beta(\bar{A}_2 + \bar{B}_2 / R_1^3 - \bar{A}_1(1 + \bar{R}_0^3 / 2)) = \bar{\lambda} \bar{A}_1 (1 - \bar{R}_0^3) \quad (29)$$

и граничное условие для температуры при $r = R_2$ в форме

$$\bar{A}_2 R_2 + \bar{B}_2 / R_2^2 = GR_2. \quad (30)$$

Отсюда получим

$$\bar{A}_1 = 3Gb/Z, \quad \bar{A}_2 = G\left(2\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(2 + \beta)(1 - \bar{R}_0^3)\right)/Z,$$

$$\bar{B}_2/R_1^3 = G\left(\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(1 - \beta)(1 - \bar{R}_0^3)\right)/Z,$$

где $Z = \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)(2 + C_V) + \bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)(2 + \beta + (1 - \beta)C_V)$.

В рассматриваемом случае с учетом формул (15) и (28)

$$\Delta T_K(\theta) = T_2^*(R_1, \theta) - T_1^*(R_1, \theta) =$$

$$= \left(\bar{A}_2 + \frac{\bar{B}_2}{R_1^3} - \bar{A}_1(1 + \bar{R}_0^3/2)\right)R_1 \cos \theta = 3G\bar{\lambda}\frac{1 - \bar{R}_0^3}{Z}R_1 \cos \theta. \quad (31)$$

Тогда из формулы (13) получим

$$J_1[T] = \lambda\frac{G^2}{2}(HS_0 - 2\pi R_2^3/3) + 2\pi\frac{R_2^3 - R_1^3}{3}\lambda_2\left(\frac{\bar{A}_2^2}{2} + \frac{\bar{B}_2^2}{R_1^3 R_2^3}\right) +$$

$$+ 2\pi\frac{R_1^3 - R_0^3}{3}\lambda_1\frac{\bar{A}_1^2}{2}(1 + \bar{R}_0^3/2) + 2\pi\frac{R_1^3}{3}\lambda_2\beta\left(\frac{3G\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)}{Z}\right)^2,$$

что с учетом условия $J_1(T) \geq J_0(T) = (\lambda/2)G^2HS_0$ приводит к неравенству

$$\tilde{\lambda} \leq \frac{1 - C_V}{G^2}\left(\bar{A}_2^2 + 2C_V\frac{\bar{B}_2^2}{R_1^6}\right) + C_V\bar{\lambda}\bar{A}_1^2\frac{1 + \bar{R}_0^3/2}{G^2} + C_V\beta\left(3\bar{\lambda}\frac{1 - \bar{R}_0^3}{Z}\right)^2 = \tilde{\lambda}_+^o.$$

При построении допустимого для максимизируемого функционала (21) распределения плотности теплового потока используем прежние формулы (15) и (28), обозначив в них коэффициенты через A_1^* , B_1^* и A_2^* , B_2^* соответственно. Для нахождения этих коэффициентов остаются справедливыми равенства вида (16) и (29), а граничное условие (30) следует заменить на условие $q = -\lambda G = -\lambda_2(A_2^* - 2B_2^*/R_2^3)$ непрерывности нормальной к сферической поверхности радиусом R_2 составляющей вектора плотности теплового потока. В итоге получим

$$\tilde{A}_1 = \frac{A_1^*}{G\tilde{\lambda}} = 3\beta/Z_1, \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_2^*}{G\tilde{\lambda}} = \frac{2\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(2 + \beta)(1 - \bar{R}_0^3)}{Z_1},$$

$$\tilde{B}_2/R_1^3 = B_2^*/(R_1^3 G\tilde{\lambda}) = \left(\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(1 - \beta)(1 - \bar{R}_0^3)\right)/Z_1,$$

где $Z_1 = 2(1 - C_V)(\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)) + (1 + 2C_V)\bar{\lambda}\beta(1 - \bar{R}_0^3)$ и по аналогии с формулой (16) $B_1^*/R_0^3 = A_1^*/2$.

Теперь в правой части равенства (31) для разности температур на контактной поверхности при $r = R_1$ необходимо заменить знаменатель Z на Z_1 и добавить множитель $\tilde{\lambda}$. Тогда из формулы (21) получим

$$I_1[q] = -\frac{(\lambda G)^2 H S_0 - 2\pi R_2^3/3}{2\lambda} - 2\pi \frac{R_2^3 - R_1^3}{3\lambda_2} \left(\frac{\tilde{A}_2^2}{2} - \frac{\tilde{B}^2}{R_1^3 R_2^3} \right) (\lambda G)^2 - \\ - \frac{2\pi}{3} R_1^3 \left((1 - \bar{R}_0^3) \lambda_1 \frac{\tilde{A}_1^2}{2} (1 + \bar{R}_0^3/2) + \beta \lambda_2 \left(\frac{3\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)}{Z_1} \right)^2 \right) \times \\ \times \left(\frac{\lambda G}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda G^2 H S_0.$$

Отсюда с учетом условия $I_1(q) \leq J_0(T) = (\lambda/2)G^2 H S_0$ находим

$$\tilde{\lambda} \geq \frac{1}{(1 - C_V)M + C_V S} = \tilde{\lambda}_-,$$

где

$$M = \tilde{A}_2^2 + 2C_V \tilde{B}_2^2/R_1^6 \text{ и } S = \bar{\lambda} \tilde{A}_1^2 (1 - \bar{R}_0^3) (1 + \bar{R}_0^3/2) + \beta \left(3\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)/Z_1 \right)^2.$$

Непосредственная проверка показывает, что при $C_V \in [0, 1]$, $\bar{R}_0 \in [0, 1)$ и любых положительных значениях параметров β и $\bar{\lambda}$ значения $\tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_-$ совпадают между собой и со значением $\tilde{\lambda}$, вычисляемым по формуле (9). Это означает, что в рамках использованной математической модели с выбранным представительным элементом структуры рассматриваемого композита формула (9) обеспечивает получение достоверных результатов при таких значениях $C_V < 1$, когда можно пренебречь тепловым взаимодействием между соседними включениями.

Работа выполнена по гранту НШ–255.2012.8 программы государственной поддержки ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К а ц Е. А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 296 с.
2. К а р с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
3. З а р у б и н В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
4. З а р у б и н В. С., К у в ы р к и н Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012