УДК 539.3

Теория устойчивости пластин, основанная на асимптотическом анализе уравнений теории устойчивости трехмерных упругих сред

© Ю.И. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработана теория упругой устойчивости тонких многослойных пластин, построенная на общих уравнениях трехмерной теории устойчивости упругих сред путем введения асимптотических разложений по малому геометрическому параметру — отношению толщины пластины к ее длине — без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине пластины. Сформулированы локальные задачи теории устойчивости, получены осредненные уравнения равновесия для пластины в основном и варьируемом состояниях. Найдено решение локальных задач в явном аналитическом виде, с помощью которого определены соотношения для всех шести компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига в основном и варьируемом состояниях пластины. Показано, что осредненные уравнения устойчивости теории пластин отличаются от классических уравнений теории пластин Кирхгофа — Лява и Тимошенко как выражением поперечной силы, вызванной поворотом пластины при действии напряжений основного состояния, так и определяющими соотношениями пластины, содержащими члены, обусловленные ее основным напряженным состоянием. Показано, что для ортотропных пластин определяющие соотношения упрощаются и формально становятся подобными классическим соотношениям теории тонких пластин, но мембранные и изгибные жесткости пластины зависят от напряжений основного состояния. Приведен пример расчета тонкой ортотропной пластины при одноосном сжатии. Получено выражение для критической силы потери устойчивости, отличающееся от классической формулы Эйлера выражением для изгибной жесткости, которая зависит от параметров основного состояния пластины. Различие значений критической силы наиболее существенно для пластины с анизотропными слоями.

Ключевые слова: *теория устойчивости пластин, трехмерная теория устойчивости, тонкие многослойные пластины, ортотропные пластины, асимптотическое разложение.*

Введение. Расчет тонкостенных конструкций на устойчивость является, как правило, одним из основных расчетных случаев при проектировании различных изделий авиационной, ракетной, судостроительной и строительной отраслей промышленности [1–3]. Несмотря на то что классические теории устойчивости конструкций, основанные на теориях пластин и оболочек Кирхгофа — Лява и Тимошенко, применяются достаточно давно, известно, что значения критических нагрузок, получаемые в соответствии с этими теориями, часто оказываются существенно завышенными. Особенно для конструкций из композиционных материалов, для которых существенными являются деформации межслойного сдвига, влияющие на значения критических нагрузок [4, 5]. Различные подходы к построению уточненной теории устойчивости изучаются во многих работах [6–8]. Однако они, как правило, основаны на определенных допущениях относительно характера распределения напряжений, деформаций и перемещений по толщине конструкции, а также на учете нелинейных эффектов деформирования. В работах [9–11] из фундаментальных соотношений нелинейной теории упругости и конечных деформаций были получены общие уравнения трехмерной линейной теории устойчивости. Эти уравнения использовались для вывода уравнений теории устойчивости пластин Тимошенко [11]. В настоящее время активно развивается асимптотическая теория тонких многослойных пластин [12–18], вывод основных уравнений которой основан только на анализе асимптотических разложений исходных трехмерных уравнений по малому геометрическому параметру, представляющему собой отношение толщины пластины к ее длине.

Целью данной работы является построение теории устойчивости тонких пластин на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений теории упругости и трехмерной теории устойчивости без введения каких-либо допущений относительно характера перемещений и напряжений.

Уравнения трехмерной теории устойчивости в произвольном базисе. В соответствии с трехмерной теорией устойчивости [10, 19] рассматриваются основное (устойчивое) и варьированное состояния пластины как области трехмерного евклидова пространства при воздействии заданной системы нагрузок. Для основного (устойчивого) состояния пластины трехмерная задача линейной теории упругости состоит из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешней и внутренней поверхностях пластины $\Sigma_{\pm}$, на которых задано давление $\tilde{p}_{\pm}$, граничных условий на частях торцевой поверхности Σ_T и Σ_σ с заданными векторами перемещений $\mathbf{u}_{ei}$ и усилий $\tilde{\mathbf{S}}_j^0$, а также граничных условий идеального контакта на поверхности контакта Σ_S отдельных слоев пластины ($[u_i]$ — скачок функций), которые могут и отсутствовать, например, для однослойной пластины:

$$\sigma^0_{ij,j} = 0;\;\; \varepsilon^0_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right);\;\; \sigma^0_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon^0_{kl};$$

$$\Sigma_S : n_i[\sigma^0_{ij}] = 0;\;\; [u_i] = 0; \tag{1}$$

$$\Sigma_\sigma : n_i\sigma^0_{ij} = \tilde{S}^0_j;\qquad \Sigma_{3\pm} : \sigma^0_{i3} = -\tilde{p}_{\pm}\delta_{i3};\qquad \Sigma_T : u_i = u_{ei},$$

где σ_{ij}^0, ε_{kl}^0, u_i — компоненты тензора напряжений, тензора малых деформаций и вектора перемещений соответственно; $u_{\alpha,\beta} = \partial u_\alpha / \partial X^\beta$ — оператор дифференцирования; X^β — декартовы координаты; C_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости пластины, который зависит от координат X^β. Здесь и далее по латинским индексам $i, j, k, \ldots$ идет суммирование от 1 до 3, по греческим индексам $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ суммирования нет, индексы α, β, γ образуют четную подстановку, по заглавным индексам I, J, K суммирование идет от 1 до 2.

Для варьированного состояния задача трехмерной теории устойчивости имеет вид [10, 19]

$$\sigma_{ij,i} - \in_{jmk} B_{im}\sigma_{ik}^0 = 0; \;\; B_{im} = \omega_{m,i}; \;\; \omega_i = \frac{1}{2} \in_{imk} w_{m,k};$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(w_{i,j} + w_{j,i}\right); \;\; \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}; \tag{2}$$

$$\Sigma_\sigma : n_i(\sigma_{ij} - \in_{jmk} \sigma_{ik}^0 \, \omega_m) = 0, \;\; \Sigma_{3\pm} : n_i(\sigma_{ij} - \in_{jmk} \sigma_{ik}^0 \, \omega_m) = 0; \;\; \Sigma_T : w_i = 0.$$

Здесь σ_{ij}, ε_{kl}, $\in_{\alpha mk}$, w_i, n_i и ω_γ — компоненты тензоров напряжений, малых деформаций, тензора Леви — Чивиты [20], компоненты векторов перемещений, нормали и поворота соответственно.

Асимптотические решения уравнений равновесия и устойчивости тонких пластин. Рассмотрим уравнения равновесия (1) и устойчивости (2) плоской пластины, срединная поверхность которой в декартовых координатах имеет вид $X^3 = 0$, а внешняя и внутренняя поверхности $\Sigma_{3\pm}$ описываются уравнениями $X^3 = \pm h/2$, где h — толщина пластины.

Будем полагать, что рассматриваемая пластина является тонкой и для нее можно ввести малый параметр $\kappa = h/L << 1$ — отношение общей толщины пластины h к характерному размеру всей пластины, например к ее максимальной длине L. Введем безразмерные глобальные x_k и локальную ξ координаты:

$$x_k = X^k / L; \;\; \xi = X^3/\kappa, \; k = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Координаты x_3 и ξ в методе асимптотического осреднения рассматриваются как независимые переменные. Координата ξ по толщине пластины изменяется в диапазоне $-0,5 < \xi < 0,5$.

Примем основное допущение, что компоненты вектора усилий $\tilde{\mathbf{S}}_j^0$ и давление $\tilde{p}_\pm$ на внешней и внутренней поверхностях пластины имеют порядок малости $O(\kappa^3)$, т. е.

$$\tilde{p}_\pm = \kappa^3 p_\pm; \;\; \tilde{S}_j^0 = \kappa^3 S_j^0. \tag{4}$$

Допущение (4), как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин. В уравнениях (1) и (2) компоненты тензора модулей упругости $C_{ijkl}(\xi)$ будем считать зависящими от координаты ξ, так как этот тензор различен для разных слоев пластины.

Решение задачи (1) для основного состояния, следуя работам [12–15], будем искать в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)}\left(x_I\right) + \kappa u_k^{(1)}\left(x_I, \xi\right) + \kappa^2 u_k^{(2)}\left(x_I, \xi\right) + \kappa^3 u_k^{(3)}\left(x_I, \xi\right) + \ldots \tag{5}$$

Аналогично в виде асимптотического разложения найдем перемещения в варьированном состоянии:

$$w_k = w_k^{(0)}\left(x_I\right) + \kappa w_k^{(1)}\left(x_I, \xi\right) + \kappa^2 w_k^{(2)}\left(x_I, \xi\right) + \kappa^3 w_k^{(3)}\left(x_I, \xi\right) + \ldots, \;\; k = 1,\, 2,\, 3. \tag{6}$$

Подставив разложения (5) в соотношения Коши в системе уравнений (1), используя при этом правила дифференцирования функций локальных координат $\left(\partial/\partial X^j \to \partial/\partial x_j + (1/\kappa)\delta_{j3}\partial/\partial\xi\right)$, получаем асимптотические разложения для деформаций:

$$\varepsilon^0{}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{0(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{0(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{0(2)} + \ldots. \tag{7}$$

При этом

$$\varepsilon_{IJ}^{0(0)} = \frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}\right); \;\; \varepsilon_{I3}^{0(0)} = \frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(1)}\right); \;\; \varepsilon_{33}^{0(0)} = u_{3/3}^{(1)};$$

$$\varepsilon_{IJ}^{0(1)} = \frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}\right); \;\; \varepsilon_{I3}^{0(1)} = \frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}\right); \;\; \varepsilon_{33}^{0(1)} = u_{3/3}^{(2)}; \tag{8}$$

$$\varepsilon_{IJ}^{0(2)} = \frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}\right); \;\; \varepsilon_{I3}^{0(2)} = \frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(3)}\right); \;\; \varepsilon_{33}^{0(2)} = u_{3/3}^{(3)} \text{ и т.д.}$$

Здесь $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial\xi$, $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial x_j$ — производные по локальной координате и по глобальным координатам.

Запишем аналогичные выражения для деформаций в варьированном состоянии:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(w_{I,J}^{(0)} + w_{J,I}^{(0)}\right);\ \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,I}^{(0)} + w_{I/3}^{(1)}\right);\ \varepsilon_{33}^{(0)} = w_{3/3}^{(1)};\\
\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(w_{I,J}^{(1)} + w_{J,I}^{(1)}\right);\ \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,I}^{(1)} + w_{I/3}^{(2)}\right);\ \varepsilon_{33}^{(1)} = w_{3/3}^{(2)};\\
\varepsilon_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(w_{I,J}^{(2)} + w_{J,I}^{(2)}\right);\ \varepsilon_{I3}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,I}^{(2)} + w_{I/3}^{(3)}\right);\ \varepsilon_{33}^{(2)} = w_{3/3}^{(3)} \text{ и т.д.}
\end{gathered} \tag{10}$$

Аналогично получаем выражения для компонент ω_α сопутствующего вектора:

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha^{(0)} + \kappa\omega_\alpha^{(1)} + \kappa^2\omega_\alpha^{(2)} + \kappa^3\omega_\alpha^{(3)}\ldots. \tag{11}$$

В выражениях (11)

$$\begin{gathered}
\omega_1^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(w_{3,2}^{(0)} - w_{2/3}^{(1)}\right);\ \omega_2^{(0)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,1}^{(0)} - w_{1/3}^{(1)}\right);\ \omega_3^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(w_{2,1}^{(0)} - w_{1,2}^{(0)}\right);\\
\omega_1^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(w_{3,2}^{(1)} - w_{2/3}^{(2)}\right);\ \omega_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,1}^{(1)} - w_{1/3}^{(2)}\right);\ \omega_3^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(w_{2,1}^{(1)} - w_{1,2}^{(1)}\right);\\
\omega_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(w_{3,2}^{(2)} - w_{2/3}^{(3)}\right);\ \omega_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,1}^{(2)} - w_{1/3}^{(3)}\right);\ \omega_3^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(w_{2,1}^{(2)} - w_{1,2}^{(2)}\right);\\
\omega_1^{(3)} = -\frac{1}{2}\left(w_{3,2}^{(3)} - w_{2/3}^{(4)}\right);\ \omega_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,1}^{(3)} - w_{1/3}^{(4)}\right);\ \omega_3^{(3)} = -\frac{1}{2}\left(w_{2,1}^{(3)} - w_{1,2}^{(3)}\right).
\end{gathered} \tag{12}$$

Вычислим далее компоненты тензора — градиента от сопутствующего вектора:

$$B_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta,\alpha} = \frac{1}{\kappa}B_{\alpha\beta}^{(-1)} + B_{\alpha\beta}^{(0)} + \kappa B_{\alpha\beta}^{(1)} + \kappa^2 B_{\alpha\beta}^{(2)} + \kappa^3 B_{\alpha\beta}^{(3)} + \ldots, \tag{13}$$

где

$$B_{31}^{(-1)} = \frac{1}{2}\left(w_{2/33}^{(1)}\right);\ B_{32}^{(-1)} = -\frac{1}{2}\left(w_{1/33}^{(1)}\right),\ \text{остальные } B_{im}^{(-1)} = 0;$$

$$\begin{gathered}
B_{11}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(w_{3,21}^{(0)} - w_{2/3,1}^{(1)}\right);\ B_{12}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,11}^{(0)} - w_{1/3,1}^{(1)}\right);\\
B_{13}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(w_{2,11}^{(0)} - w_{1,21}^{(0)}\right);\ B_{21}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(w_{3,22}^{(0)} - w_{2/3,2}^{(1)}\right);\\
B_{22}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,12}^{(0)} - w_{1/3,2}^{(1)}\right);\ B_{23}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(w_{2,12}^{(0)} - w_{1,22}^{(0)}\right);
\end{gathered} \tag{14}$$

$$B_{31}^{(0)}=-\frac{1}{2}\left(w_{3,2/3}^{(1)}-w_{2/33}^{(2)}\right);\ B_{32}^{(0)}=\frac{1}{2}\left(w_{3,1/3}^{(1)}-w_{1/33}^{(2)}\right);$$

$$B_{33}^{(0)}=-\frac{1}{2}\left(w_{2,1/3}^{(1)}-w_{1,2/3}^{(1)}\right);\ B_{11}^{(1)}=-\frac{1}{2}\left(w_{3,21}^{(1)}-w_{2/3,1}^{(2)}\right);$$

$$B_{12}^{(1)}=\frac{1}{2}\left(w_{3,11}^{(1)}-w_{1/3,1}^{(2)}\right);\ B_{13}^{(1)}=-\frac{1}{2}\left(w_{2,11}^{(1)}-w_{1,21}^{(1)}\right);\tag{14}$$

$$B_{21}^{(1)}=-\frac{1}{2}\left(w_{3,22}^{(1)}-w_{2/3,2}^{(2)}\right);\ B_{22}^{(1)}=\frac{1}{2}\left(w_{3,12}^{(1)}-w_{1/3,2}^{(2)}\right);$$

$$B_{23}^{(1)}=-\frac{1}{2}\left(w_{2,12}^{(1)}-w_{2,22}^{(1)}\right);\ B_{31}^{(1)}=-\frac{1}{2}\left(w_{3,2/3}^{(2)}-w_{2/33}^{(3)}\right);$$

$$B_{32}^{(1)}=\frac{1}{2}\left(w_{3,1/3}^{(2)}-w_{1/33}^{(3)}\right);\ B_{33}^{(1)}=-\frac{1}{2}\left(w_{2,1/3}^{(2)}-w_{1/3,2}^{(2)}\right)\qquad \text{и}\qquad \text{т.д.}$$

Подставляя выражение (7) в закон Гука в системе уравнений (2), получаем асимптотическое разложение для напряжений:

$$\sigma^0{}_{ij}=\sigma_{ij}^{0(0)}+\kappa\sigma_{ij}^{0(1)}+\kappa^2\sigma_{ij}^{0(2)}+\ldots,\tag{15}$$

где

$$\sigma_{IJ}^{0(0)}=C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{0(0)}+C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{0(0)};\ \ \sigma_{i3}^{0(0)}=C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{0(0)}+C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{0(0)};$$

$$\sigma_{IJ}^{0(1)}=C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{0(1)}+C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{0(1)};\ \ \sigma_{i3}^{0(1)}=C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{0(1)}+C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{0(1)};\tag{16}$$

$$\sigma_{IJ}^{0(2)}=C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{0(2)}+C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{0(2)};\ \ \sigma_{i3}^{0(2)}=C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{0(2)}+C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{0(2)}\ \text{и т.д.}$$

Подставляя выражение (9) в закон Гука в системе уравнений (2), получаем асимптотическое разложение для напряжений в варьированном состоянии:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(0)}+\kappa\sigma_{ij}^{(1)}+\kappa^2\sigma_{ij}^{(2)}+\ldots,\tag{17}$$

где

$$\sigma_{IJ}^{(0)}=C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)}+C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(0)};\ \ \sigma_{i3}^{(0)}=C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)}+C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)};$$

$$\sigma_{IJ}^{(1)}=C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(1)}+C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(1)};\ \ \sigma_{i3}^{(1)}=C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)}+C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(1)};\tag{18}$$

$$\sigma_{IJ}^{(2)}=C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(2)}+C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(2)};\ \ \sigma_{i3}^{(2)}=C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(2)}+C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(2)}\ \text{и т. д.}$$

Формулировка локальных задач для основного состояния пластины. Подставляя разложения для перемещений (5), деформаций (8) и напряжений (15) в уравнения равновесия (1), получаем их асимптотическое разложение:

$$\frac{1}{\kappa}\sigma^{0(0)}_{i3/3}+\left(\sigma^{0(0)}_{iJ,J}+\sigma^{0(1)}_{i3/3}\right)+\kappa\left(\sigma^{0(1)}_{iJ,J}+\sigma^{0(2)}_{i3/3}\right)+\kappa^2\left(\sigma^{0(2)}_{iJ,J}+\sigma^{0(3)}_{i3/3}\right)+\ldots=0;$$

$$\Sigma_{3\pm}:\sigma^{0(0)}_{i3}+\kappa\sigma^{0(1)}_{i3}+\kappa^2\sigma^{0(2)}_{i3}+\ldots=-\kappa^3 p_{\pm}\delta_{i3}; \tag{19}$$

$$\Sigma_T:u_i=u_i^{(0)}+\kappa u_i^{(1)}+\kappa^2 u_i^{(2)}+\kappa^3 u_i^{(3)}+\ldots=u_{ei}.$$

Приравнивая в уравнениях равновесия члены при κ^{-1} к нулю, а при остальных степенях κ — к некоторым величинам $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$, не зависящим от ξ_I, получаем рекуррентную последовательность локальных задач. Задача для нулевого приближения имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma^{0(0)}_{i3/3}=0;\\ \sigma^{0(0)}_{i3}=C_{i3KL}\varepsilon^{0(0)}_{KL}+C_{i3k3}\varepsilon^{0(0)}_{k3};\qquad \sigma^{0(0)}_{IJ}=C_{IJKL}\varepsilon^{0(0)}_{KL}+C_{IJk3}\varepsilon^{0(0)}_{k3};\\ \varepsilon^{0(0)}_{IJ}=\frac{1}{2}\left(u^{(0)}_{I,J}+u^{(0)}_{J,I}\right);\qquad \varepsilon^{0(0)}_{I3}=\frac{1}{2}\left(u^{(0)}_{3,I}+u^{(1)}_{I/3}\right);\qquad \varepsilon^{0(0)}_{33}=u^{(1)}_{3/3};\\ \Sigma_{3\pm}:\sigma^{0(0)}_{i3}=0;\qquad \Sigma_S:[\sigma^{0(0)}_{i3}]=0;\qquad [u_i^{(1)}]=0;\qquad <u_i^{(1)}>=0.\end{gathered} \tag{20}$$

Для первого приближения

$$\begin{gathered}\sigma^{0(1)}_{i3/3}+\sigma^{0(0)}_{iJ,J}=h_i^{0(0)};\\ \sigma^{0(1)}_{i3}=C_{i3KL}\varepsilon^{0(1)}_{KL}+C_{i3k3}\varepsilon^{0(1)}_{k3};\qquad \sigma^{0(1)}_{IJ}=C_{IJKL}\varepsilon^{0(1)}_{KL}+C_{IJk3}\varepsilon^{0(1)}_{k3};\\ \varepsilon^{0(1)}_{IJ}=\frac{1}{2}\left(u^{(1)}_{I,J}+u^{(1)}_{J,I}\right);\qquad \varepsilon^{0(1)}_{I3}=\frac{1}{2}\left(u^{(1)}_{3,I}+u^{(2)}_{I/3}\right);\qquad \varepsilon^{0(1)}_{33}=u^{(2)}_{3/3};\\ \Sigma_{3\pm}:\sigma^{0(1)}_{i3}=0;\qquad \Sigma_S:[\sigma^{(1)}_{i3}]=0;\qquad [u_i^{(2)}]=0;\qquad <u_i^{(2)}>=0.\end{gathered} \tag{21}$$

Для второго приближения

$$\begin{gathered}\sigma^{0(2)}_{i3/3}+\sigma^{0(1)}_{iJ,J}=h_i^{0(1)};\\ \sigma^{0(2)}_{i3}=C_{i3KL}\varepsilon^{0(2)}_{KL}+C_{i3k3}\varepsilon^{0(2)}_{k3};\qquad \sigma^{0(2)}_{IJ}=C_{IJKL}\varepsilon^{0(2)}_{KL}+C_{IJk3}\varepsilon^{0(2)}_{k3};\\ \varepsilon^{0(2)}_{IJ}=\frac{1}{2}\left(u^{(2)}_{I,J}+u^{(2)}_{J,I}\right);\qquad \varepsilon^{0(2)}_{I3}=\frac{1}{2}\left(u^{(2)}_{3,I}+u^{(3)}_{I/3}\right);\qquad \varepsilon^{0(2)}_{33}=u^{(3)}_{3/3};\\ \Sigma_{3\pm}:\sigma^{0(2)}_{i3}=0;\qquad \Sigma_S:[\sigma^{0(2)}_{i3}]=0;\qquad [u_i^{(3)}]=0;\qquad <u_i^{(3)}>=0.\end{gathered} \tag{22}$$

Для третьего приближения

$$\begin{gathered}\sigma^{0(3)}_{i3/3}+\sigma^{0(2)}_{iJ,J}=h_i^{0(2)};\\ \sigma^{0(3)}_{i3}=C_{i3KL}\varepsilon^{0(3)}_{KL}+C_{i3k3}\varepsilon^{0(3)}_{k3};\qquad \sigma^{0(3)}_{IJ}=C_{IJKL}\varepsilon^{0(3)}_{KL}+C_{IJk3}\varepsilon^{0(3)}_{k3};\end{gathered} \tag{23}$$

$$\varepsilon_{IJ}^{0(3)}=\frac{1}{2}\left(u_{I,J}^{(3)}+u_{J,I}^{(2)}\right);\qquad \varepsilon_{I3}^{0(3)}=\frac{1}{2}\left(u_{3,I}^{(3)}+u_{I/3}^{(4)}\right);$$

$$\varepsilon_{33}^{0(3)}=u_{3/3}^{(4)};\quad \Sigma_{3\pm}:\sigma_{i3}^{0(3)}=-p_{\pm}\delta_{i3};\qquad \Sigma_S:[\sigma_{i3}^{0(3)}]=0;\tag{23}$$

$$[u_i^{(4)}]=0;\qquad <u_i^{(4)}>=0\quad \text{и т. д.}$$

Операция осреднения по толщине пластины

$$<u_i^{(1)}>=\int_{-0,5}^{0,5}u_i^{(3)}d\xi.\tag{24}$$

Уравнения равновесия (1) после введения функций $h_i^{0(0)}$, $h_i^{0(1)}$ и $h_i^{0(2)}$ принимают вид

$$h_i^{0(0)}+\kappa h_i^{0(1)}+\kappa^2 h_i^{0(2)}+\ldots=0.\tag{25}$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (20) являются функции $u_j^{(1)},\varepsilon_{kl}^{0(0)}$ и $\sigma_{ij}^{0(0)}$, зависящие от локальной координаты ξ и входных данных этой задачи — перемещений $u_j^{(0)}\left(x_J\right)$. Решением задачи (21) являются функции $u_j^{(2)},\varepsilon_{kl}^{0(1)}$ и $\sigma_{ij}^{0(1)}$, где $u_j^{(1)},\sigma_{ij}^{0(0)}$ — входные данные. В задаче (22) функции $u_j^{(3)},\varepsilon_{kl}^{0(2)},\sigma_{ij}^{0(2)}$ — неизвестные, $u_j^{(2)},\varepsilon_{kl}^{0(1)},\sigma_{ij}^{0(1)}$ — входные данные и т. д.

Функции $h_i^{0(0)},h_i^{0(1)}$ и $h_i^{0(2)}$ находим из условия существования решений локальных задач (20)–(23) [12]:

$$h_i^{0(0)}=<\sigma_{iJ,J}^{0(0)}>;$$

$$h_i^{0(1)}=<\sigma_{iJ,J}^{0(1)}>;\tag{26}$$

$$h_i^{0(2)}=<\sigma_{iJ,J}^{0(2)}>-\Delta p\delta_{i3},\qquad \Delta p=p_+-p_-.$$

Формулировка локальных задач для варьированного состояния пластины. Подставив в уравнения устойчивости (2) асимптотические разложения (13), (15) и (17), получим

$$\frac{1}{\kappa}\sigma_{i3/3}^{(0)}+\left(\sigma_{iJ,J}^{(0)}+\sigma_{i3/3}^{(1)}\right)+\kappa\left(\sigma_{iJ,J}^{(1)}+\sigma_{i3/3}^{(2)}\right)+\kappa^2\left(\sigma_{iJ,J}^{(2)}+\sigma_{i3/3}^{(3)}\right)+\ldots-$$

$$-\frac{1}{\kappa}\in_{imk}B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(0)}-\in_{imk}\left(B_{jm}^{(0)}\sigma_{jk}^{0(0)}+B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(1)}\right)-$$

$$\kappa\in_{imk}\left(B_{jm}^{(1)}\sigma_{jk}^{0(0)}+B_{jm}^{(0)}\sigma_{jk}^{0(1)}+B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(2)}\right)-\ldots=0.\tag{27}$$

Собирая члены при одинаковых степенях κ и приравнивая их к константам $h_i^{(-1)} = 0, h_i^{(0)}, h_i^{(1)},$ получаем вместо (27)

$$h_i^{(0)} + \kappa h_i^{(1)} + ... = 0, \tag{28}$$

а также последовательность локальных задач устойчивости.

Локальная задача устойчивости для нулевого приближения имеет вид

$$\begin{gathered}
\sigma_{3i/3}^{(0)} - \in_{imk} B_{jm}^{(-1)} \sigma_{jk}^{0(0)} = 0; \\
\sigma_{3k}^{(0)} = C_{3jKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3jk3}\varepsilon_{k3}^{(0)}; \qquad \sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(0)}; \\
\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(w_{I,J}^{(0)} + w_{J,I}^{(0)}\right); \qquad \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,I}^{(0)} + w_{I/3}^{(1)}\right); \qquad \varepsilon_{33}^{(0)} = w_{3/3}^{(1)}; \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{3j}^{(0)} = 0; \qquad \Sigma_S : [\sigma_{3k}^{(0)}] = 0; \qquad [w_i^{(1)}] = 0; \qquad < w_i^{(1)} > = 0.
\end{gathered} \tag{29}$$

Для первого приближения

$$\begin{gathered}
\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \sigma_{3i/3}^{(1)} - \in_{imk} \left(B_{jm}^{(0)} \sigma_{jk}^{0(0)} + B_{jm}^{(-1)} \sigma_{jk}^{0(1)}\right) = h_i^{(0)}; \\
\sigma_{3k}^{(1)} = C_{3jKL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{3jk3}\varepsilon_{k3}^{(1)}; \qquad \sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(1)}; \\
\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(w_{I,J}^{(1)} + w_{J,I}^{(1)}\right); \qquad \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,I}^{(1)} + w_{I/3}^{(2)}\right); \qquad \varepsilon_{33}^{(1)} = w_{3/3}^{(2)}; \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{3j}^{(1)} = 0; \qquad \Sigma_S : [\sigma_{3k}^{(1)}] = 0; \qquad [w_i^{(2)}] = 0; \qquad < w_i^{(2)} > = 0.
\end{gathered} \tag{30}$$

Для второго приближения

$$\begin{gathered}
\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \sigma_{3i/3}^{(2)} - \in_{imk} \left(B_{jm}^{(1)} \sigma_{jk}^{0(0)} + B_{jm}^{(0)} \sigma_{jk}^{0(1)} + B_{jm}^{(-1)} \sigma_{jk}^{0(2)}\right) = h_i^{(1)}; \\
\sigma_{3k}^{(2)} = C_{3jKL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{3jk3}\varepsilon_{k3}^{(2)}; \qquad \sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(2)}; \\
\varepsilon_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(w_{I,J}^{(2)} + w_{J,I}^{(2)}\right); \qquad \varepsilon_{I3}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(w_{3,I}^{(2)} + w_{I/3}^{(3)}\right); \qquad \varepsilon_{33}^{(2)} = w_{3/3}^{(3)}; \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{3j}^{(2)} = 0; \qquad \Sigma_S : [\sigma_{3k}^{(2)}] = 0; \qquad [w_i^{(3)}] = 0; \qquad < w_i^{(3)} > = 0.
\end{gathered} \tag{31}$$

Для более высоких приближений постановки локальных задач устойчивости аналогичны.

Из условия существования решения уравнений устойчивости первого и второго приближений получаем выражения для функций:

$$\begin{gathered}
h_i^{(0)} = < \sigma_{iJ,J}^{(0)} > - \in_{imk} \left(< B_{jm}^{(0)} \sigma_{jk}^{0(0)} > + < B_{jm}^{(-1)} \sigma_{jk}^{0(1)} >\right); \\
h_i^{(1)} = < \sigma_{iJ,J}^{(1)} > - \in_{imk} \left(< B_{jm}^{(1)} \sigma_{jk}^{0(0)} > + < B_{jm}^{(0)} \sigma_{jk}^{0(1)} > + < B_{jm}^{(-1)} \sigma_{jk}^{0(2)} >\right).
\end{gathered} \tag{32}$$

Решение локальных задач нулевого приближения. Поскольку задачи (29)–(31) являются одномерными по локальной переменной ξ, их решение можно найти аналитически [15]:

$$u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)} + 2S_{IKL}\varepsilon_{KL}^{0(0)};\ u_3^{(1)} = S_{KL}\varepsilon_{KL}^{0(0)};$$
$$\sigma_{IJ}^{0(0)} = C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{0(0)};\ \sigma_{i3}^{0(0)} = 0, \tag{33}$$

где функции от ξ имеют вид

$$S_{IKL} =< \int_{-\xi}^{\xi} C_{3j3I}^{-1}C_{3jKL}d\xi > - \int_{-\xi}^{\xi} C_{3j3I}^{-1}C_{3jKL}d\xi;$$

$$S_{KL} =< \int_{-0,5}^{\xi} C_{33i3}^{-1}C_{i3KL}d\xi > - \int_{-0,5}^{\xi} C_{33i3}^{-1}C_{i3KL}d\xi; \tag{34}$$

$$C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{IJk3}C_{k3i3}^{-1}C_{i3KL}.$$

Учитывая, что $\sigma_{i3}^{(0)} = 0$ и у компонент $B_{im}^{(-1)}$ отличны от нуля только $B_{31}^{(-1)}$ и $B_{32}^{(-1)}$, несложно убедиться в том, что

$$\in_{imk} B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(0)} = 0. \tag{35}$$

Тогда решение локальной задачи устойчивости (29) имеет вид, аналогичный (33):

$$w_I^{(1)} = -w_{3,I}^{(0)}\xi + S_{IKL}\varepsilon_{KL}^{(0)};\ w_3^{(1)} = S_{KL}\varepsilon_{KL}^{(0)};$$
$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(0)};\ \sigma_{i3}^{(0)} = 0. \tag{36}$$

Из формул (34) следует, что для случая ортотропных материалов

$$S_{IKL} \equiv 0;\ S_{KL} =< \int_{-0,5}^{\xi} C_{3333}^{-1}C_{33KL}d\xi > - \int_{-0,5}^{\xi} C_{3333}^{-1}C_{33KL}d\xi. \tag{37}$$

Следовательно, из соотношений (33) и (35) с учетом выражений (5), (6) получаем, что мембранные перемещения в пластине в основном и варьированном состояниях с точностью до членов второго порядка малости линейно зависят от поперечной координаты ξ, как в классических теориях пластин Кирхгофа — Лява и Тимошенко:

$$u_I = u_I^{(0)}\left(x_J\right) + \kappa\xi u_{3,I}^{(0)}\left(x_J\right);\ w_I = w_I^{(0)}\left(x_J\right) + \kappa\xi w_{3,I}^{(0)}\left(x_J\right);$$
$$u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)};\ w_I^{(1)} = -w_{3,I}^{(0)}\xi. \tag{38}$$

Прогиб зависит от ξ уже нелинейно с точностью до членов первого порядка малости:

$$u_3 = u_3^{(0)}\left(x_J\right) + \kappa S_{KL}\left(\xi\right)\varepsilon_{KL}^{(0)}\left(x_J\right); \;\; u_3 = u_3^{(0)}\left(x_J\right) + \kappa S_{KL}\left(\xi\right)\varepsilon_{KL}^{(0)}\left(x_J\right). \quad (39)$$

Решение локальных задач первого приближения. Запишем решение задачи первого приближения (30) относительно напряжений [12]:

$$\sigma_{I3}^{0(1)} = \varepsilon_{KL,\,J}^{0(0)} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< C_{IJKL}^{(0)} > - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi; \;\; \sigma_{33}^{0(1)} = 0;$$

$$\sigma_{IJ}^{0(1)} = \xi C_{IJKL}^{(0)} \eta_{KL}^{0} + \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,\,M}^{0(0)}; \quad (40)$$

$$\varepsilon_{KL}^{0(1)} = \xi \eta_{KL}^{0} + \Phi_{KLMNS} \varepsilon_{MN,\,S}^{0(0)}.$$

Здесь функции обозначены следующим образом:

$$\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = N_{IJKLM}^{(0)} + C_{IJPS}^{(0)} \Phi_{PSKLM};$$

$$N_{IJKLM}^{(0)} = -C_{IJk3} C_{k3P3}^{-1} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< C_{PMKL}^{(0)} > - C_{PMKL}^{(0)}) d\xi;$$

$$\eta_{KL}^{0} = -u_{3,\,KL}^{0(0)}; \;\; \mathit{\Phi}_{KLMNS}\left(\xi\right) = \tilde{\mathit{\Phi}}_{KLMNS}\left(\xi\right) - < \tilde{\mathit{\Phi}}_{KLMNS}\left(\xi\right) >; \quad (41)$$

$$\tilde{\Phi}_{KLMNS}\left(\xi\right) = -\int\limits_{-0,5}^{\xi} \left(C_{K3i3}^{-1}\delta_{SL} + C_{L3i3}^{-1}\delta_{SK}\right) C_{i3MN} d\xi.$$

Поскольку $\sigma_{i3}^{0(0)} = 0$, $\sigma_{33}^{0(1)} = 0$ и из коэффициентов $B_{mk}^{(-1)}$ отличны от нуля только $B_{31}^{(-1)}$ и $B_{32}^{(-1)}$,

$$\in_{imk} B_{jm}^{(-1)} \sigma_{jk}^{0(1)} = 0. \quad (42)$$

Тогда решение локального уравнения устойчивости первого приближения в системе уравнений (30) вместе с граничными условиями на Σ_S и $\xi = -0,5$ имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} \left(< \sigma_{iJ,\,J}^{(0)} > - \sigma_{iJ,\,J}^{(0)} + \in_{imk} \left(B_{jm}^{(0)} \sigma_{jk}^{0(0)} - < B_{jm}^{(0)} \sigma_{jk}^{0(0)} >\right)\right) d\xi. \quad (43)$$

Подставляя в формулу (43) соотношения (36), а также учитывая, что $\sigma_{i3}^{0(0)} = 0$, получаем

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)}=\varepsilon_{KL,J}^{(0)}\int\limits_{-0.5}^{\xi}\left(<C_{\alpha JKL}^{(0)}>-C_{\alpha JKL}^{(0)}\right)d\xi+$$

$$+\left(-1\right)^{\alpha}\int\limits_{-0,5}^{\xi}\left(B_{13}^{(0)}\sigma_{1\beta}^{0(0)}+B_{23}^{(0)}\sigma_{2\beta}^{0(0)}-<B_{13}^{(0)}\sigma_{1\beta}^{0(0)}>-<B_{23}^{(0)}\sigma_{2\beta}^{0(0)}>\right)\Bigg)d\xi, \quad (44)$$

$$\alpha,\beta=1,2, \qquad \alpha\neq\beta;$$

$$\sigma_{33}^{(1)}=\int\limits_{-0,5}^{\xi}\left(\left(B_{11}^{(0)}-B_{22}^{0(0)}\right)\sigma_{12}^{0(0)}+B_{21}^{(0)}\sigma_{22}^{0(0)}-B_{12}^{(0)}\sigma_{11}^{0(0)}-\right.$$

$$\left.-<\left(B_{11}^{(0)}-B_{22}^{(0)}\right)\sigma_{12}^{0(0)}>-<B_{21}^{(0)}\sigma_{22}^{0(0)}>+<B_{12}^{(0)}\sigma_{11}^{0(0)}>\right)d\xi. \quad (45)$$

Поскольку $B_{13}^{(0)}$ и $B_{13}^{(0)}$, согласно (14), не зависят от ξ, то соотношения (44) с учетом решения (33) можно представить в виде

$$\sigma_{I3}^{(1)}=-\left\{C_{IJKL}^{(0)}\right\}_{\xi}\varepsilon_{KL,J}^{(0)}+\left(\left(\left\{C_{11KL}^{(0)}\right\}_{\xi}\delta_{2I}-\left\{C_{12KL}^{(0)}\right\}_{\xi}\delta_{1I}\right)B_{13}^{(0)}+\right.$$

$$\left.+\left(\left\{C_{12KL}^{(0)}\right\}_{\xi}\delta_{2I}-\left\{C_{22KL}^{(0)}\right\}_{\xi}\delta_{1I}\right)B_{23}^{(0)}\right)\varepsilon_{KL}^{0(0)}, \quad (46)$$

где

$$\left\{C_{KLMN}^{(0)}\right\}_{\xi}=\int\limits_{-0,5}^{\xi}\left(C_{KLMN}^{(0)}-<C_{KLMN}^{(0)}>\right)d\xi. \quad (47)$$

Для преобразования выражения (53) подставим вначале перемещения $w_I^{(1)}$ (36) в соотношения (14) и представим четыре компоненты $B_{mk}^{(0)}$, входящие в выражения (46), в следующем виде:

$$\begin{aligned}&B_{11}^{(0)}=w_{3,21}^{(0)}+\frac{1}{2}S_{2KL/3}\varepsilon_{KL,1}^{(0)};\ B_{12}^{(0)}=w_{3,11}^{(0)}+\frac{1}{2}S_{1KL/3}\varepsilon_{KL,1}^{(0)};\\&B_{21}^{(0)}=w_{3,22}^{(0)}+\frac{1}{2}S_{2KL/3}\varepsilon_{KL,2}^{(0)};\ B_{22}^{(0)}=w_{3,21}^{(0)}+\frac{1}{2}S_{1KL/3}\varepsilon_{KL,2}^{(0)}.\end{aligned} \quad (48)$$

Подставляя соотношения (48) в соотношения (45), получаем искомую формулу для поперечных напряжений в варьируемом состоянии:

$$\sigma_{33}^{(1)}=\varepsilon_{MN}^{0(0)}\left(\varepsilon_{KL,1}^{(0)}\left(H_{KLMN}^{21}-H_{KLMN}^{11}\right)-\varepsilon_{KL,2}^{(0)}\left(H_{KLMN}^{12}-H_{KLMN}^{22}\right)+\right.$$

$$\left.+w_{3,22}^{(0)}\left\{C_{22MN}^{(0)}\right\}_{\xi}-w_{3,11}^{(0)}\left\{C_{11MN}^{(0)}\right\}_{\xi}\right), \quad (49)$$

где

$$H_{KLMN}^{\alpha\beta} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} \left(S_{\alpha KL/3} C_{\alpha\beta MN}^{(0)} - < S_{\alpha KL/3} C_{\alpha\beta MN}^{(0)} > \right) d\xi. \tag{50}$$

Выразим деформации $\varepsilon_{k3}^{(1)}$ из второй группы соотношений (31), тогда с учетом формул (43) и (36) получим

$$\varepsilon_{k3}^{(1)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{k3I3}^{-1} \sigma_{I3}^{(1)} + C_{k333}^{-1} \sigma_{33}^{(1)}. \tag{51}$$

Деформации $\varepsilon_{KL}^{(1)}$, согласно соотношению (36), имеют вид, аналогичный соотношениям (40) для основного состояния:

$$\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi \eta_{KL} + \Phi_{KLMNS} \varepsilon_{MN,S}^{(0)}, \quad \eta_{KL} = -w_{3,KL}^{(0)}. \tag{52}$$

Если подставить теперь в формулу (51) выражения (52), (46) и (49), то получим следующее представление для деформаций:

$$\varepsilon_{k3}^{(1)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \xi \eta_{KL} - \left(C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \Phi_{KLMNS} + C_{k3I3}^{-1} \left\{ C_{ISMN}^{(0)} \right\}_{\xi} \right) \varepsilon_{MN,S}^{(0)} +$$

$$+ C_{k3I3}^{-1} \left(\left(\left\{ C_{11KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{2I} - \left\{ C_{12KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{1I} \right) B_{13}^{(0)} + \left\{ C_{12KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{2I} - \right.$$

$$\left. - \left\{ C_{22KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{1I} \right) B_{23}^{(0)} \right) \varepsilon_{KL}^{0(0)} + C_{k333}^{-1} \left(\varepsilon_{KL,1}^{(0)} \left(H_{KLMN}^{21} - H_{KLMN}^{11} \right) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon_{KL,2}^{(0)} \left(H_{KLMN}^{12} - H_{KLMN}^{22} \right) + w_{3,22}^{(0)} \left\{ C_{22MN}^{(0)} \right\}_{\xi} - w_{3,11}^{(0)} \left\{ C_{11MN}^{(0)} \right\}_{\xi} \right) \varepsilon_{MN}^{0(0)}. \tag{53}$$

Подставляя выражение (51) в третью группу соотношений (30), найдем оставшиеся напряжения первого приближения в варьируемом состоянии:

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{IJk3} \left(C_{k3I3}^{-1} \sigma_{I3}^{(1)} + C_{k333}^{-1} \sigma_{33}^{(1)} \right). \tag{54}$$

Подставляя формулы (52), (46) и (49) в выражения (54), получаем окончательно

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + \tilde{N}_{IJMNS}^{(0)} \varepsilon_{MN,S}^{(0)} + V_{IJKLM} B_{M3}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{0(0)} +$$

$$+ W_{IJKLMNS} \varepsilon_{KL,S}^{(0)} \varepsilon_{MN}^{0(0)} + G_{IJMNKL} w_{3,KL}^{(0)} \varepsilon_{MN}^{0(0)}, \tag{55}$$

где введены следующие тензоры:

$$V_{IJKL1} = C_{IJk3} C_{k3M3}^{-1} \left(\left\{ C_{11KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{2M} - \left\{ C_{12KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{1M} \right); \tag{56}$$

$$V_{IJKL2} = C_{IJk3}C_{k3M3}^{-1}\left(\left\{C_{12KL}^{(0)}\right\}_{\xi}\delta_{2M} - \left\{C_{22KL}^{(0)}\right\}_{\xi}\delta_{1M}\right);$$

$$W_{IJKLMN1} = C_{IJk3}C_{k333}^{-1}\left(H_{KLMN}^{21} - H_{KLMN}^{11}\right);$$

$$W_{IJKLMN2} = -C_{IJk3}C_{k333}^{-1}\left(H_{KLMN}^{12} - H_{KLMN}^{22}\right);$$

$$G_{IJMN22} = C_{IJk3}C_{k333}^{-1}\left\{C_{22MN}^{(0)}\right\}_{\xi}; \tag{56}$$

$$G_{IJMN11} = -C_{IJk3}C_{k333}^{-1}\left\{C_{11MN}^{(0)}\right\}_{\xi};$$

$$G_{IJMN12} = G_{IJMN21} = 0.$$

Осредненные уравнения для основного и варьированного состояний. Подставляя выражения (26) в асимптотическое разложение (25) уравнений равновесия, получаем

$$<\sigma_{iJ,J}^{0(0)}> + \kappa <\sigma_{iJ,J}^{0(1)}> + \kappa^2\left(<\sigma_{iJ,J}^{0(2)}> - \Delta p\delta_{i3}\right) + ... = 0. \tag{57}$$

Умножив уравнения равновесия системы (19) на $\xi\kappa$ и проинтегрировав их по толщине, получим следующее вспомогательное уравнение:

$$\kappa\left(<\xi\sigma_{IJ,J}^{0(0)}> - <\sigma_{I3}^{0(1)}>\right) + \kappa^2\left(<\xi\sigma_{IJ,J}^{0(1)}> - <\sigma_{I3}^{0(2)}>\right) + ... = 0. \tag{58}$$

Здесь учтено, что $<\xi\sigma_{i3/3}^{0(1)}> = -<\sigma_{i3}^{0(1)}>$ и $<\xi\sigma_{i3/3}^{0(2)}> = -<\sigma_{i3}^{0(2)}>$ вследствие граничных условий на $\Sigma_{3\pm}: \sigma_{i3}^{0(0)} = 0,\ \sigma_{i3}^{0(1)} = 0.$

Введем обозначения для усилий T_{IJ}^0, моментов M_{IJ}^0 и перерезывающих сил Q_I^0 в пластине:

$$T_{IJ}^0 = <\sigma_{IJ}^{0(0)}> + \kappa <\sigma_{IJ}^{0(1)}> + \kappa^2 <\sigma_{IJ}^{0(2)}> ...;$$

$$Q_I^0 = \kappa <\sigma_{I3}^{0(1)}> + \kappa^2 <\sigma_{I3}^{0(2)}> + ...; \tag{59}$$

$$M_{IJ}^0 = \kappa <\xi\sigma_{IJ}^{0(0)}> + \kappa^2 <\xi\sigma_{IJ}^{0(1)}> + ...$$

Тогда уравнения (57) и (58) можно записать в виде классических уравнений равновесия пластины:

$$T_{IJ,J}^0 = 0;\ Q_{J,J}^0 = \Delta\overline{p};\ M_{IJ,J}^0 - Q_I^0 = 0, \tag{60}$$

где $\Delta\overline{p} = \kappa^2\Delta p.$

Подставляя выражения (32) в асимптотическое разложение (28) уравнений устойчивости и сохраняя только главные члены разложения, получаем

$$
\begin{gathered}
<\sigma_{iJ,J}^{(0)}>-\in_{imk}\left(<B_{jm}^{(0)}\sigma_{jk}^{0(0)}>+<B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(1)}>\right)+\\
+\kappa\left(<\sigma_{iJ,J}^{(1)}>-\in_{imk}\left(<B_{jm}^{(1)}\sigma_{jk}^{0(0)}>+<B_{jm}^{(0)}\sigma_{jk}^{0(1)}>+<B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(2)}>\right)\right)+\ldots=0.
\end{gathered}
\tag{61}
$$

Умножим уравнения равновесия системы (27) на $\xi\kappa$ и проинтегрируем их по толщине, тогда, сохраняя только главные члены асимптотического разложения, получаем следующее вспомогательное уравнение:

$$
\begin{gathered}
\kappa\left(<\xi\sigma_{IJ,J}^{(0)}>-<\sigma_{I3}^{(1)}>\right)+\kappa^2\left(<\xi\sigma_{IJ,J}^{(1)}>-<\sigma_{I3}^{(2)}>\right)-\\
-\in_{Imk}<\xi B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(0)}>-\kappa\in_{Imk}\left(<\xi B_{jm}^{(0)}\sigma_{jk}^{0(0)}>+<\xi B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(1)}>\right)-\\
-\kappa^2\in_{Imk}\left(<\xi B_{jm}^{(1)}\sigma_{jk}^{0(0)}>+<\xi B_{jm}^{(0)}\sigma_{jk}^{0(1)}>+<\xi B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(2)}>\right)-\ldots=0.
\end{gathered}
\tag{62}
$$

Здесь учтено, что $\sigma_{i3}^{(0)}=0,\ <\xi\sigma_{i3/3}^{(1)}>=-<\sigma_{i3}^{(1)}>,\ <\xi\sigma_{i3/3}^{(2)}>=-<\sigma_{i3}^{(2)}>$, поскольку $\sigma_{i3}^{(0)}=0,\ \sigma_{i3}^{(1)}=0,\ \in_{imk}B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(1)}=0$ и $\in_{imk}B_{jm}^{(-1)}\sigma_{jk}^{0(2)}=0$ в соответствии с выражением (42).

Введем обозначения для усилий T_{IJ}, моментов M_{IJ} и перерезывающих сил Q_I в варьируемом состоянии аналогично формулам для основного состояния, но с сохранением только главных членов разложения:

$$
\begin{gathered}
T_{IJ}=<\sigma_{IJ}^{(0)}>+\kappa<\sigma_{IJ}^{(1)}>+\kappa^2\ldots;\\
Q_I=\kappa<\sigma_{I3}^{(1)}>+\kappa^2<\sigma_{I3}^{(2)}>+\ldots;\\
M_{IJ}=\kappa<\xi\sigma_{IJ}^{(0)}>+\kappa^2<\xi\sigma_{IJ}^{(1)}>+\ldots.
\end{gathered}
\tag{63}
$$

Тогда уравнения (61) и (62) примут следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\sum_{\gamma=1}^{2}T_{\alpha\gamma,\gamma}+(-1)^{\alpha}\left(<B_{13}^{(0)}\sigma_{1\beta}^{0(0)}>+<B_{23}^{(0)}\sigma_{2\beta}^{0(0)}>\right)=0,\quad \alpha,\beta=1,2,\quad \alpha\neq\beta;\\
\sum_{\gamma=1}^{2}M_{\alpha\gamma,\gamma}-Q_{\alpha}+(-1)^{\alpha}\left(<\xi B_{13}^{(0)}\sigma_{1\beta}^{0(0)}>+<\xi B_{23}^{(0)}\sigma_{2\beta}^{0(0)}>\right)=0;\\
Q_{J,J}-<B_{11}^{(0)}\sigma_{12}^{0(0)}>-<B_{21}^{(0)}\sigma_{22}^{0(0)}>+<B_{12}^{(0)}\sigma_{11}^{0(0)}>+<B_{22}^{(0)}\sigma_{12}^{0(0)}>=0.
\end{gathered}
\tag{64}
$$

Согласно соотношениям (14), компоненты $B_{13}^{(0)}$ и $B_{23}^{(0)}$ не зависят от ξ, поэтому уравнения системы (64) можно записать в виде

$$\sum_{\gamma=1}^{2} T_{\alpha\gamma,\gamma} + \left(-1\right)^{\alpha} \left(B_{13}^{(0)} T_{1\beta}^{0} + B_{23}^{(0)} T_{2\beta}^{0}\right) = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \qquad \alpha \neq \beta;$$

$$\sum_{\gamma=1}^{2} M_{\alpha\gamma,\gamma} - Q_{\alpha} + \left(-1\right)^{\alpha} \left(B_{13}^{(0)} M_{1\beta}^{0(0)} + B_{23}^{(0)} M_{2\beta}^{0(0)}\right) = 0; \qquad (65)$$

$$Q_{J,J} - < B_{11}^{(0)} \sigma_{12}^{0(0)} > - < B_{21}^{(0)} \sigma_{22}^{0(0)} > + < B_{12}^{(0)} \sigma_{11}^{0(0)} > + < B_{22}^{(0)} \sigma_{12}^{0(0)} >= 0.$$

Моменты основного состояния в нулевом приближении

$$M_{\alpha\beta}^{0(0)} =< \xi \sigma_{\alpha\beta}^{0(0)} >. \qquad (66)$$

Уравнения (65) — искомые уравнения устойчивости пластины.

Если слои пластины расположены симметрично относительно срединной плоскости $\xi = 0$, то в соответствии с решением (36)

$$M_{\alpha\beta}^{0(0)} =< \xi C_{\alpha\beta KL}^{(0)} > \varepsilon_{KL}^{0(0)} = 0. \qquad (67)$$

Для ортотропной пластины, согласно соотношениям (38), перемещения $w_I^{(1)} = -w_{3,I}^{(0)} \xi$ линейно зависят от координаты ξ, тогда в соответствии с выражением (14) компоненты $B_{11}^{(0)}$, $B_{12}^{(0)}$, $B_{21}^{(0)}$, $B_{22}^{(0)}$ не зависят от ξ. Уравнения устойчивости ортотропной пластины принимают следующий вид:

$$\sum_{\gamma=1}^{2} T_{\alpha\gamma,\gamma} + \left(-1\right)^{\alpha} \left(B_{13}^{(0)} T_{1\beta}^{0} + B_{23}^{(0)} T_{2\beta}^{0}\right) = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \qquad \alpha \neq \beta;$$

$$\sum_{\gamma=1}^{2} M_{\alpha\gamma,\gamma} - Q_{\alpha} = 0; \qquad (68)$$

$$Q_{J,J} - \left(B_{11}^{(0)} - B_{22}^{(0)}\right) T_{12}^{0} - B_{21}^{(0)} T_{22}^{0} + B_{12}^{(0)} T_{11}^{0} = 0.$$

Осредненные определяющие соотношения теории пластин. Подставив выражения (42) и (48) для напряжений $\sigma_{IJ}^{0(0)}$, $\sigma_{IJ}^{0(1)}$, $\sigma_{I3}^{0(1)}$ в интегралы формул (59), получим осредненные определяющие соотношения для пластины в основном состоянии:

$$T_{IJ}^{0} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{0(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL}^{0} + K_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{0(0)}; \qquad (69)$$

$$M_{IJ}^{0} = B_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{0(0)} + D_{IJKL}\eta_{KL}^{0} + \bar{K}_{IJKLM}\varepsilon_{KL,M}^{0(0)};$$
$$Q_{I}^{0} = K_{IJKL}\varepsilon_{KL,J}^{0(0)} + \kappa^{2} < \sigma_{I3}^{0(2)} >. \tag{69}$$

Тензоры осредненных упругих констант пластины в соотношениях (69) имеют вид

$$\bar{C}_{IJKL} =< C_{IJKL}^{(0)} >;\ B_{IJKL} = \kappa < \xi C_{IJKL}^{(0)} >;\ D_{IJKL} = \kappa^{2} < \xi^{2} C_{IJKL}^{(0)} >;$$
$$K_{IJKLM} = \kappa < \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} >;\ K_{IJKL} = -\kappa < \left\{ C_{IJKL}^{(0)} \right\}_{\xi} >; \tag{70}$$
$$\bar{K}_{IJKLM} = \kappa^{2} < \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} >.$$

Аналогично, подставляя выражения (33), (46) и (55) для напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$, $\sigma_{I3}^{(1)}$ в интегралы формул (63), получаем осредненные определяющие соотношения для пластины в варьируемом состоянии:

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{B}_{IJKL}\eta_{KL} + \hat{K}_{IJKLM}\varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \bar{V}_{IJKLM}B_{M3}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{0(0)};$$
$$M_{IJ} = B_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{D}_{IJKL}\eta_{KL} + \hat{\bar{K}}_{IJKLM}\varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \bar{\bar{V}}_{IJKLM}B_{M3}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{0(0)}; \tag{71}$$
$$Q_{I} = K_{IJKL}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^{2} < \sigma_{I3}^{(2)} >.$$

Дополнительные тензоры осредненных упругих констант пластины в варьируемом состоянии имеют вид

$$\hat{B}_{IJKL} = B_{IJKL} + \bar{G}_{IJMNKL}\varepsilon_{MN}^{0(0)};\ \hat{K}_{IJKLM} = K_{IJKLM} + \bar{W}_{IJKLSNM}\varepsilon_{SN}^{0(0)};$$
$$\hat{D}_{IJKL} = D_{IJKL} + \bar{\bar{G}}_{IJMNKL}\varepsilon_{MN}^{0(0)};\ \hat{\bar{K}}_{IJKLM} = \bar{K}_{IJKLM} + \bar{\bar{W}}_{IJKLSNM}\varepsilon_{SN}^{0(0)};$$
$$\bar{V}_{IJKLM} = \kappa < V_{IJKLM} >;\ \bar{W}_{IJKLMNS} = \kappa < W_{IJKLMNS} >; \tag{72}$$
$$\bar{G}_{IJMNKL} = \kappa < G_{IJMNKL} >;\ \bar{\bar{V}}_{IJKLM} = \kappa^{2} < \xi V_{IJKLM} >;$$
$$\bar{\bar{W}}_{IJKLMNS} = \kappa^{2} < \xi W_{IJKLMNS} >;\ \bar{\bar{G}}_{IJMNKL} = \kappa^{2} < \xi G_{IJMNKL} >.$$

В отличие от определяющих соотношений в классической теории устойчивости соотношения (71) содержат слагаемые $\bar{V}_{IJKLM}B_{M3}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{0(0)}$ и $\bar{\bar{V}}_{IJKLM}B_{M3}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{0(0)}$, учитывающие влияние основного состояния пластины на варьируемое. Кроме того, осредненные упругие константы (72) в варьируемом состоянии также зависят от деформаций $\varepsilon_{SN}^{0(0)}$ основного состояния пластины.

Для ортотропных сред равны нулю компоненты следующих тензоров:

$$V_{IJKLM}=0;\;\; H^{\alpha\beta}_{KLMN}=0;\;\; N^{(0)}_{IJKLM}=0;\;\; \tilde{\Phi}_{KLMNS}\left(\xi\right)=0, \tag{73}$$

поэтому из соотношений (56), (70) и (72) имеем

$$\begin{gathered} K_{IJKLM}=0;\;\; \bar{K}_{IJKLM}=0;\;\; W_{IJKLMNS}=0;\;\; \bar{W}_{IJKLMNS}=0; \\ \bar{\bar{W}}_{IJKLMNS}=0;\;\; \hat{K}_{IJKLM}=0;\;\; \hat{\bar{K}}_{IJKLM}=0;\;\; \bar{V}_{IJKL1}=0;\;\; \bar{\bar{V}}_{IJKL1}=0. \end{gathered} \tag{74}$$

С учетом этих выражений определяющие соотношения (71) принимают более простой вид:

$$\begin{gathered} T_{IJ}=\bar{C}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL}+\hat{B}_{IJKL}\eta_{KL}; \\ M_{IJ}=B_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL}+\hat{D}_{IJKL}\eta_{KL}; \\ Q_I=\kappa^2<\sigma^{(2)}_{I3}>. \end{gathered} \tag{75}$$

Полученные соотношения формально похожи на определяющие соотношения классических теорий пластин, но осредненные упругие константы $\bar{C}_{IJKL}$, $\hat{B}_{IJKL}$, B_{IJKL} и $\hat{D}_{IJKL}$ зависят от деформаций основного состояния пластины $\varepsilon^{0(0)}_{SN}$.

Осредненные кинематические соотношения теории пластин. В систему осредненных определяющих соотношений (69) входят деформации срединной поверхности $\varepsilon^{0(0)}_{KL}$, кривизны η^{0}_{KL} и градиенты деформаций $\varepsilon^{0(0)}_{KL,\,N}$, которые зависят от функций $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$ глобальных переменных x_I:

$$\varepsilon^{0(0)}_{IJ}=\frac{1}{2}\left(u^{(0)}_{I,\,J}+u^{(0)}_{J,\,I}\right);\;\; \eta^{0}_{KL}=-u^{(0)}_{3,\,KL}. \tag{76}$$

Эти кинематические соотношения замыкают систему уравнений асимптотической теории пластин (60), (69), находящихся в основном состоянии.

В систему осредненных определяющих соотношений (71) варьированного состояния пластин входят деформации срединной поверхности $\varepsilon^{(0)}_{KL}$, кривизны η_{KL}, градиенты деформаций $\varepsilon^{(0)}_{KL,\,N}$, а также компоненты $B^{(0)}_{M3}$ вектора поворота, которые зависят от функций $w^{(0)}_I$, $w^{(0)}_3$ глобальных переменных x_I:

$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(w_{I,J}^{(0)} + w_{J,I}^{(0)}\right); \ \eta_{KL} = -w_{3,KL}^{(0)};$$
$$B_{13}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(w_{2,11}^{(0)} - w_{1,21}^{(0)}\right); \ B_{23}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(w_{2,12}^{(0)} - w_{1,22}^{(0)}\right). \tag{77}$$

Эти кинематические соотношения замыкают систему уравнений асимптотической теории пластин (65), (71), находящихся в варьируемом состоянии.

Пример расчета устойчивости пластины при одноосном сжатии. Рассмотрим классическую задачу об устойчивости пластины при действии на нее сжимающей продольной нагрузки $T_{11}^0 \equiv -T^0 < 0$. Ось OX^1 ориентирована в направлении продольной оси пластины. Будем считать, что пластина является: 1) ортотропной, главные оси ортотропии каждого слоя совпадают с осями OX^i декартовой системы координат и 2) симметричной относительно срединной поверхности, т. е. выполняются соотношения

$$C_{ijkl}(\xi) = C_{ijkl}(-\xi). \tag{78}$$

В пластине, находящейся в основном состоянии, возникает одноосное растяжение (сжатие), которому соответствует следующее решение системы уравнений (60), (69), (73):

$$u_1^{(0)} = \Pi_{1111} T_{11}^0 X^1 + u_{10}; \ u_3^{(0)} = 0; \ u_2^{(0)} = 0; \ \eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)} = 0;$$
$$\sigma_{11}^{(0)} = T_{11}^0; \ \varepsilon_{11}^{(0)} = \Pi_{1111}\sigma_{11}^{(0)}; \ \varepsilon_{22}^{(0)} = \Pi_{1122}\sigma_{11}^{(0)}, \tag{79}$$

остальные усилия, а также все моменты и перерезывающие силы равны нулю, т. е. $T_{\alpha\beta}^0 = 0$, $M_{\alpha\beta}^0 = 0$, $Q_\alpha^0 = 0$. Здесь Π_{IJKL} — компоненты тензора податливостей, обратного к $\bar{C}_{IJKL}$; u_{10} — постоянная интегрирования, определяемая из граничного условия на торце пластины.

Решение для варьированного (неустойчивого) состояния пластины будем искать подобно решению задачи изгиба пластины [13], в котором отличны от нуля две основные функции: прогиб $w_3^{(0)}$ и угол поворота $w_1^{(1)}$, причем эти функции зависят только от продольной координаты X^1:

$$w_3^{(0)}; \ w_1^{(1)} \ // \ X^1; \quad w_1^{(0)} = 0; \ w_2^{(0)} = 0; \ w_2^{(1)} = 0. \tag{80}$$

Подставляя это решение в кинематические соотношения (12), находим компоненты вектора поворота:

$$\omega_1^{(0)}=0;\ \omega_2^{(0)}=\frac{1}{2}\left(w_{3,1}^{(0)}-w_{1/3}^{(1)}\right);\ \omega_3^{(0)}=0;\ \ \omega_\alpha^{(1)}=0;\ \alpha=1,2,3. \qquad (81)$$

После подстановки выражений (80) в соотношения (14) находим, что ненулевой является только одна компонента:

$$B_{12}^{(0)}=\omega_{2,1}^{(0)}=\frac{1}{2}\left(w_{3,11}^{(0)}-w_{1/3,1}^{(1)}\right)=w_{3,11}^{(0)}, \qquad (82)$$

а остальные $B_{ij}^{(0)}=0,\ \ B_{ij}^{(1)}=0.$

Здесь использована формула (38) $w_1^{(1)}=-w_{3,1}^{(0)}\xi,$ которая имеет место вследствие ортотропии пластины. Так у тензоров $\sigma_{IJ}^{0(0)}$ и $B_{IJ}^{(0)}$ отличны от нуля только компоненты $\sigma_{11}^{0(0)}$ и $B_{12}^{(0)}$, тогда с учетом формул (81) получаем

$$F_{e3}^{(0)}=-\left(B_{11}^{(0)}-B_{22}^{(0)}\right)T_{12}^0-B_{21}^{(0)}T_{22}^0+B_{12}^{(0)}T_{11}^0=B_{12}^{(0)}T_{11}^0=-T^0w_{3,11}^{(0)}. \qquad (83)$$

Подставляя выражение (80) в кинематические соотношения (77), находим компоненты деформаций и кривизн срединной поверхности пластины в варьированном состоянии:

$$\eta_{11}=-w_{3,11}^{(0)}, \qquad (84)$$

а остальные $\eta_{KL}=0,\ \ \ \varepsilon_{IJ}^{(0)}=0.$

Подставляя выражения (84) в определяющие соотношения (75), находим выражения для усилий и моментов:

$$\begin{gathered} T_{IJ}=\hat{B}_{IJ11}\eta_{11};\\ M_{11}=\hat{D}_{1111}\eta_{11};\ M_{22}=\hat{D}_{2211}\eta_{11};\ M_{12}=0. \end{gathered} \qquad (85)$$

Поскольку пластина является симметричной, из соотношений (47) и (78) следует, что функции $\left\{C_{KLMN}^{(0)}\right\}_\xi$ являются антисимметричными: $\left\{C_{KLMN}^{(0)}\right\}_\xi=-\left\{C_{KLMN}^{(0)}\right\}_{-\xi}$. Из (56) следует, что и G_{IJMNKL} антисимметричные функции. Тогда из выражений (70) и (72) получаем, что для симметричной пластины равны нулю следующие компоненты тензоров:

$$\begin{gathered} B_{IJKL}=\kappa<\xi C_{IJKL}^{(0)}>=0;\ \bar{G}_{IJMNKL}=\kappa<G_{IJMNKL}>=0;\\ \hat{B}_{IJKL}=0;\ K_{IJKL}=-\kappa<\left\{C_{IJKL}^{(0)}\right\}_\xi>=0. \end{gathered} \qquad (86)$$

Однако отличными от нуля являются компоненты тензора $\overline{\overline{G}}_{IJMNKL}$ и, следовательно, изгибная жесткость пластины в варьируемом состоянии

$$\hat{D}_{1111} = D_{1111} + \overline{\overline{G}}_{111111}\varepsilon_{11}^{0(0)} + \overline{\overline{G}}_{111122}\varepsilon_{22}^{0(0)} = D_{1111} +$$

$$+\kappa^2\left(<\xi C_{1133}C_{3333}^{-1}\left\{C_{1111}^{(0)}\right\}_\xi > \Pi_{1111} - <\xi C_{1133}C_{3333}^{-1}\left\{C_{2211}^{(0)}\right\}_\xi > \Pi_{1122}\right)T^0. \quad (87)$$

После подстановки выражений (86) в определяющие соотношения (85) получаем, что T_{IJ} и Q_1 равны нулю, а момент M_{11} зависит только от X^1. Тогда система уравнений теории устойчивости (68) содержит только два ненулевых уравнения:

$$M_{11,1} - Q_1 = 0;\ \ Q_{1,1} - T^0 w_{3,11}^{(0)} = 0. \quad (88)$$

Исключив из этих двух уравнений перерезывающую силу Q_1, получим

$$M_{11,11} - T^0 w_{3,11}^{(0)} = 0. \quad (89)$$

Подставляя вместо момента M_{11} его выражение (85), с учетом (84) получаем итоговую форму уравнения теории устойчивости пластины:

$$w_{3,1111}^{(0)} + k^2 w_{3,11}^{(0)} = 0, \quad (90)$$

где

$$k^2 = \frac{T_{11}^0}{\hat{D}_{1111}}. \quad (91)$$

Уравнение (90) с граничными условиями шарнирного закрепления

$$X^1 = 0:\ U_1^0 = 0,\ \ w_3^{(0)} = 0;\ \ M_{11} = 0;\ \ X^1 = l:\ w_3^{(0)} = 0,\ \ M_{11} = 0 \quad (92)$$

имеет минимальное собственное значение $k = \pi/l.$ Ему соответствует критическое значение сжимающей нагрузки $T^0,$ при котором происходит потеря устойчивости пластины:

$$T_{\text{кр}}^0 = \frac{\pi^2 \hat{D}_{1111}}{l^2}. \quad (93)$$

Формула (93) отличается от классической формулы Эйлера [19] для критического усилия значением изгибной жесткости $\hat{D}_{1111}.$

В классическую формулу вместо $\hat{D}_{1111}$ входит значение D_{1111}, различие между ними определяется соотношением (87). Если пластина однослойная, т. е. $C^{(0)}_{KLMN} = \text{const}$, то, согласно (47), $\left\{C^{(0)}_{KLMN}\right\}_{\xi} = 0$ и, следовательно, $\hat{D}_{1111} = D_{1111}$. Для многослойной пластины эти изгибные жесткости уже различаются, особенно, если слои пластины анизотропные и отношение модулей упругости в продольном и поперечном направлениях $C^{-1}_{3333}C_{1111}$ велико. Таким образом, даже для простейшей классической задачи об устойчивости пластины при продольном сжатии разработанная теория дает заметную поправку к значению критической нагрузки. Для других случаев (несимметричная пластина, неортотропные слои, неравномерная нагрузка и др.) различие может быть еще более существенным.

Заключение. Разработана теория устойчивости упругих тонких многослойных пластин, построенная на общих уравнениях трехмерной теории устойчивости упругих сред путем введения асимптотических разложений по малому геометрическому параметру без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине пластины. Сформулированы локальные задачи теории устойчивости, а также выведены осредненные уравнения равновесия пластины в основном и варьируемом ее состояниях. Показано, что осредненные уравнения устойчивости теории пластин отличаются от классических уравнений теории пластин Кирхгофа — Лява и Тимошенко выражением поперечной силы в варьируемом состоянии и определяющими соотношениями пластины, которые включают члены, обусловленные основным напряженным состоянием. Пример расчета устойчивости тонкой ортотропной пластины при одноосном сжатии показал, что значение критической силы потери устойчивости отличается от значений, полученных по классической формуле Эйлера, выражением для изгибной жесткости, которая зависит от параметров основного состояния пластины.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-19-00847).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тимошенко С.П. *Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы*. Москва, Наука, 1971. 808 с.

[2] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. Москва, Машиностроение, 1978, 312 с.

[3] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 964 с.

[4] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 264 с.

[5] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1980, 324 с.

[6] Сухинин С.Н. *Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек*. Москва, Физматлит, 2010, 240 с.

[7] Paczos P., Zielnica J. Stability of orthotropic elastic–plastic open conical shells. *Thin-Walled Structures*, 2008, vol. 46, no. 5, pp. 530–540.

[8] Zihni Zerin. The effect of non-homogeneity on the stability of laminated orthotropic conical shells subjected to hydrostatic pressure. *Structural Engineering and Mechanics. An International Journal*, 2012, vol. 43, no.1, pp. 89–103. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/sem.2012.43.1.089

[9] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости. Ч. 1: Конечные деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2013, № 4 (51), с. 79–95.

[10] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости. Ч. 2: Малые деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 1, с. 17–26.

[11] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости. Ч. 3: Малые деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки,* 2014, № 2, с. 77–89.

[12] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.

[13] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html

[14] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.

[15] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.

[16] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Федонюк Н.Н., Яковлев Д.О. Метод расчета рассеяния энергии в конструкциях из гибридных композитов. *Известия вузов. Сер. Машиностроение*, 2014, № 11, с. 23–34.

[17] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Моделирование упругодиссипативных характеристик слоисто-волокнистых композитов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 4 (28). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html

[18] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин. *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*, 2014, № 10. doi: 10.7463/1014.0730105.

[19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

[20] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 367 с.

Статья поступила в редакцию 10.04.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И. Теория устойчивости пластин, основанная на асимптотическом анализе уравнений теории устойчивости трехмерных упругих сред. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2015, вып. 09.

URL: http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1416.html

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 300 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, газодинамики, механики композитов, математического моделирования в науке о материалах.
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Theory of plates stability, based on asymptotic analysis of stability theory equations for three-dimensional elastic bodies

© Yu.I. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The objective of this research is to develop a theory of elastic stability of thin multilayer plates. The theory is based on general equations of three-dimensional theory of elastic stability by means of introducing the asymptotic expansion over a small parameter, which represents a thickness to length of plate ratio, without any hypothesis about displacements and stress distributions. Within the research, we stated local problems of stability, as well as the averaged equations of plate equilibrium for the ground states and the varied states of the plate. Consequently, we obtained the analytical solution of the local problems, which helped deduce relations for all six components of the stress tensor, including throw-thickness normal stresses and shear stresses for the ground and varied states. Moreover, we found that the averaged equations of plates' stability differ from the classic equations of Kirchoff—Love and Timoshenko's plate theory of stability. It is determined that for orthotropic plates the constitutive relations simplify and become similar to classical relations of thin plates. However, the membrane and flexural stiffness of plates depends on stresses of the ground state. The study is illustrated with an example of calculating a thin orthotropic plate under uniaxial compression. As a result, we obtained an expression for the critical buckling force, which differs from the classical Euler formula in expression for flexural stiffness, which depends on the parameters of the ground state of the plate. The findings of the research show that the difference of the critical force values is the most significant for the plates with strong anisotropic layers.

Keywords: *theory of plates' stability, three-dimensional stability theory, thin multi-layer plates, orthotropic plates, asymptotic expansion.*

REFERENCE

[1] Timoshenko S.P., Gere J.M. *Theory of elastic stability*. 2nd ed. New York/Toronto/London, McGraw-Hill, 1961, 356 p. (In Russ.: Timoshenko S.P. *Ustoychivost sterzhney, plastin i obolochek. Izbrannye raboty* [Stability of rods, plates and shells. Selected works]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 808 p.).

[2] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh system* [Basis of calculation for stability of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978, 312 p.

[3] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 964 p.

[4] Vasilev V.V. *Mekhanika konstruktsiy iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 264 p.

[5] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynykh plastin i obolochek iz kompozitsionnyh materialov* [Calculation of multilayer composite plates and shells]. Moscow, Mashiostroenie Publ., 1980, 324 p.

[6] Sukhinin S.N. *Prikladnye zadachi ustoychivosti mnogosloynykh kompozitnykh obolochek* [Applied problems of stability of multilayer composite shells]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 240 p.

[7] Paczos P., Zielnica J. Stability of orthotropic elastic-plastic open conical shells. *Thin-Walled Structures*, 2008, vol. 46, no. 5, pp. 530–540.

[8] Zihni Zerin The effect of non-homogeneity on the stability of laminated orthotropic conical shells subjected to hydrostatic pressure. *Structural Engineering and Mechanics. An International Journal*, 2012, vol. 43, no.1, pp. 89–103. doi: http://dx.doi.org/10.12989/sem.2012.43.1.089
[9] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences*, 2013, no. 4 (51), pp. 79–95.
[10] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences*, 2014, no. 1, pp. 17–26.
[11] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences*, 2014, no. 2, pp. 77–89.
[12] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–100.
[13] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html.
[14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody - Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
[15] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy — Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.
[16] DimitrienkoYu.I., Gubareva E.A., Fedonyuk N.N., Yakovlev D.O. *Izvestiya VUZov. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2014, no. 11, pp. 23–34.
[17] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Fedonyuk N.N., Sborschikov S.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 4 (28). Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html.
[18] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. *Nauka i obrazzovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 10. doi: 10.7463/1014.0730105
[19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
[20] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 1. Tenzornyy analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 367 p.

Dimitrienko Yu.I. (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys.&Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com