

М. Б. Гавриков, В. В. Савельев

СТАЦИОНАРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДУХЖИДКОСТНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Представлены первые результаты исследования равновесных конфигураций плазмы в ловушке токамак. Равновесие определяется условием $V_i = 0$, но в полном объеме учитывается инерция электронов, влияние которой на равновесие приводит к дополнительному уравнению на функцию полного тока J , отсутствовавшего в МГД-плазмостатике. В итоге возникает система двух уравнений на функцию магнитного потока Ψ и функцию J .

E-mail: nadya_p@cognitive.ru, ssvvvv@rambler.ru

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, токамак, равновесная конфигурация, двухжидкостная МГД.

В работе представлены первые результаты исследования равновесных (стационарных) конфигураций плазмы в ловушке токамак на основе двухжидкостной магнитной гидродинамики. Исторически задачи плазмостатики возникли как составная и важнейшая часть программы управляемого термоядерного синтеза УТС [1, 2]. Многочисленные установки, имеющие целью реализацию равновесных конфигураций, называются магнитными ловушками. Одним из наиболее перспективных направлений в проблеме УТС, с которым связаны большие ожидания, и является тороидальная магнитная ловушка токамак. В частности, в настоящее время в рамках международного проекта ITER, в котором участвует и Россия, во Франции строится большая установка такого типа.

Теоретической основой расчета магнитных ловушек на сегодняшний день является, как правило, магнитная гидродинамика (МГД) [3]. Практически наиболее интересны конфигурации, обладающие определенной симметрией, например, как в токамаке, осевой. В этом случае равновесная (статическая) МГД-конфигурация ищется как решение уравнения Грэда – Шафранова [3,4]:

$$\Delta^* \Psi \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -16\pi^3 r^2 \frac{dP}{d\Psi} - \frac{8\pi^2}{c^2} \frac{dJ^2}{d\Psi} \quad (1)$$

где $\Psi(r, z)$ – функция магнитного потока, $P(\Psi)$, $J(\Psi)$ – произвольные заданные функции, имеющие смысл давления плазмы и функции полного тока.

Двухжидкостная гидродинамика квазинейтральной плазмы. В классической МГД среда рассматривается как проводящая электри-

ческий ток жидкость, причем механизм возникновения тока не определяется. В модели двухжидкостной магнитной гидродинамики [5–7], плазма рассматривается как смесь двух заряженных газов (ионного и электронного) и электрический ток возникает как естественный результат различного движения компонент. Для рассматриваемого круга задач естественно предположение об квазинейтральности (концентрации электронов и ионов равны $n_e = n_i = n$). Для каждой из компонент мы имеем свой комплект гидродинамических уравнений. В отсутствие диссипации мы, таким образом, имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}_{e,i}) = 0; \quad (2)$$

$$m_{e,i}n \left(\frac{\partial \mathbf{V}_{e,i}}{\partial t} + (\mathbf{V}_{e,i} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{e,i} \right) = -\nabla P_{e,i} \mp en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_{e,i}, \mathbf{B}] \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial s_{e,i}}{\partial t} + (\mathbf{V}_{e,i}, \nabla) s_{e,i} = 0. \quad (4)$$

Эти уравнения дополняются уравнениями Максвелла в квазистационарном приближении (опускается ток смещения)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = en(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e). \quad (6)$$

Это совместная, замкнутая система уравнений [8, 9], явно учитывает инерцию электронов, что при не слишком больших концентрациях и больших плотностях электрического тока, характерных для современных токамаков, представляется необходимым.

Стационарные осесимметричные конфигурации. Под равновесной плазменной конфигурацией плазмы в ловушке мы будем понимать стационарные, осесимметричные $\left(\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \right)$ решения системы (2)–(6) с неподвижными ионами $\mathbf{V}_i = 0$. Стандартным образом из (5)–(6) следует, что

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad B_\varphi = \frac{2J}{cr}, \quad (7)$$

$$j_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial J}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial J}{\partial r}, \quad j_\varphi = -\frac{c}{8\pi^2 r} \Delta^* \Psi, \quad \mathbf{V}_e = -\frac{1}{en} \mathbf{j},$$

где $\Psi(r, z)$ — функция магнитного потока, а $J(r, z)$ — функция полного тока

$$\Psi = \int_0^r 2\pi r B_z dr, \quad J = \int_0^r 2\pi r j_z dr. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что для равновесной плазменной конфигурации выполняются соотношения [8]:

$$1) s_e = s_e(J), P_i = P_i(n);$$

2) интеграл углового момента

$$\frac{m_e r j_\varphi}{en} + \frac{e}{2\pi c} (\Psi + \pi r^2 H_z) = -K(J). \quad (9)$$

Здесь $H_z = \text{const}$ внешнее продольное магнитное поле (оно появляется в (9), если в уравнениях движения добавить внешнее поле $H = (0, 0, H_z)$);

3) интеграл Бернулли (интеграл энергии для электронов)

$$\frac{m_e \mathbf{j}^2}{2e^2 n^2} + m_i W_i(n) + m_e W_e = F(J), \quad (10)$$

где $s_e = s_e(J)$, $P_i = P_i(n)$, $K(J)$, $F(J)$ – произвольные функции своего аргумента; $W_i(n)$, $W_e(n, J)$ – энтальпии ионов и электронов.

Используя (9)–(10), можно показать [8, 10], что для осесимметричной равновесной конфигурации система (2)–(6) сводится к двум дифференциальным уравнениям второго порядка относительно функций Ψ , J :

$$\begin{aligned} \Delta^* \Psi - \frac{8\pi^2 e}{cm_e} n \left[\frac{1}{2\pi c} \frac{e}{c} (\Psi + \pi r^2 H_z) + K(J) \right] &= 0, \\ \frac{m_e}{4\pi^2 e^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{rn} \frac{\partial J}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rn} \frac{\partial J}{\partial r} \right) \right] - & \quad (11) \\ -rn \left(\frac{dF}{dJ} - m_e T_e \frac{ds_e}{dJ} \right) - \frac{j_\varphi}{e} \frac{dK}{dJ} - \frac{1}{\pi c^2} \frac{J}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Входящая в эти уравнения концентрация частиц $n(r, z)$ исключается посредством интеграла Бернулли (10), а азимутальная плотность тока посредством интеграла (9). Таким образом, решение уравнений равновесных конфигураций (11) зависит от трех произвольных функций $s_e(J)$, $K(J)$, $F(J)$. Электрическое поле в равновесной конфигурации равно $\mathbf{E} = -\nabla P_i / (en)$.

Для случая идеального политропного электронного газа получим $W_e(n, J) = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)m_e} G_e(J) n^{\gamma-1}$. Считая $P_i(n) = G_i n^\gamma$, $G_i = \text{const}$ получим $W_i(n) = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)m_i} G_i n^{\gamma-1}$. Теперь уравнение для J и закон Бернулли конкретизируются:

$$\begin{aligned} & \frac{m_e}{4\pi^2 e^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{rn} \frac{\partial J}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rn} \frac{\partial J}{\partial r} \right) \right] - \\ & - rn \left(\frac{dF}{dJ} - \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{dG_e}{dJ} \right) - \frac{j_\varphi}{e} \frac{dK}{dJ} - \frac{1}{\pi c^2} \frac{J}{r} = 0, \quad (12) \\ & \frac{\gamma}{(\gamma-1)} (G_i + G_e(J)) n^{\gamma-1} + \frac{m_e}{2e^2} \frac{\mathbf{j}^2}{n^2} = F(J). \end{aligned}$$

Таким образом, закон Бернулли дает алгебраическое уравнение для нахождения n . Если $\gamma = 3$ (ниже ограничимся этим случаем), это уравнение становится биквадратным и дает явное выражение для n :

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - \frac{3m_e}{4\pi^2 e^2 r^2} (G_i + G_e(J)) (\nabla J)^2}}{3(G_i + G_e(J))}, \quad (13) \\ Q &= F(J) - \frac{1}{2m_e r^2} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{e}{c} \Psi + K + \frac{r^2}{2} \frac{e}{c} H_z \right)^2. \end{aligned}$$

Формула (13) дает два выражения для n . Оказывается [8], что в области параметров, отвечающих знаку “+” (“плотная” плазма), система (11) эллиптическая, а для знака “-” (разреженная плазма) — гиперболическая. Проиллюстрировать это обстоятельство можно с помощью гидродинамической аналогии. В [8] показано, что в общем случае, не предполагающем симметрии равновесия, уравнения плазмостатики в двухжидкостной модели совпадают с уравнениями стационарного течения сжимаемого газа в специальном поле сил. Последние же уравнения, как известно, гиперболические для сверхзвуковых течений и эллиптические — для дозвуковых. Мы будем рассматривать здесь только эллиптический случай (знак “+” в формуле (13)).

Краевая задача для тороидальной ловушки. Рассматриваем осесимметричную тороидальную камеру, удерживающую плазму в равновесии. Сечение камеры плоскостью (r, z) имеет вид “треугольника” (рис. 1), на границе которого ставятся следующие условия

$$J \equiv J_0, \quad \Psi \equiv \Psi_0, \quad (14)$$

где J_0, Ψ_0 — константы. Линии $J = \text{const}$ — линии тока электронов в плоскости (r, z) , величина J_0 равна току во внешней тороидальной обмотке. Линии $\Psi = \text{const}$ — линии магнитного поля в плоскости (r, z) , величина Ψ_0 равна потоку магнитного поля через центральное отверстие тора.

Образум теперь новые единицы измерения, используя физические параметры, входящие в постановку задачи. Единицей длины будет расстояние между осью z и камерой L_0 . Магнитное поле будем измерять

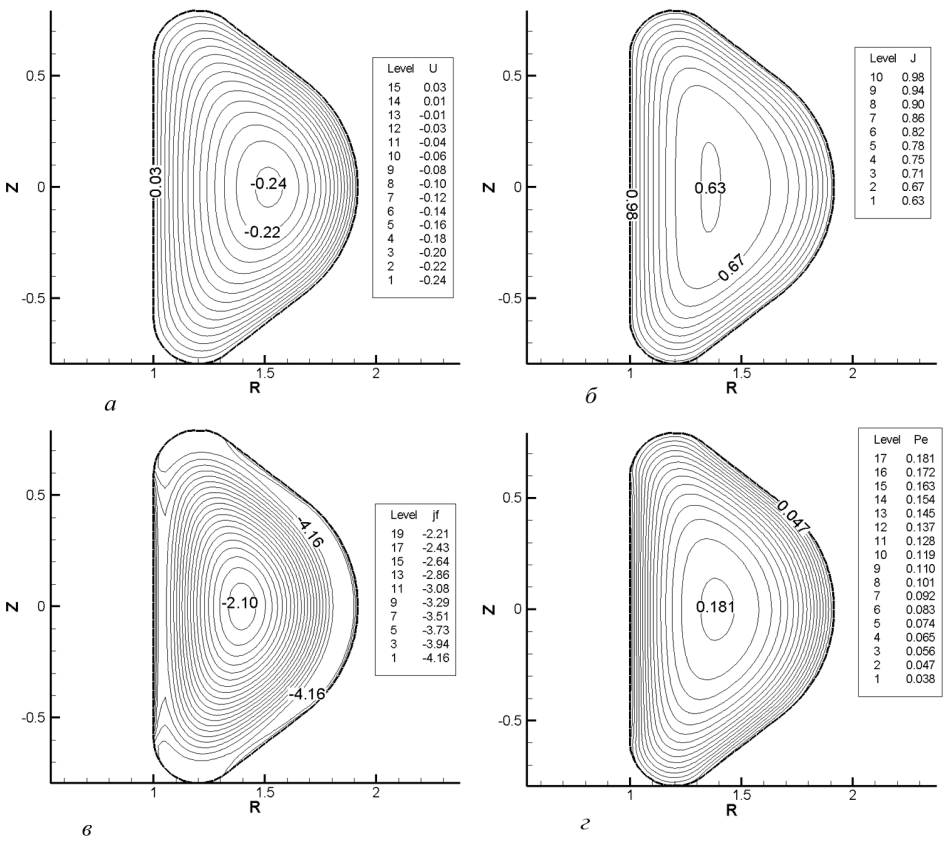


Рис. 1. Линии уровня функций:

$a - \Psi(r, z)$; $б - J(r, z)$; $в - j_\varphi(r, z)$; $г - P_e(r, z)$ для $\xi^2 = 0,025$, $\beta = 6,0$, $\alpha = 0,1$, $\delta = 0,05$, $\eta = 1,0$, $h_z = 0,25$, $p_f = 1,0$, $p_g = 0$, $p_k = 2$

в единицах $B_0 = \frac{2J_0}{cL_0}$. Единицы плотности и температуры образуются из известных характерных значений функций $F(J) = F_0 f(J/J_0)$, $G_e(J) = G_{e0} g(J/J_0)$, $K(J) = K_0 k(J/J_0)$, а именно

$$T_{e0} = F_0/k_B, \quad n_0^2 = \frac{k_B T_{e0}}{G_{e0}}, \quad T_{i0} = \frac{n_0^2 G_{i0}}{k_B},$$

где k_B — постоянная Больцмана.

В новых единицах условия (14) примут вид

$$J \equiv 1, \quad \Psi \equiv \frac{c\Psi_0}{4\pi L_0 J_0} = \delta, \quad (15)$$

а соотношения (9)–(13) запишутся в следующем виде:

$$\xi^2 \frac{r j_\varphi}{n} + \Psi + \alpha k(J) + \frac{r^2}{2} h_z = 0 - \text{интеграл момента,}$$

$$\frac{\xi^2}{\beta} \frac{j^2}{n^2} + \frac{3}{2} (\eta + g(J)) n^2 = f(J) - \text{интеграл Бернулли.}$$

$$\xi^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r A}{\partial r} \right) \right) - \frac{n}{r} \left(rA + \alpha k(J) + \frac{r^2}{2} h_z \right) = 0,$$

$$\Psi = rA,$$

$$\xi^2 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{rn} \frac{\partial J}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rn} \frac{\partial J}{\partial r} \right) \right] - \frac{\beta}{2} rn \left(\frac{df}{dJ} - \frac{1}{2} n^2 \frac{dg(J)}{dJ} \right) - \alpha j_\varphi \frac{dk}{dJ} - \frac{J}{r} = 0, \quad (16)$$

$$q = f(J) - \frac{1}{\xi^2 \beta r^2} \left(\Psi + \alpha k(J) + \frac{r^2}{2} h_z \right)^2,$$

$$n^2 = \frac{q + \sqrt{q^2 - 6 \frac{\xi^2}{\beta r^2} (\eta + g(J)) (\nabla J)^2}}{3(\eta + g(J))}. \quad (17)$$

В новых единицах в задаче появляются следующие безразмерные параметры

$$\xi^2 = \frac{c^2 m_e}{4\pi e^2 L_0^2 n_0}, \quad \beta = \frac{8\pi k_B n_0 T_{e0}}{B_0^2}, \quad \eta = \frac{T_{i0}}{T_{e0}},$$

$$\alpha = \frac{c^2 K_0}{2e L_0 J_0} = \frac{c}{e} \frac{K_0}{B_0 L_0^2}, \quad \delta = \frac{B_{p0}}{B_0}, \quad h_z = \frac{H_z}{B_0} \quad (18)$$

и три произвольные функции $g(J)$, $f(J)$, $k(J)$ с нормировкой $g(1) = f(1) = k(1) = 1$.

Уравнение Грэда–Шафранова получают из уравнений (16) в пределе $\xi^2 \ll 1$. Можно показать [8], что если разложить все функции, входящие в уравнения (16), в ряды по степеням ξ^2 , то нулевые коэффициенты разложений будут удовлетворять уравнению Грэда – Шафранова. Поскольку параметр ξ^2 в систему (16) входит сингулярно – стоит при старших производных, то уравнения Грэда–Шафранова не только предельный, но и вырожденный случай уравнений в двухжидкостном приближении.

Требование положительности плотности в (17) позволяет легко получить необходимое условие существования решения уравнений (16). Из положительности величины q следует следующее ограничение на параметры

$$\xi^2 \beta > \max \left\{ \frac{\left(\alpha + \delta + \frac{r_{\min}^2}{2} h_z \right)^2}{r_{\min}^2}, \frac{\left(\alpha + \delta + \frac{r_{\max}^2}{2} h_z \right)^2}{r_{\max}^2} \right\}. \quad (19)$$

При $h_z = 0$ получим в частности $\xi^2 \beta > (\alpha + \delta)^2$.

Результаты расчетов. В настоящее время существует много действующих установок-токамаков. Их параметры (геометрические размеры, величины полей и токов) могут различаться весьма значительно. Целью первых расчетов в новой модели равновесных конфигураций было, прежде всего, желание убедиться, что уравнения (16) имеют решения, в которых есть удержание плазмы. Под удержанием плазмы мы будем здесь понимать такое решение, при котором давление плазмы максимально где-то в центральной области камеры и имеет меньшие значения вблизи ее границы. Какой-либо точной привязки к конкретной установке и соответствующим параметрам (геометрия, ток в обмотке, магнитное поле, давление и т.д.) не проводилось. В расчетах следующим образом выбирались функции $f(J)$, $g(J)$, $k(J)$

$$\begin{aligned} f(J) &= 1 + p_f(1 - J)^4, & g(J) &= 1 + p_g(1 - J)^4, \\ k(J) &= 1 + p_k(1 - J)^4, \end{aligned} \quad (20)$$

где p_f , p_g , p_k — постоянные.

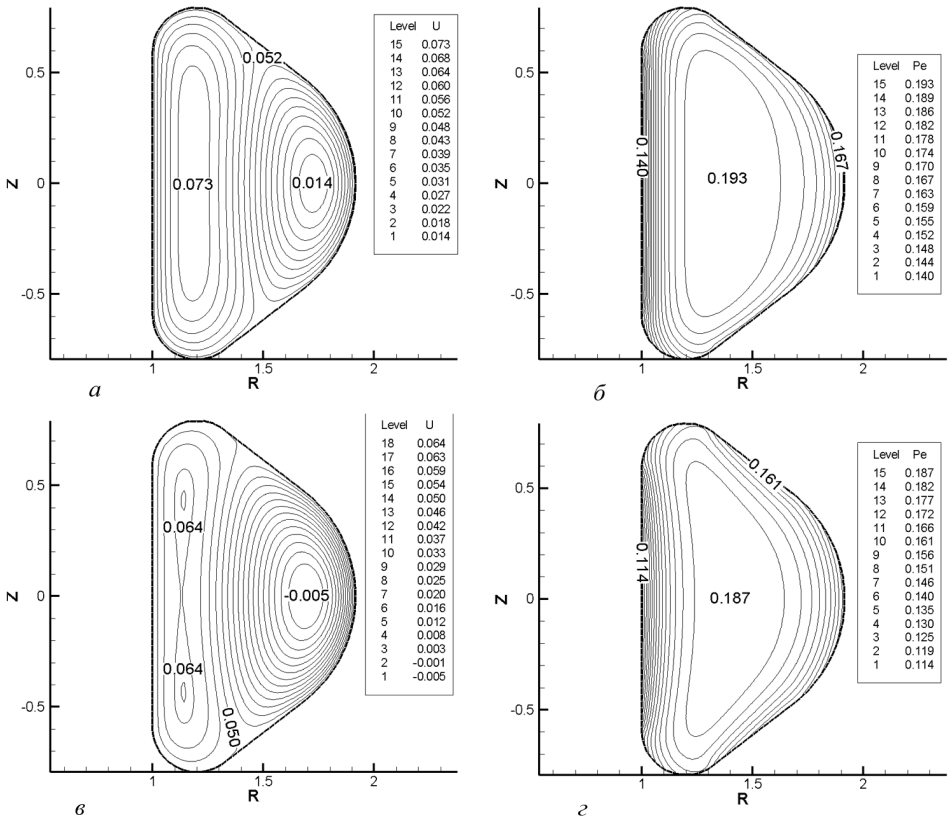


Рис. 2. Линии уровня функций:

$a - \Psi(r, z)$; $б - P_e(r, z)$ для $\xi^2 = 0, 025$, $\beta = 6, 0$, $\alpha = -0, 3$, $\delta = 0, 05$, $\eta = 1, 0$, $h_z = 0, 25$, $p_f = 6, 0$, $p_g = 0$, $p_k = 6$; $в - \Psi(r, z)$; $г - P_e(r, z)$ для $\xi^2 = 0, 025$, $\beta = 6, 0$, $\alpha = -0, 3$, $\delta = 0, 05$, $\eta = 1, 0$, $h_z = 0, 28$, $p_f = 0$, $p_g = 0$, $p_k = 0$

На рис. 1 даны распределения по сечению ловушки основных величин определяющих характер решения при следующих значениях параметров $\xi^2 = 0,025$, $\beta = 6,0$, $\alpha = 0,1$, $\delta = 0,05$, $\eta = 1,0$, $h_z = 0,25$, $p_f = 1,0$, $p_g = 0$, $p_k = 2,0$. Это один из вариантов расчетов, при которых наблюдается удержание плазмы. В двухжидкостной модели равновесия линии уровня функций Ψ , J , P_e , вообще говоря, не совпадают, как для уравнения Грэда–Шафранова. На рис. 1 видно, что тороидальный ток имеет наибольшие значения на периферии плазмы, а давление максимально в центральной области.

Для получения такого рода режимов параметры задачи должны подбираться довольно тщательно. В частности большое значение имеет параметр h_z . Меняя его можно “двигать” конфигурацию вдоль радиального направления. Роль других параметров еще подлежит изучению.

На рис. 2 представлены два варианта расчетов, в которых удержания нет, и появляются более сложные картины геометрии полоидального магнитного поля (появление нескольких магнитных осей).

Вычисления велись методом конечных элементов второго порядка, на треугольной сетке.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00071.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К а д о м ц е в Б. Б. Основы физики плазмы токамаков, Итоги науки и техники // Физика плазмы. Т. 10, Ч. 1. М.: ВИНТИ, 1990. С. 1–148.
2. W e s s o n J., Tokamaks. Oxford: Oxford University Press, 2004. 755 p.
3. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
4. Ш а ф р а н о в В. Д. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. Вып. 2. М.: Атомиздат, 1963. С. 92–131.
5. Б р а г и н с к и й С. И. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1963. С. 183–272.
6. К а д о м ц е в Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 304 с.
7. М о р о з о в А. И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006. 576 с.
8. G a v r i k o v M. B., S a v e l y e v V. V. Equilibrium configuration of plasma in the approximation of two-fluid magnetohydrodynamics // Journal of Mathematical Sciences. 2009. V. 168, No. 1. P. 1–40.
9. Г а в р и к о в М. Б., С а в е л ь е в В. В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 2. С. 176–192.
10. Г а в р и к о в М. Б., С а в е л ь е в В. В. Стационарные конфигурации плазмы в приближении двухжидкостной магнитной гидродинамики // Тезисы 39 Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС. Звенигород, 2012. С. 44.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012