УДК 539.3

Определение контактного давления для цилиндрических тел в задаче о взаимодействии тел с покрытиями

© Е.А. Губарева, Т.Ю. Мозжорина, А.Н. Щетинин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача определения контактного давления между двумя контактирующими цилиндрическими телами с тонкими покрытиями. Предложенный расчет позволяет упростить схему контакта цилиндрических тел с упругими мягкими тонкими покрытиями для учета большего числа явлений, протекающих в области контакта. Рассчитано контактное давление с учетом предложенной ранее формулы для описания нелинейного трения. Определено условие отсутствия катастрофического износа.

Ключевые слова: *покрытие, трение, тепловыделение, контактное давление.*

Введение. Задача расчета контактного давления в тонком слое, разделяющем различные контактирующие тела, является актуальной во многих областях техники, в том числе при проектировании трущихся деталей машин. Методам расчета напряженно-деформированного состояния тонких упругих и неупругих сред в настоящее время уделяется большое внимание, в частности, активно развиваются асимптотические методы анализа решений фундаментальных уравнений механики деформируемых сред [1–4]. В работах [5–9] предложен метод расчета контактного давления, основанный на построении интегральных уравнений для давления контакта. В работе [10] предложена нелинейная зависимость коэффициента трения от температуры и рассчитана контактная температура. Определение контактного давления представляет особый прикладной интерес. В сходной постановке задача рассмотрена в работе [11]. В настоящей работе определяется контактное давление для цилиндрических тел с упругими мягкими тонкими покрытиями.

Постановка задачи о контактном взаимодействии двух твердых изотропных цилиндрических тел с тонкими покрытиями. Рассмотрим процесс трения двух твердых изотропных тел. Пусть на поверхность одного тела нанесено покрытие начальной толщины h_{10}, а на поверхность другого — покрытие начальной толщины h_{20}, механические и теплофизические характеристики покрытий различны. Полагаем, что модули упругости самих тел значительно превосходят модули упругости покрытий, и тела по сравнению с их покрытиями можно считать абсолютно жесткими; размеры тел намного превосходят толщины покрытий h_{10} и h_{20}. Таким образом, покрытия можно считать относительно тонкими. Другие методы исследования напряженно-деформированного состояния тонких тел рассматриваются в работах [1–3]. Процесс движения тел предполагается квазистационарным.

В близкой постановке задача рассматривалась в работах [1–5], [9–11].

Предположим, что в области контакта двух тел возникает сила трения, модуль которой $\tau(t)$ связан с контактным давлением $q(t)$ нелинейной зависимостью $\tau = k(q, T)$.

Примем в качестве $k(q, T)$ следующую функцию [1–3]:

$$k(q, T) = \tau_* \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*} \right) \right] + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) T^* \left[1 - \exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*} \right) \right] \right\}, \qquad (1)$$

где τ_* — минимальное из касательных напряжений текучести материалов покрытий; k_1, k_2 — коэффициенты трения материалов покрытий; T^* — контактная температура; $\beta_1 = (1+\nu_1)(1-\nu_1)^{-1}\alpha_1$, $\beta_2 = (1+\nu_2)\times$ $\times(1-\nu_2)^{-1}\alpha_2$ — коэффициенты; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона материалов покрытий; α_1, α_2 — температурные коэффициенты линейного расширения материалов покрытий.

Вследствие трения в области контакта возникает износ поверхностей покрытий. За счет износа и термоупругих деформаций происходит изменение толщин покрытий.

Обозначим текущие значения толщин покрытий через $h_1(t)$ и $h_2(t)$. В области контакта вследствие трения происходит также тепловыделение. Если пренебречь малой долей работы сил трения, идущей на износ покрытий и на приращение их упругой энергии, то количество теплоты, выделяемой в единицу времени на единицу площади контакта, можно представить следующим соотношением:

$$Q = V\tau(t) = Vk(q, T). \qquad (2)$$

где V — модуль вектора скорости $\mathbf{v}$ движения одного тела относительно другого.

Динамическими эффектами пренебрегаем. Контактное давление в момент времени в соответствии с принципом микроскопа [12] можно считать зависящим только от координаты z.

Износ, как правило, представляет собой медленно протекающий процесс, поэтому будем считать, что функции $q(t)$, $\tau(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ являются медленно изменяющимися.

Пусть имеются два соосных цилиндра (рис. 1, поз. *1* и *2*) одного радиуса R, примыкающие один к другому торцами. Один цилиндр неподвижен, другой вращается относительно него с постоянной угловой скоростью ω, $\omega = V$. На торцах цилиндров имеются покрытия толщинами $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Ось Oz направим вдоль оси цилиндров. Так называемый третий слой [1–5, 10, 11] толщиной δ тоже имеет вид цилиндра.

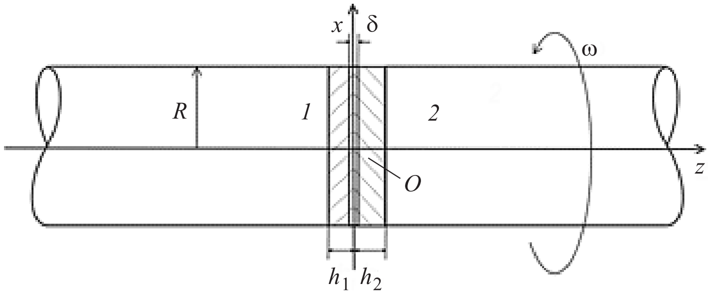

Схема контакта двух соосных цилиндров

Вследствие трения в области контакта возникает износ поверхностей покрытий и изменение их толщин за счет износа и термоупругих деформаций. Обозначим текущие значения толщин покрытий через $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Износ будем считать абразивным, тогда уменьшение толщин покрытий [13]

$$v_{1*}(t) = -l_1 \int_0^t V\tau\, d\zeta = -l_1 V \int_0^t k(q,T)\, d\zeta;\;\; v_{2*}(t) = l_2 \int_0^t V\tau\, d\zeta = l_2 V \int_0^t k(q,T)\, d\zeta, \quad (3)$$

где l_1, l_2 — коэффициенты износостойкости материалов покрытий.

Определение ресурса трибосопряжения. Допустим сначала, что функция $q(t)$ задана и найдем ресурс работы пары тел с покрытиями. Очевидно, что должны выполняться равенства

$$v_1(h_1,t) + v_{1*}(t) = -h_{10} + h_1(t);\;\; v_2(-h_2,t) + v_{2*}(t) = h_{20} - h_2(t), \quad (4)$$

где $v_i(z,t)$ — упругие перемещения точек покрытий по оси z; $v_{i*}(t)$ определяются формулами (3). Относительно $v_1(h_1,t)$ и $v_2(-h_2,t)$ отметим, что с уменьшением $h_i(t)$ справедливы асимптотические соотношения

$$v_1(h_1,t) = O(h_1);\;\; v_2(-h_2,t) = O(h_2) \quad (5)$$

(следуют из формул (13), которые будут приведены далее).

Предположим, что износ достаточно развит, тогда в соответствии с формулами (4) и (5) можно записать

$$h_{10} - l_1 V \int_0^t k\left(q\right) d\varsigma = O\left(h_1\right);\ \ h_{20} - l_2 V \int_0^t k\left(q\right) d\varsigma = O\left(h_2\right). \tag{6}$$

Определим ресурс работы трибосопряжения как время, необходимое для полного истирания одного из покрытий. Из первой формулы (6) при $h_1 = 0$ найдем некоторое время t_1, из второй формулы (6) при $h_2 = 0$ — некоторое время t_2. Тогда ресурс

$$t_* = \inf\left(t_1, t_2\right).$$

Например, при $q(t) \equiv q_* = \text{const}$ имеем

$$t_* = \inf\left[\frac{h_{10}}{l_1 V k\left(q, T\right)}, \frac{h_{20}}{l_2 V k\left(q, T\right)}\right]. \tag{7}$$

Интегральное уравнение для определения контактного давления. Пусть теперь функции $h_i\left(t\right)$ заданы, тогда функция

$$\delta\left(t\right) = h_{10} + h_{20} - h_1\left(t\right) - h_2\left(t\right), \tag{8}$$

определяющая процесс сближения оснований $z = h_1\left(t\right)$ и $z = -h_2\left(t\right)$ покрытий, также задана. Найдем, как изменяется контактное давление $q\left(t\right)$.

Вычтем первое соотношение (4) из второго, тогда в соответствии с выражением (8) получим

$$v_2\left(-h_2, t\right) - v_1\left(h_1, t\right) + v_{2*}\left(t\right) - v_{1*}\left(t\right) = \delta\left(t\right). \tag{9}$$

Для определения $v_2\left(-h_2, t\right)$ и $v_1\left(h_1, t\right)$, т. е. вертикальных упругих перемещений границ $z = h_1\left(t\right)$ и $z = -h_2\left(t\right)$ покрытий, воспользуемся, пренебрегая инерционными членами, уравнениями линейной несвязанной термоупругости [14,15].

Поскольку напряженно-деформированное состояние покрытий зависит только от координаты z и времени t (как параметра), получим

$$\frac{d^2 v_i}{dz^2} = \beta_i \frac{dT_i}{dz};\ \ \sigma_{zi} = \gamma_i \left(\frac{dv_i}{dz} - \beta_i T_i\right); \tag{10}$$

$$\beta_i = \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \alpha_i;\ \ \gamma_i = \frac{2\left(1 - \nu_i\right)}{1 - 2\nu_i} G_i,$$

где σ_{zi} — нормальные продольные напряжения; G_i — модули сдвига покрытий контактирующих тел.

Учитывая найденные выражения для температур в покрытиях [10] и интегрируя дифференциальные уравнения (10), получаем

$$v_1(z,t) = -\frac{\beta_1 T^*}{2h_1} z^2 + a_1 z + b_1 h_1;\ v_2(z,t) = \frac{\beta_2 T^*}{2h_2} z^2 + a_2 z + b_2 h_2;$$
$$\sigma_{zi} = \gamma_i\left(a_i - \beta_i T^*\right). \tag{11}$$

Здесь

$$T^* = \frac{h_1 h_2 \omega \tau_* \left(1-\exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right)}{\lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2 - \frac{1}{2} h_1 h_2 \omega\left(\beta_1+\beta_2\right)\tau_* \left(1-\exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right)}$$

является максимальной (локализирующейся вблизи внешней окружности оснований цилиндров) контактной температурой.

Функции времени a_i и b_i определим из граничных условий:

$$v_1(0,t) = v_2(0,t) = 0;\ \sigma_{y1}(0,t) = \sigma_{y2}(0,t) = -q(t). \tag{12}$$

В результате получим

$$v_1(h_1,t) = -qh_1/\gamma_1 + \beta_1 h_1 T^*/2;\ v_2(-h_2,t) = qh_2/\gamma_2 - \beta_2 h_2 T^*/2. \tag{13}$$

Подставив формулы (3) и (12) в выражение (9) и исключив T^*, получим для определения $q(t)$ при известных $h_i(t)$ (а следовательно, и при известном $\delta(t)$) нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\left(\frac{h_2}{\gamma_2}+\frac{h_1}{\gamma_1}\right)q - \frac{\beta_2 h_2^2 h_1 + \beta_1 h_1^2 h_2}{2S} V\tau_*\left(1-\exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right) + 2lV\int_0^t m(q)\,d\varsigma = \delta(t), \tag{14}$$

где

$$S = \lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2 - \frac{1}{2} h_1 h_2 V\left(\beta_1+\beta_2\right)\tau_*\left(1-\exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right);$$

$$m(q) = \left(1-\exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right) + \frac{h_1 h_2\left(1-\exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right)\left(1-\exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right)}{S}.$$

Случай относительно малого времени износа. Пусть $\delta(t)$ имеет порядок упругого перемещения для относительно малого отрезка времени $0 \le t \le t_* < \infty.$ В этом случае в уравнении (14) можно приближенно заменить $h_i(t)$ на h_{i0}. Положим также, что $k(q,T)$ имеет соответственно вид соотношения (2), а скорость износа постоянна, т. е.

$$\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 t, \tag{15}$$

где δ_0, δ_1 — некоторые заданные постоянные. Тогда интегральное уравнение (14) после перехода к безразмерным величинам

$$q' = kq / \tau_*;\ t' = Vt / (h_{20} + h_{10});\ \delta_0{}' = \delta_0 / (h_{10} + h_{20}),\ \delta_1{}' = \delta_1 / V \tag{16}$$

(штрихи далее опускаем) и комплексам

$$a = \frac{\tau_*(h_{20}\gamma_1 + h_{10}\gamma_2)}{k\gamma_1\gamma_2(h_{10} + h_{20})};\ b = V\tau_*(\beta_2 h_{20}^2 h_{10} + \beta_1 h_{10}^2 h_{20}); \tag{17}$$

$$c = -V\tau_*(\beta_2 h_{20}^2 h_{10} + \beta_1 h_{10}^2 h_{20});\ d = 2(\lambda_2 h_{10} + \lambda_1 h_{20})(h_{10} + h_{20}),$$

$$h = (l_1 + l_2)\tau_*$$

примет вид

$$qa - \frac{b}{d + c\left(1 - \exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right)}\left(1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right) + h\int_0^t m(q)d\varsigma = \delta_0 + \delta_1 t. \tag{18}$$

Интегральное уравнение (18) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$aq' - \frac{bk_1(d + c)e^{-k_1 q} - bck_2 e^{-k_2 q} + bc(k_2 - k_1)e^{-(k_1 + k_2)q}}{\left(d + c\left(1 - e^{-k_2 q}\right)\right)^2} q' + hm(q) = \delta_1 \tag{19}$$

при начальном условии

$$q_0 a - \frac{b}{d + c\left(1 - \exp\left(-\frac{k_2 q_0}{\tau_*}\right)\right)}\left(1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right) = \delta_0, \tag{20}$$

где q_0 — начальное безразмерное контактное давление.

Решения для специальных случаев. Рассмотрим случай, когда q_0 мало, и будем считать, что в рассматриваемом диапазоне времени давление $q(t)$ также мало. Линеаризуя соотношения (18) и (19), имеем

$$q'(a - bk_1 / d) + qhk_1 = \delta_1;\ q_0 a - bk_1 / ck_2 = \delta_0. \tag{21}$$

Отсюда при $a > bk_1 / d$ следует, что

$$q = \frac{\delta_1}{hk_1} + \left(\frac{\delta_0 + bk_1 / ck_2}{a - bk_1 / d} - \frac{\delta_1}{hk_1}\right)\exp\left(-\frac{hk_1 t}{a - bk_1 / d}\right). \tag{22}$$

Таким образом, $q(t)$ изменяется в пределах от $\dfrac{\delta_0 + bk_1 / ck_2}{a - bk_1 / d}$ при $t = 0$ до δ_1 / hk_1 при $t \to \infty$.

Пусть теперь q_0 велико, и будем считать, что в рассматриваемом диапазоне времени давление $q(t)$ также велико. Упрощая выражения (18) и (19), запишем

$$q' = -\frac{h\left(1 + \dfrac{h_{10}h_{20}V\tau_*}{S_0}\right) - \delta_1}{a}; \; q_0 = \frac{b/\left(d + c\right) + \delta_0}{a}, \tag{23}$$

где

$$S_0 = \lambda_2 h_{10} + \lambda_1 h_{20} - \frac{1}{2} h_{10} h_{20} V \left(\beta_1 + \beta_2\right) \tau_*.$$

Отсюда получаем

$$q = -\frac{h\left(1 + \dfrac{h_{10}h_{20}V\tau_*}{S_0}\right) - \delta_1}{a} t + \frac{b/\left(d + c\right) + \delta_0}{a}. \tag{24}$$

Условие $h\left(1 + \dfrac{h_{10}h_{20}V\tau_*}{S_0}\right) > \delta_1$ является условием катастрофического износа, поскольку если данное неравенство не выполняется, то давление линейно растет с течением времени.

Выводы. В задаче о взаимодействии цилиндрических тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры получено дифференциальное уравнение для нахождения контактного давления. Рассмотрены два частных случая: давление мало, давление велико. Для частных случаев получены выражения для контактного давления. Определен ресурс трибосопряжения. Найдено условие катастрофического износа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–56.

[2] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.

[3] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Численное моделирование и экспериментальное исследование

деформирования упругопластических пластин при смятии. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 1, с. 67–82.

[4] Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю., Щетинин А.Н. Моделирование взаимодействия тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2012, вып. 2. doi: 10.18698/2308-6033-2012-2-43

[5] Alexandrov V., Gavdzinski V. Contact interaction of deformed coverings of solids with regard for wear and friction heating. *Proc. of the Second Intern. Symp.on Thermal Stresses and Related Topics*, 1997, New York, Rochester, 1997. Pp. 371–373.

[6] Александров В.М., Губарева Е.А. Задача о взаимодействии тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. *Экологический вестник научных центров ЧЭС*, 2006, № 2, с.10–15.

[7] Александров В. М. О термосиловом взаимодействии деформируемых покрытий тел с учетом износа. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 1995, № 5, с. 70–75.

[8] Александров В.М. Абразивный износ тонкого мягкого покрытия при нелинейном законе трения с учетом тепловыделения. *Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Техн.науки*, 2001, спец. выпуск, с. 11–13.

[9] Александров В.М. Контактная задача для тел с покрытиями с учетом нелинейного трения, износа и тепловыделения от трения. *Изв. РАН. МТТ*, 2003, № 4, с.128–135.

[10] Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю., Щетинин А.Н. Моделирование взаимодействия цилиндрических и сферических тел с покрытиями при износе и тепловыделении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 3. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1232.html

[11] Губарева Е.А. Определение контактного давления в задаче о взаимодействии тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/845.html

[12] Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. Москва, Наука, 1974, 640 с.

[13] Хрущов М.М., Бабичев М.А. *Абразивное изнашивание*. Москва, Наука, 1970, 251 с.

[14] Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. *Инженерный физический журнал*, 1963, т. 6, № 10, с. 129–136.

[15] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.

Статья поступила в редакцию 28.05.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю., Щетинин А.Н. Определение контактного давления для цилиндрических тел в задаче о взаимодействии тел с покрытиями. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 6.

URL: http://engjournal.ru/catalog/mesc/fwm/1413.html

Губарева Елена Александровна родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Мозжорина Татьяна Юрьевна родилась в 1959 г., окончила МАИ в 1982 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ в области моделирования характеристик газодвигателей, моделирования полета пассажирских самолетов, оптимизации систем управления в системе летательных аппаратов.
e-mail: mozzhorina@mail.ru

Щетинин Александр Николаевич родился в 1950 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1972 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ по теории групп Ли и топологии однородных пространств.
e-mail: alex1621@bk.ru

The determination of contact pressure for the cylindrical bodies in the inter-actions of bodies and coatings

© E.A. Gubareva, T.Yu. Mozzhorina, A.N. Schetinin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The research deals with the problem of determining the contact pressure between two contacting cylindrical bodies, each body being covered with a thin coating. We consider the contact scheme between cylindrical solids and soft coatings and propose a calculation algorithm, which allows us to simplify the contact scheme of cylindrical bodies with thin elastic soft coatings for the large number of phenomena occurring in the contact area to be considered. Taking into account the previously suggested formula describing the nonlinear friction, we found the contact pressure. We determined conditions under which there is no catastrophic wear.

Keywords: *coating, friction, heat generation, contact pressure.*

REFERENCES

[1] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–56.

[2] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp.18–36.

[3] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Erasov V.S., Yakovlev N.O. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 1, pp.67–82.

[4] Gubareva E.A., Mozzhorina T.Iu., Schetinin A.N. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2012, iss. 2. doi: 10.18698/2308-6033-2012-2-43

[5] Alexandrov V., Gavdzinski V. Contact interaction of deformed coverings of solids with regard for wear and friction heating. *Proc. of the Second Intern. Symp. on Thermal Stresses and Related Topics*, 1997, New York, Rochester, 1997, pp. 371–373.

[6] Aleksandrov V.M., Gubareva E.A. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov ChES — Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2006, no. 2, pp. 10–15.

[7] Alexandrov V.M. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability*, 1995, no. 5, pp. 70–75.

[8] Alexandrov V.M. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki — Proceedings of Universities. North Caucasus Region. Technical sciences,* 2001, special issue, pp. 11–13.

[9] Alexandrov V.M. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela — Proceedings of RAS. Mechanics of solids*, 2003, no. 4, pp. 128–135.

[10] Gubareva E.A., Mozzhorina T.Yu., Schetinin A.N. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, iss. 3. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1232.html.

[11] Gubareva E.A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 7. Available at: http:// engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/845.html.

[12] Cherepanov G.P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniya* [Sharp-Crack Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 640 p.
[13] Khrushchev M.M., Babichev M.A. *Abrazivnoe iznashivanie* [Abrasive Wear]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 251 p.
[14] Podstrigach Ya.S. *Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal – Journal of Engineering Thermophysics*, 1963, vol. 6, no. 10, pp. 129–136.
[15] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum mechanics. Vol. 2. Universal laws of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

Gubareva E.A. (b. 1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, deputy head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 40 scientific publications in the field of composite mechanics, asymptotic analysis, contact mechanics. e-mail: gubare-va_ea@pochta.ru

Mozzhorina T.Yu. (b. 1959) graduated from Moscow Aviation Institute in 1982. Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of 15 publications in the field of mathematical simulation of gas-turbine engine, mathematical simulations of aircraft flight, optimization of aircraft control system.
e-mail: mozzhorina@mail.ru.

Schetinin A.N. (b.1950) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1972. Cand. Sci. (Phys.-math.), Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of Lie groups theory and the topology of homogeneous spaces. e-mail: alex1621@bk.ru