УДК 539.3

Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории упругости

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, И.С. Шалыгин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлены базовые соотношения новой теории тонких многослойных анизотропных оболочек, построенной на основании общих уравнений трехмерной теории упругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру без каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Показано, что глобальная (осредненная по определенным правилам) задача асимптотической теории оболочек близка к теории оболочек Кирхгофа — Лява, но отличается от нее определяющими соотношениями, содержащими производные второго порядка от мембранных перемещений. Решены так называемые локальные задачи теории оболочек, с помощью которых получены явные выражения для шести компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига в оболочке.

Ключевые слова: *многослойные тонкие оболочки, метод асимптотического осреднения, асимптотическая теория оболочек.*

Введение. Проблема построения уточненных теорий пластин и оболочек, позволяющих получить как можно более точное решение для напряжений, деформаций и перемещений, приближающееся к точному трехмерному решению задачи теории упругости, но при сохранении двумерности основных разрешающих дифференциальных уравнений, продолжает оставаться весьма актуальной, несмотря на значительное число работ в этой области [1–9]. В работах [2–5] предложены теории тонких пластин и оболочек, в том числе с двумерной микроструктурой (гофрированными, сотовыми и сетчатыми конструкциями), на основе метода асимптотического осреднения (метода гомогенизации), хорошо зарекомендовавшего себя при осреднении композитов с трехмерной периодической структурой [12–18]. В [2–5] вводится допущение о линейном характере перемещений по толщине.

В [19–23] разработан метод асимптотического осреднения тонких многослойных пластин без допущения гипотезы о линейности распределения перемещений, позволяющий получить явное выражение для шести компонент тензора напряжений в тонких пластинах. В [24] проведено сравнение численных решений, получаемых с помощью разработанной асимптотической теории многослойных тонких пластин и с помощью непосредственного численного решения задачи трехмерной теории упругости на основе конечно-элементного метода, реализованного в программном комплексе ANSYS. Результаты показали высокую точность разработанного метода асимптотического осреднения, для достижения которой приходится применять очень мелкие конечно-элементные сетки при использовании конечно-элементного решения трехмерной задачи теории упругости.

Целью настоящей работы является применение метода асимптотического осреднения для тонких упругих оболочек.

Уравнения трехмерной теории упругости в криволинейных координатах. В трехмерном пространстве R^3 с декартовыми координатами x_i рассмотрим поверхность Σ_0, заданную с помощью ортогональных координат $q_k(x_i)$ в виде $q_3(x_i)=0$, где $x_i \in \Sigma_{x0} \subset R^2$ — область изменения значений декартовых координат; Σ_{x0} — декартов образ поверхности.

Рассмотрим оболочку — тело, которому соответствует область $V \subset R^3$, ограниченная внешней Σ^+ и внутренней Σ^- поверхностями, уравнения которых имеют вид $q_3=-h/2,\;\; q_3=h/2$, а также торцевой поверхностью $\Sigma_т$, уравнение которой в криволинейных ортогональных координатах q_k выглядит так: $F(q_1,q_2)=0$. Соотношения $q_i=q_i(x^j)$ между криволинейными q_i и декартовыми x^j координатами будем полагать гладкими функциями. Параметр h — толщина оболочки, поверхность $q_3=0$ — срединная поверхность оболочки Σ_0, пересекающая торцевую поверхность по контуру $\partial\Sigma_0$. Будем полагать, что координатные линии q_1 и q_2 ориентированы по линиям главных кривизн срединной поверхности оболочки, а линия q_3 — по нормали к этой поверхности. Все криволинейные координаты полагаем размерными величинами — длинами дуг по соответствующим координатным направлениям.

В криволинейных координатах q_i уравнения равновесия тела (оболочки) имеют следующий вид [25]:

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(H_\beta H_\gamma \sigma_{\alpha\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(H_\alpha H_\gamma \sigma_{\alpha\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial q_\gamma}\left(H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha\gamma}\right)-$$

$$-\sigma_{\beta\beta}H_\gamma \frac{\partial H_\beta}{\partial q_\alpha}-\sigma_{\gamma\gamma}H_\beta \frac{\partial H_\gamma}{\partial q_\alpha}+\sigma_{\alpha\beta}H_\gamma \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta}+\sigma_{\alpha\gamma}H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\gamma}-H_\beta H_\gamma f_\alpha=0, \quad (1)$$

$$\alpha,\beta,\gamma=1,2,3;\;\; \alpha\neq\beta\neq\gamma.$$

Здесь $H_\alpha = \left(\sum_{\beta=1}^{3} \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha} \right)^2 \right)^{1/2}$ — параметры Ламе оболочки; $\sigma_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряжений в ортогональных координатах q_i; f_α — компоненты вектора плотности массовых сил. Запишем первые два уравнения системы (1) отдельно от третьего:

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(H_\beta H_3 \sigma_{\alpha\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(H_\alpha H_3 \sigma_{\alpha\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha 3}\right) -$$

$$- \sigma_{\beta\beta} H_3 \frac{\partial H_\beta}{\partial q_\alpha} - \sigma_{33} H_\beta \frac{\partial H_3}{\partial q_\alpha} + \sigma_{\alpha\beta} H_3 \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} + \sigma_{\alpha 3} H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_3} - H_\beta H_3 f_\alpha = 0, \quad (2)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2; \ \ \alpha \neq \beta;$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1 H_2 \sigma_{33}\right) + \frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2 H_3 \sigma_{13}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_1 H_3 \sigma_{23}\right) -$$

$$- \sigma_{11} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \sigma_{22} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \sigma_{13} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \sigma_{23} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - H_1 H_2 f_3 = 0. \quad (3)$$

Соотношения Коши, связывающие деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ композита с перемещениями u_α, в этой криволинейной системе координат q_i имеют вид [25]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_\beta} u_\beta + \frac{1}{H_\alpha H_3}\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_3} u_3; \\
2\varepsilon_{12} &= \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{u_1}{H_1}\right) + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{u_2}{H_2}\right); \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial u_3}{\partial q_3} + \frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} u_1 + \frac{1}{H_3 H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} u_2; \\
2\varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{H_\alpha}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{u_\alpha}{H_\alpha}\right) + \frac{H_3}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{u_3}{H_3}\right),
\end{aligned} \quad (4)$$

где $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ — компоненты тензора малых деформаций; u_α — компоненты вектора перемещений в криволинейных координатах q_i.

Оболочку будем считать многослойной, все слои которой ортогональны к направлению q_3, являются линейно-упругими и ортотропными, главные оси криволинейной ортотропии совпадают с координатными линиями q_i. Тогда определяющие соотношения оболочки, связывающие деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$, имеют следующий вид в криволинейной системе координат q_i:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}; \\ \sigma_{i3} &= C_{i3KL}\varepsilon_{KL} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}, \end{aligned} \tag{5}$$

где C_{ijkl} — модули упругости слоев оболочки.

На внешней и внутренней поверхностях оболочки полагаем, что задано давление $\tilde{p}_{\pm}$, на торцевой поверхности $\Sigma_{\text{т}}$ — перемещение u_{ei}:

$$\Sigma_{\text{т}} : u_i = u_{ei},$$

а на границе Σ_S раздела слоев оболочки заданы условия идеального контакта слоев оболочки:

$$\Sigma_{3\pm} : \ \sigma_{i3} = -\tilde{p}_{\pm}\delta_{i3}; \qquad \Sigma_{\text{т}} : \ u_i = u_{ei}; \qquad \Sigma_S : \ [\sigma_{i3}] = 0; \qquad [u_i] = 0 \tag{6}$$

($[u_i]$ — скачок функций), которые могут отсутствовать, например, в случае однослойной оболочки.

Основные допущения асимптотической теории. Рассмотрим очень тонкую оболочку, для которой выполняется соотношение

$$æ = h/L << 1,$$

где $æ$ — малый параметр; L — диаметр срединной поверхности Σ_0.

Введем глобальные безразмерные криволинейные координаты $\overline{q}_k$ и локальную координату ξ:

$$\overline{q}_k = q_k/L; \quad \xi = \overline{q}_3/æ.$$

Далее все функции будем рассматривать зависящими от безразмерных координат $u_i(\overline{q}_\alpha, \xi), \alpha = 1, 2,$ и полагать обезразмеренными. Используем при этом следующее правило дифференцирования от безразмерных координат:

$$L\frac{\partial}{\partial q_j}u_i(\overline{q}_\alpha, \xi) = \frac{\partial}{\partial \overline{q}_j}u_i(\overline{q}_\alpha, \xi) + \frac{1}{æ}\delta_{j3}\frac{\partial}{\partial \xi}u_i(\overline{q}_\alpha, \xi). \tag{7}$$

Примем несколько допущений:

1) рассмотрим случай, когда давление на внешних поверхностях оболочки мало́:

$$\tilde{p}_{\pm} = -æ^3 p_{\pm},$$

где $p_{\pm}$ — конечная величина давления, $p_{\pm} = O(1)$;

2) примем, что тонкая оболочка не содержит резких изломов геометрической формы, т. е. следующие производные от параметров Ламе имеют порядок более высокий, чем $O(1)$, по отношению к параметру $æ$:

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial \xi} = æ H_{\alpha 3}; \quad H_{\alpha 3} = O(1); \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial \bar{q}_\beta} = O(1); \quad H_3 = 1. \tag{8}$$

Как правило, для тонких оболочек принимают следующие стандартные допущения [18, 25]:

$$H_3 = 1; \; H_\alpha = A_\alpha \left(1 + k_\alpha q_3\right) \approx A_\alpha, \; \bar{k}_\alpha \bar{q}_3 = æ \bar{k}_\alpha \xi << 1,$$

где $A_\alpha(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности $(q_3 = 0)$; $\bar{k}_\alpha = k_\alpha L$ — ее безразмерные главные кривизны, и значит,

$$\frac{\partial H_3}{\partial \bar{q}_3} = 0; \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial \xi} = æ A_\alpha \bar{k}_\alpha; \quad H_{\alpha 3} = A_\alpha \bar{k}_\alpha; \qquad \frac{\partial H_\alpha}{\partial \bar{q}_\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial \bar{q}_\beta}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда из формулы (8) следует, что $A_\alpha L / R_\alpha = O(1)$, где $R_\alpha = 1/k_\alpha$ — радиусы главных кривизн. Сделанное допущение 2 означает, что оболочки не должны иметь малых радиусов кривизн, при которых возникает соотношение $A_\alpha L / R_\alpha = 1/æ$, т. е. радиусы кривизн должны быть много больше толщины оболочки: $h/R_\alpha \ll 1$. Тогда формулы (4) с учетом (8) можно записать так:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H_\alpha} u_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} H_{\alpha,\beta} u_\beta + \frac{1}{æ} \frac{H_{\alpha/3}}{H_\alpha} u_3; \\
\varepsilon_{12} = \frac{1}{2 H_1 H_2} (u_{1,2} H_1 - u_1 H_{1,2} + u_{2,1} H_2 - u_2 H_{2,1}); \\
\varepsilon_{33} = \frac{1}{æ} u_{3/3}; \\
2\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{æ} u_{\alpha/3} + \frac{u_{3,\alpha}}{H_\alpha} - \frac{1}{æ} \frac{H_{\alpha/3}}{H_\alpha} u_\alpha.
\end{gathered} \tag{9}$$

Асимптотические разложения для многослойной оболочки. Компоненты тензора модулей упругости $C_{\alpha\beta}(\xi)$ полагают зависящими от координаты ξ, так как этот тензор различен для разных слоев оболочки. Задача (2)–(6) содержит локальную координату ξ, а также малый параметр $æ$ в граничных условиях (это коэффициент при давлении), поэтому ее решение будем искать в виде асимптотических разложений по параметру $æ$:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \sum_{n=1}^{\infty} æ^n u_{ij}^{(n)} = u_k^{(0)}(x_I) + æ u_k^{(1)}(x_I, \xi) +$$
$$+ æ^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + æ^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \ldots \quad (10)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные прописными буквами *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, а также индексы α, β принимают значения 1, 2, причем $\alpha \neq \beta$, а индексы i, j, k, l — значения 1, 2, 3.

Подставим разложения (10) в соотношения Коши (9), используя правила дифференцирования функций локальных координат (7), и получим асимптотические разложения для деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} æ^n \varepsilon_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + æ\varepsilon_{ij}^{(1)} + æ^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots; \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} &= \frac{1}{H_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + \frac{1}{H_1 H_2} H_{\alpha,\beta} u_\beta^{(n)} + \frac{1}{H_\alpha} u_3^{(n)} H_{\alpha 3};\\
\varepsilon_{12}^{(n)} &= \frac{1}{2H_1H_2}\left(u_{1,2}^{(n)} H_1 - u_1^{(n)} H_{1,2} + u_{2,1}^{(n)} H_2 - u_2^{(n)} H_{2,1}\right);\\
\varepsilon_{33}^{(n)} &= u_{3/3}^{(n+1)};\\
2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} &= u_{\alpha/3}^{(n+1)} + \frac{u_{3,\alpha}^{(n)}}{H_\alpha} - \frac{H_{\alpha 3}}{H_\alpha} u_\alpha^{(n)}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Подставляя (11) в систему (5), получаем асимптотические разложения для напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} æ^n \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(0)} + æ\sigma_{ij}^{(1)} + æ^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \ldots; \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{IJ}^{(n)} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(n)};\\
\sigma_{i3}^{(n)} &= C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(n)}.
\end{aligned} \quad (14)$$

Формулировка локальных задач. Подставляя разложения (10) и (13) в уравнения равновесия и граничные условия системы (2), (3), получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{æ}\left(H_1H_2\sigma^{(0)}_{\alpha 3/3}\right)+\\
&+\left(\left(H_\beta\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha}\right)_{,\alpha}+\left(H_\alpha\sigma^{(0)}_{\alpha\beta}\right)_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}\sigma^{(0)}_{\alpha\beta}-H_{\beta,\alpha}\sigma^{(0)}_{\beta\beta}+\right.\\
&\left.+\left(H_\alpha H_{\beta 3}+2H_\beta H_{\alpha 3}\right)\sigma^{(0)}_{\alpha 3}+H_1H_2\sigma^{(1)}_{\alpha 3/3}-H_\beta f_\alpha\right)+\\
&+æ\left(\left(H_\beta\sigma^{(1)}_{\alpha\alpha}\right)_{,\alpha}+\left(H_\alpha\sigma^{(1)}_{\alpha\beta}\right)_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}\sigma^{(1)}_{\alpha\beta}-H_{\beta,\alpha}\sigma^{(1)}_{\beta\beta}+\right.\\
&\left.+\left(H_\alpha H_{\beta 3}+2H_\beta H_{\alpha 3}\right)\sigma^{(1)}_{\alpha 3}+H_1H_2\sigma^{(2)}_{\alpha 3/3}\right)+\\
&+æ^2\left(\left(H_\beta\sigma^{(2)}_{\alpha\alpha}\right)_{,\alpha}+\left(H_\alpha\sigma^{(2)}_{\alpha\beta}\right)_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}\sigma^{(2)}_{\alpha\beta}-H_{\beta,\alpha}\sigma^{(2)}_{\beta\beta}+\right.\\
&\left.+\left(H_\alpha H_{\beta 3}+2H_\beta H_{\alpha 3}\right)\sigma^{(2)}_{\alpha 3}+H_1H_2\sigma^{(3)}_{\alpha 3/3}\right)+\ldots=0, \qquad (15)\\
&\alpha,\beta=1,2;\\
&\Sigma_{3\pm}:\sigma^{(0)}_{i3}+æ\sigma^{(1)}_{i3}+æ^2\sigma^{(2)}_{i3}+\ldots=-æ^3p_\pm\delta_{i3};\\
&\Sigma_T:u_i=u_i^{(0)}+æu_i^{(1)}+æ^2u_i^{(2)}+æ^3u_i^{(3)}+\ldots=u_{ei};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{æ}\left(H_1H_2\sigma^{(0)}_{33/3}\right)+\\
&+\left(\left(\sigma^{(0)}_{13}H_2\right)_{,1}+\left(\sigma^{(0)}_{23}H_1\right)_{,2}-\sigma^{(0)}_{11}H_2H_{13}-\sigma^{(0)}_{22}H_1H_{23}+\right.\\
&\left.+\sigma^{(0)}_{33}\left(H_{13}H_2+H_{12}H_{13}\right)+H_1H_2\sigma^{(1)}_{33/3}-H_1H_2f\right)+\\
&+æ\left(\left(\sigma^{(1)}_{13}H_2\right)_{,1}+\left(\sigma^{(1)}_{23}H_1\right)_{,2}-\sigma^{(1)}_{11}H_2H_{13}-\sigma^{(1)}_{22}H_1H_{23}+\right.\\
&\left.+\sigma^{(1)}_{33}\left(H_{13}H_2+H_{12}H_{13}\right)+H_1H_2\sigma^{(2)}_{33/3}\right)+\ldots=0. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Приравняв в уравнениях равновесия члены при $æ^{-1}$ к нулю, а при остальных степенях от $æ$ к некоторым величинам $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}$, не зависящим от ξ_l, получим рекуррентную последовательность локальных задач:

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{(0)}_{i3/3}=0;\\
&(H_\beta\sigma^{(n-1)}_{\alpha\alpha})_{,\alpha}+(H_\alpha\sigma^{(n-1)}_{\alpha\beta})_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}\sigma^{(n-1)}_{\alpha\beta}-H_{\beta,\alpha}\sigma^{(n-1)}_{\beta\beta}+\\
&+(H_\alpha H_{\beta 3}+2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma^{(n-1)}_{\alpha 3}+H_1H_2\sigma^{(n)}_{\alpha 3/3}=h_\alpha^{(n-1)}, \qquad (17)\\
&\alpha,\beta=1,2;\\
&(H_2\sigma^{(n-1)}_{13})_{,1}+(H_1\sigma^{(n-1)}_{23})_{,2}-H_2H_{13}\sigma^{(n-1)}_{11}-H_1H_{23}\sigma^{(n-1)}_{22}+\\
&+(H_{13}H_2+H_{12}H_{13})\sigma^{(n-1)}_{33}+H_1H_2\sigma^{(n)}_{33/3}=h_3^{(n-1)};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{i3}^{(n)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(n)}; \\
\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + H_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(n)} + H_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(n)}; \\
2\varepsilon_{12}^{(n)} = O_2 u_{1,2}^{(n)} + O_1 u_{2,1}^{(n)} - O_1 O_2 (H_{1,2} u_1^{(n)} + H_{2,1} u_2^{(n)}); \\
\varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)}; \\
2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} = u_{\alpha/3}^{(n+1)} - H_{\alpha 3} O_\alpha u_\alpha^{(n)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(n)}; \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(3)} = -p_\pm \delta_{i3}; \\
\Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(n)}] = 0, \quad [u_i^{(n+1)}] = 0; \quad < u_i^{(n+1)} >= 0,
\end{gathered}
\tag{17}
$$

где обозначено $O_\alpha = 1/H_\alpha$ и введена операция осреднения по толщине оболочки $< u_i^{(n)} > = \int\limits_{-0,5}^{0,5} u_i^{(n)} d\xi.$

Уравнения равновесия (15), (16) после введения функций $h_i^{(0)}$, $h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ принимают вид

$$
\sum_{n=0}^{\infty} æ^n h_i^{(n)} = h_i^{(0)} + æ h_i^{(1)} + æ^2 h_i^{(2)} + \ldots = 0.
$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (17) при $n = 0$ являются функции $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ (напряжения $\sigma_{ij}^{(n)} = 0, n < 0$), которые зависят от локальных координат ξ_l и входных данных этой задачи — перемещений $u_j^{(0)}(x_J)$. Решением задачи (17) при $n = 1$ для первого приближения являются функции $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$, а $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ в этой задаче — входные данные. В задаче (17) для второго приближения при $n = 2$ функции $u_j^{(3)}, \varepsilon_{kl}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ — неизвестные, а $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ — входные данные и т. д.

Решение задачи нулевого приближения. Ввиду того что задачи (17) являются одномерными по локальной переменной ξ, их решение можно найти аналитически. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче нулевого приближения имеет вид

$$
\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \forall \xi : -0,5 < \xi < 0,5. \tag{18}
$$

Подставляя в (18) определяющее соотношение (четвертая группа уравнений из (17)) для $\sigma_{i3}^{(0)}$, получаем

$$
C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)} = 0.
$$

Выразим из этой системы уравнений деформации $\varepsilon_{k3}^{(0)}$:

$$\varepsilon_{k3}^{(0)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{19}$$

где C_{k3i3}^{-1} — матрица компонент, обратная к C_{i3k3}. Подставляя в (19) выражения для деформаций $\varepsilon_{k3}^{(0)}$ из (12), получаем

$$u_{\alpha/3}^{(1)} = -2C_{\alpha 3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + H_{\alpha 3} O_\alpha u_\alpha^{(0)} - O_\alpha u_{3,\alpha}^{(0)}, \qquad \alpha = 1, 2;$$

$$u_{3/3}^{(1)} = -C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}. \tag{20}$$

После интегрирования уравнений (20) с учетом условий $< u_i^{(1)} > = 0$ находим перемещения $u_i^{(1)}$:

$$u_\alpha^{(1)} = -< O_\alpha >_\xi u_{3,\alpha}^{(0)} + < H_{\alpha 3} O_\alpha >_\xi u_\alpha^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} < C_{\alpha 3i3}^{-1} C_{i3KL} >_\xi;$$

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon_{KL}^{(0)} < C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} >_\xi. \tag{21}$$

Здесь учтено, что деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}(x_J)$, согласно (12), не зависят от координаты ξ. Также здесь введено обозначение для следующей операции:

$$< C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} >_\xi = \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi - < \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi >. \tag{22}$$

Подставляя выражение (19) в первую группу соотношений (14), находим, что напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$ в отличие от напряжений $\sigma_{i3}^{(0)}$ являются ненулевыми:

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)}; \tag{23}$$

$$C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{IJk3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL}.$$

Решение задач первого, второго и третьего приближений. Решение уравнений равновесия в системе (15), (16) вместе с граничными условиями на поверхности Σ_s и значением координаты $\xi = -0,5$ имеет вид

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = O_1 O_2 (-\int_{-0,5}^{\xi} ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} -$$

$$- H_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} + (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3}) \sigma_{\alpha 3}^{(0)}) d\xi + h_\alpha^{(0)} (\xi + 0,5)); \tag{24}$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = O_1 O_2 (-\int\limits_{-0,5}^{\xi} ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} -$$

$$- H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(1)} + (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(1)})d\xi + h_\alpha^{(1)}(\xi + 0,5)); \qquad (25)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(3)} = O_1 O_2 (-\int\limits_{-0,5}^{\xi} ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} -$$

$$- H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(2)} + (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(2)})d\xi; \qquad (26)$$

$$\sigma_{33}^{(3)} = O_1 O_2 (-\int\limits_{-0,5}^{\xi} ((H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13}\sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23}\sigma_{22}^{(2)} +$$

$$+ (H_{13}H_2 + H_{12}H_{13})\sigma_{33}^{(2)})d\xi + h_3^{(2)}(\xi + 0,5)) - p_-.$$

Условия существования решения (24)–(26) задач (15), (16), удовлетворяющих граничным условиям $\sigma_{i3}^{(1)} = 0$, $\sigma_{i3}^{(2)} = 0$, $\sigma_{i3}^{(3)} = -p_+$ на внешней поверхности $\xi = 0,5$, приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$:

$$h_\alpha^{(0)} = < ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}) +$$

$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(0)} >; \qquad (27)$$

$$h_\alpha^{(1)} = < ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(1)} +$$

$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(1)}) >; \qquad (28)$$

$$h_\alpha^{(2)} = < ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(2)} +$$

$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(2)}) >; \qquad (29)$$

$$h_3^{(2)} = < (H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13}\sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23}\sigma_{22}^{(2)} +$$

$$+ (H_{13}H_2 + H_{12}H_{13})\sigma_{33}^{(2)} > -\Delta p, \ \Delta p = p_+ - p_-.$$

С учетом формул (27)–(29) выражения для напряжений $\sigma_{i3}^{(m)}$ (24)–(26) принимают вид

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -O_1 O_2 < ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}) +$$

$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(0)} >_\xi; \qquad (30)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = -O_1 O_2 < ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} -$$

$$- H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(1)} + (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(1)}) >_\xi; \qquad (31)$$

$$\sigma_{\alpha3}^{(3)} = -O_1O_2 < ((H_\beta\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)})_{,\alpha} + (H_\alpha\sigma_{\alpha\beta}^{(2)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} -$$
$$-H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(2)} + (H_\alpha H_{\beta3} + 2H_\beta H_{\alpha3})\sigma_{\alpha3}^{(2)}) >_\xi;$$

$$\sigma_{33}^{(2)} = -O_1O_2 < (H_2\sigma_{13}^{(1)})_{,1} + (H_1\sigma_{23}^{(1)})_{,2} - H_2H_{13}\sigma_{11}^{(1)} -$$
$$-H_1H_{23}\sigma_{22}^{(1)} + H_{13}(H_2 + H_{12})\sigma_{33}^{(1)} >_\xi;$$

$$\sigma_{33}^{(3)} = -O_1O_2 < (H_2\sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1\sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2H_{13}\sigma_{11}^{(2)} -$$
$$-H_1H_{23}\sigma_{22}^{(2)} + H_{13}(H_2 + H_{12})\sigma_{33}^{(2)} >_\xi -(p_- + O_1O_2\Delta p(\xi + 0,5)).$$

В формулах (30), (31) $\alpha = 1, 2, 3.$ Если подставить выражения (23) в (30), для сдвиговых напряжений $\sigma_{\alpha3}^{(1)}$ получим следующую формулу:

$$\sigma_{\alpha3}^{(1)} = -O_1O_2 \int_{-0,5}^{\xi} (< (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}(H_\beta\varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\alpha} + C_{\alpha\beta KL}^{(0)}(H_\alpha\varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\beta} +$$
$$+ (H_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta KL}^{(0)} - H_{\beta,\alpha}C_{\beta\beta KL}^{(0)})\varepsilon_{KL}^{(0)}) > - (C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}(H_\beta\varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\alpha} +$$
$$+C_{\alpha\beta KL}^{(0)}(H_\alpha\varepsilon_{KL}^{(0)})_{,\beta} + (H_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta KL}^{(0)} - H_{\beta,\alpha}C_{\beta\beta KL}^{(0)})\varepsilon_{KL}^{(0)}))d\xi, \ \ \alpha = 1, 2,$$

или, раскрывая скобки в подынтегральном выражении:

$$\sigma_{\alpha3}^{(1)} = -O_1O_2(\int_{-0,5}^{\xi} (< (H_\beta C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} + H_\alpha C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} +$$
$$+ (2H_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha}(C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)}))\varepsilon_{KL}^{(0)}) > -$$
$$- (H_\beta C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} + H_\alpha C_{\alpha\beta KL}^{(0)}\varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} + (2H_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta KL}^{(0)} +$$
$$+ H_{\beta,\alpha}(C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)}))\varepsilon_{KL}^{(0)}))d\xi, \ \ \alpha = 1, 2. \tag{32}$$

Используя обозначение (22), формулу (32) можно переписать так:

$$\sigma_{\alpha3}^{(1)} = -O_1O_2(\varepsilon_{KL}^{(0)} < (2H_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha}(C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) >_\xi +$$
$$+ \varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} < H_\beta C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} >_\xi + \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} < H_\alpha C_{\alpha\beta KL}^{(0)} >_\xi), \ \ \alpha = 1, 2. \tag{33}$$

Из формулы (30) при $\alpha = 3$ следует, что нормальное напряжение $\sigma_{33}^{(1)}$ тождественно равно нулю:

$$\sigma_{33}^{(1)} \equiv 0 \tag{34}$$

в силу того, что $\sigma_{i3}^{(0)} = 0.$

Выразив деформации $\varepsilon_{k3}^{(1)}$ из соотношений (14), с учетом формул (33) и (34) получим

$$\varepsilon_{k3}^{(1)}=-C_{i3k3}^{-1}C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)}+C_{i3k3}^{-1}\sigma_{i3}^{(1)}=$$

$$=-C_{i3k3}^{-1}C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)}-\sum_{\alpha=1}^{2}C_{\alpha3k3}^{-1}O_1O_2(\varepsilon_{KL}^{(0)}<(2H_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta KL}^{(0)}+$$

$$+H_{\beta,\alpha}(C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}-C_{\beta\beta KL}^{(0)}))>_{\xi}+$$

$$+\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)}<H_{\beta}C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}>_{\xi}+\varepsilon_{KL,\beta}^{(0)}<H_{\alpha}C_{\alpha\beta KL}^{(0)}>_{\xi}). \tag{35}$$

Если подставить формулу (35) в первую группу соотношений (14), то найдем оставшиеся напряжения первого приближения:

$$\sigma_{IJ}^{(1)}=C_{IJKL}^{(0)}\varepsilon_{KL}^{(1)}-C_{IJk3}C_{i3k3}^{-1}C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)}-\sum_{\alpha=1}^{2}C_{IJk3}C_{\alpha3k3}^{-1}O_1O_2(\varepsilon_{KL}^{(0)}<$$

$$<(2H_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta KL}^{(0)}+H_{\beta,\alpha}(C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}-C_{\beta\beta KL}^{(0)}))>_{\xi}+$$

$$+\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)}<H_{\beta}C_{\alpha\alpha KL}^{(0)}>_{\xi}+\varepsilon_{KL,\beta}^{(0)}<H_{\alpha}C_{\alpha\beta KL}^{(0)}>_{\xi}). \tag{36}$$

Деформации $\varepsilon_{KL}^{(1)}$ с учетом формул (12) и (21) можно представить в виде

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)}=O_{\alpha}(-<O_{\alpha,\alpha}>_{\xi}u_{3,\alpha}^{(0)}-<O_{\alpha}>_{\xi}u_{3,\alpha\alpha}^{(0)}+$$

$$+(<H_{\alpha3}>_{\xi}O_{\alpha})_{,\alpha}u_{\alpha}^{(0)}+<H_{\alpha3}>_{\xi}O_{\alpha}u_{\alpha,\alpha}^{(0)}-2\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)}<C_{\alpha3i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi})+$$

$$+H_{\alpha,\beta}O_1O_2(-<O_{\beta}>_{\xi}u_{3,\beta}^{(0)}+<H_{\beta3}O_{\beta}>_{\xi}u_{\beta}^{(0)}-2\varepsilon_{KL}^{(0)}<C_{\beta3i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi})+$$

$$+H_{\alpha3}O_{\alpha}(-\varepsilon_{KL}^{(0)}<C_{33i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi});$$

$$2\varepsilon_{12}^{(1)}=O_1O_2(H_1(-(<O_{1,2}>_{\xi}u_{3,1}^{(0)}+<O_1>_{\xi}u_{3,12}^{(0)})+(<H_{13}O_1>_{\xi})_{,2}u_1^{(0)}+$$

$$+<H_{13}O_1>_{\xi}u_{1,2}^{(0)}-2\varepsilon_{KL,2}^{(0)}<C_{13i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi})+$$

$$+H_2(-<O_{2,1}>_{\xi}u_{3,2}^{(0)}-<O_2>_{\xi}u_{3,21}^{(0)}+(<H_{23}O_2^{(0)}>_{\xi})_{,1}u_2^{(0)}+$$

$$+<H_{23}O_2^{(0)}>_{\xi}u_{2,1}^{(0)}-2\varepsilon_{KL,1}^{(0)}<C_{23i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi})-$$

$$-H_{1,2}(-<O_1>_{\xi}u_{3,1}^{(0)}+<H_{13}O_1>_{\xi}u_1^{(0)}-2\varepsilon_{KL}^{(0)}<C_{13i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi})-$$

$$-H_{2,1}(-<O_2>_{\xi}u_{3,2}^{(0)}+<H_{23}O_2>_{\xi}u_2^{(0)}-2\varepsilon_{KL}^{(0)}<C_{23i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi})).$$

Тогда напряжения (36) принимают вид:

$$\sigma_{IJ}^{(1)}=C_{IJ\alpha\alpha}^{(0)}(O_{\alpha}(-<O_{\alpha,\alpha}>_{\xi}u_{3,\alpha}^{(0)}-<O_{\alpha}>_{\xi}u_{3,\alpha\alpha}^{(0)}+(<H_{\alpha3}>_{\xi}O_{\alpha})_{,\alpha}u_{\alpha}^{(0)}+$$

$$+<H_{\alpha3}>_{\xi}O_{\alpha}u_{\alpha,\alpha}^{(0)}-2\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)}<C_{\alpha3i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi})+H_{\alpha,\beta}O_1O_2(-<O_{\beta}>_{\xi}u_{3,\beta}^{(0)}+$$

$$+<H_{\beta3}O_{\beta}>_{\xi}u_{\beta}^{(0)}-2\varepsilon_{KL}^{(0)}<C_{\beta3i3}^{-1}C_{i3KL}>_{\xi})+$$

$$+H_{\alpha 3}O_{\alpha}(-\varepsilon_{KL}^{(0)} < C_{33i3}^{-1}C_{i3KL} >_{\xi})) + \frac{1}{2}C_{IJ12}^{(0)}O_1O_2(H_1(-(< O_{1,2} >_{\xi} u_{3,1}^{(0)} +$$

$$+ < O_1 >_{\xi} u_{3,12}^{(0)}) + +(< H_{13}O_1 >_{\xi})_{,2}u_1^{(0)} + < H_{13}O_1 >_{\xi} u_{1,2}^{(0)} -$$

$$-2\varepsilon_{KL,2}^{(0)} < C_{13i3}^{-1}C_{i3KL} >_{\xi}) + H_2(- < O_{2,1} >_{\xi} u_{3,2}^{(0)} - < O_2 >_{\xi} u_{3,21}^{(0)} +$$

$$+(< H_{23}O_2^{(0)} >_{\xi})_{,1}u_2^{(0)} + < H_{23}O_2^{(0)} >_{\xi} u_{2,1}^{(0)} - 2\varepsilon_{KL,1}^{(0)} < C_{23i3}^{-1}C_{i3KL} >_{\xi}) -$$

$$-H_{1,2}(- < O_1 >_{\xi} u_{3,1}^{(0)} + < H_{13}O_1 >_{\xi} u_1^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} < C_{13i3}^{-1}C_{i3KL} >_{\xi}) -$$

$$-H_{2,1}(- < O_2 >_{\xi} u_{3,2}^{(0)} + < H_{23}O_2 >_{\xi} u_2^{(0)} - 2\varepsilon_{KL}^{(0)} < C_{23i3}^{-1}C_{i3KL} >_{\xi})) +$$

$$-C_{IJk3}C_{i3k3}^{-1}O_1O_2(\varepsilon_{KL}^{(0)} < (2H_{\alpha,\beta}C_{\alpha\beta KL}^{(0)} + H_{\beta,\alpha}(C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} - C_{\beta\beta KL}^{(0)})) >_{\xi} +$$

$$+\varepsilon_{KL,\alpha}^{(0)} < H_{\beta}C_{\alpha\alpha KL}^{(0)} >_{\xi} + \varepsilon_{KL,\beta}^{(0)} < H_{\alpha}C_{\alpha\beta KL}^{(0)} >_{\xi}). \qquad (37)$$

Осредненные уравнения равновесия многослойных оболочек. Осредним асимптотические разложения (16) уравнений равновесия и учтем граничные условия $\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} = 0,\quad \sigma_{i3}^{(1)} = 0,\quad \sigma_{i3}^{(2)} = 0,$ $\sigma_{i3}^{(3)} = -p_{\pm}\delta_{i3}$, тогда получим

$$< ((H_{\beta}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(0)} +$$
$$+(H_{\alpha}H_{\beta 3} + 2H_{\beta}H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(0)}) > +\text{æ} < ((H_{\beta}\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} +$$
$$+(H_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(1)} +$$
$$+(H_{\alpha}H_{\beta 3} + 2H_{\beta}H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(1)}) > +\text{æ}^2(< ((H_{\beta}\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)})_{,\alpha} +$$
$$+(H_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}^{(2)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(2)} +$$
$$(H_{\alpha}H_{\beta 3} + 2H_{\beta}H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(2)}) > -H_1H_2\Delta p\delta_{\alpha 3}) + \ldots = 0;$$

$$< (H_2\sigma_{13}^{(0)})_{,1} + (H_1\sigma_{23}^{(0)})_{,2} - H_2H_{13}\sigma_{11}^{(0)} - H_1H_{23}\sigma_{22}^{(0)} +$$
$$+(H_{13}H_2 + H_{12}H_{13})\sigma_{33}^{(0)} > +\text{æ} < (H_2\sigma_{13}^{(1)})_{,1} + (H_1\sigma_{23}^{(1)})_{,2} -$$
$$-H_2H_{13}\sigma_{11}^{(1)} - H_1H_{23}\sigma_{22}^{(1)} + (H_{13}H_2 + H_{12}H_{13})\sigma_{33}^{(1)} > +$$
$$+\text{æ}^2(< (H_2\sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1\sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2H_{13}\sigma_{11}^{(2)} - H_1H_{23}\sigma_{22}^{(2)} +$$
$$+(H_{13}H_2 + H_{12}H_{13})\sigma_{33}^{(2)} > -H_1H_2\Delta p) + \ldots = 0.$$

Домножив уравнения равновесия системы (15) на $\xi\text{æ}$ и проинтегрировав их по толщине, получим следующее вспомогательное уравнение:

$$æ(<\xi((H_\beta\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha})_{,\alpha}+(H_\alpha\sigma^{(0)}_{\alpha\beta})_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}\sigma^{(0)}_{\alpha\beta}-H_{\beta,\alpha}\sigma^{(0)}_{\beta\beta}+$$
$$+(H_\alpha H_{\beta3}+2H_\beta H_{\alpha3})\sigma^{(0)}_{\alpha3})>-<H_1H_2\sigma^{(1)}_{\alpha3}>)+$$
$$+æ^2(<\xi((H_\beta\sigma^{(1)}_{\alpha\alpha})_{,\alpha}+(H_\alpha\sigma^{(1)}_{\alpha\beta})_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}\sigma^{(1)}_{\alpha\beta}-H_{\beta,\alpha}\sigma^{(1)}_{\beta\beta}+$$
$$+(H_\alpha H_{\beta3}+2H_\beta H_{\alpha3})\sigma^{(1)}_{\alpha3})>-<H_1H_2\sigma^{(2)}_{\alpha3}>)+\ldots=0,$$

где учтено, что $<\xi H_1H_2\sigma^{(n)}_{\alpha3/3}>=-<H_1H_2\sigma^{(n)}_{\alpha3}>$.

Введем обозначения для усилий T_{IJ}, моментов M_{IJ} и перерезывающих сил Q_I в оболочке:

$$T_{IJ}=<\sigma^{(0)}_{IJ}>+æ<\sigma^{(1)}_{IJ}>+\ldots;$$
$$M_{IJ}=æ<\xi\sigma^{(0)}_{IJ}>+æ^2<\xi\sigma^{(1)}_{IJ}>+\ldots; \qquad (38)$$
$$Q_I=æ<\sigma^{(1)}_{I3}>+æ^2<\sigma^{(2)}_{I3}>+\ldots.$$

В силу (18) $<\sigma^{(0)}_{I3}>=0,$ поэтому эти слагаемые в (38) далее можно не учитывать. Тогда, группируя соответствующие члены с разными степенями от $æ$, стоящие при H_β, $H_{\alpha,\beta}$ и др., и учитывая, что эти параметры Ламе не зависят от координаты ξ, получаем

$$(H_\beta T_{\alpha\alpha})_{,\alpha}+(H_\alpha T_{\alpha\beta})_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}T_{\alpha\beta}-H_{\beta,\alpha}T_{\beta\beta}=0;$$
$$(H_\beta M_{\alpha\alpha})_{,\alpha}+(H_\alpha M_{\alpha\beta})_{,\beta}+H_{\alpha,\beta}M_{\alpha\beta}-H_{\beta,\alpha}M_{\beta\beta}-H_1H_2Q_\alpha=0; \qquad (39)$$
$$(H_2Q_1)_{,1}+(H_1Q_2)_{,2}-H_2H_{13}T_{11}-H_1H_{23}T_{22}-H_1H_2\Delta\bar{p}=0.$$

Это и есть искомые осредненные уравнения равновесия многослойной оболочки, где обозначено $\Delta\bar{p}=æ^2\Delta p$. Формально эти уравнения в точности совпадают с классическими осредненными уравнениями теории оболочек Кирхгофа — Лява [25].

Осредненные определяющие соотношения теории оболочек. Подставляя выражения (23), (33) для напряжений $\sigma^{(0)}_{IJ}$, $\sigma^{(1)}_{IJ}$ в формулы (38), получаем

$$T_{IJ}=<C^{(0)}_{IJKL}>\varepsilon^{(0)}_{KL}+æ<(C^{(0)}_{IJ\alpha\alpha}(O_\alpha(-<O_{\alpha,\alpha}>_\xi u^{(0)}_{3,\alpha}-<O_\alpha>_\xi u^{(0)}_{3,\alpha\alpha}+$$
$$+(<H_{\alpha3}>_\xi O_\alpha)_{,\alpha}u^{(0)}_\alpha+<H_{\alpha3}>_\xi O_\alpha u^{(0)}_{\alpha,\alpha}-2\varepsilon^{(0)}_{KL,\alpha}<C^{-1}_{\alpha3i3}C_{i3KL}>_\xi)+$$
$$+H_{\alpha,\beta}O_1O_2(-<O_\beta>_\xi u^{(0)}_{3,\beta}+<H_{\beta3}O_\beta>_\xi u^{(0)}_\beta-$$
$$-2\varepsilon^{(0)}_{KL}<C^{-1}_{\beta3i3}C_{i3KL}>_\xi)+H_{\alpha3}O_\alpha(-\varepsilon^{(0)}_{KL}<C^{-1}_{33i3}C_{i3KL}>_\xi))+$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}C^{(0)}_{IJ12}O_1O_2(H_1(-(<O_{1,2}>_\xi u^{(0)}_{3,1}+<O_1>_\xi u^{(0)}_{3,12})+\\
&+(<H_{13}O_1>_\xi)_{,2}u_1^{(0)}+<H_{13}O_1>_\xi u^{(0)}_{1,2}-2\varepsilon^{(0)}_{KL,2}<C^{-1}_{13i3}C_{i3KL}>_\xi)+\\
&+H_2(-<O_{2,1}>_\xi u^{(0)}_{3,2}-<O_2>_\xi u^{(0)}_{3,21}+(<H_{23}O_2^{(0)}>_\xi)_{,1}u_2^{(0)}+\\
&+<H_{23}O_2^{(0)}>_\xi u^{(0)}_{2,1}-2\varepsilon^{(0)}_{KL,1}<C^{-1}_{23i3}C_{i3KL}>_\xi)-\\
&-H_{1,2}(-<O_1>_\xi u^{(0)}_{3,1}+<H_{13}O_1>_\xi u_1^{(0)}-2\varepsilon^{(0)}_{KL}<C^{-1}_{13i3}C_{i3KL}>_\xi)-\\
&-H_{2,1}(-<O_2>_\xi u^{(0)}_{3,2}+<H_{23}O_2>_\xi u_2^{(0)}-2\varepsilon^{(0)}_{KL}<C^{-1}_{23i3}C_{i3KL}>_\xi))+\\
&-\sum_{\alpha=1}^{2}C_{IJk3}C^{-1}_{\alpha3k3}O_1O_2(\varepsilon^{(0)}_{KL}<(2H_{\alpha,\beta}C^{(0)}_{\alpha\beta KL}+H_{\beta,\alpha}(C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}-C^{(0)}_{\beta\beta KL}))>_\xi+\\
&+\varepsilon^{(0)}_{KL,\alpha}<H_\beta C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}>_\xi+\varepsilon^{(0)}_{KL,\beta}<H_\alpha C^{(0)}_{\alpha\beta KL}>_\xi))>;
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
&M_{IJ}=\ae<\xi C^{(0)}_{IJKL}>\varepsilon^{(0)}_{KL}+\ae^2<(C^{(0)}_{IJ\alpha\alpha}(O_\alpha(-<O_{\alpha,\alpha}>_\xi u^{(0)}_{3,\alpha}-\\
&-<O_\alpha>_\xi u^{(0)}_{3,\alpha\alpha}+(<H_{\alpha3}>_\xi O_\alpha)_{,\alpha}u_\alpha^{(0)}+<H_{\alpha3}>_\xi O_\alpha u^{(0)}_{\alpha,\alpha}-\\
&-2\varepsilon^{(0)}_{KL,\alpha}<C^{-1}_{\alpha3i3}C_{i3KL}>_\xi)+H_{\alpha,\beta}O_1O_2(-<O_\beta>_\xi u^{(0)}_{3,\beta}+\\
&+<H_{\beta3}O_\beta>_\xi u_\beta^{(0)}-2\varepsilon^{(0)}_{KL}<C^{-1}_{\beta3i3}C_{i3KL}>_\xi)+\\
&+H_{\alpha3}O_\alpha(-\varepsilon^{(0)}_{KL}<C^{-1}_{33i3}C_{i3KL}>_\xi))+\frac{1}{2}C^{(0)}_{IJ12}O_1O_2(H_1(-\\
&-(<O_{1,2}>_\xi u^{(0)}_{3,1}+<O_1>_\xi u^{(0)}_{3,12})+(<H_{13}O_1>_\xi)_{,2}u_1^{(0)}+\\
&+<H_{13}O_1>_\xi u^{(0)}_{1,2}-2\varepsilon^{(0)}_{KL,2}<C^{-1}_{13i3}C_{i3KL}>_\xi)+\\
&+H_2(-<O_{2,1}>_\xi u^{(0)}_{3,2}-<O_2>_\xi u^{(0)}_{3,21}+(<H_{23}O_2^{(0)}>_\xi)_{,1}u_2^{(0)}+\\
&+<H_{23}O_2^{(0)}>_\xi u^{(0)}_{2,1}-2\varepsilon^{(0)}_{KL,1}<C^{-1}_{23i3}C_{i3KL}>_\xi)-\\
&-H_{1,2}(-<O_1>_\xi u^{(0)}_{3,1}+<H_{13}O_1>_\xi u_1^{(0)}-2\varepsilon^{(0)}_{KL}<C^{-1}_{13i3}C_{i3KL}>_\xi)-\\
&-H_{2,1}(-<O_2>_\xi u^{(0)}_{3,2}+<H_{23}O_2>_\xi u_2^{(0)}-2\varepsilon^{(0)}_{KL}<C^{-1}_{23i3}C_{i3KL}>_\xi))+\\
&-C_{IJk3}C^{-1}_{i3k3}O_1O_2(\varepsilon^{(0)}_{KL}<(2H_{\alpha,\beta}C^{(0)}_{\alpha\beta KL}+H_{\beta,\alpha}(C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}-C^{(0)}_{\beta\beta KL}))>_\xi+\\
&+\varepsilon^{(0)}_{KL,\alpha}<H_\beta C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}>_\xi+\varepsilon^{(0)}_{KL,\beta}<H_\alpha C^{(0)}_{\alpha\beta KL}>_\xi))>;
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_I=\ae(-O_1O_2(\varepsilon^{(0)}_{KL}<(2H_{\alpha,\beta}C^{(0)}_{\alpha\beta KL}+H_{\beta,\alpha}(C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}-C^{(0)}_{\beta\beta KL}))>_\xi+\\
&+\varepsilon^{(0)}_{KL,\alpha}<H_\beta C^{(0)}_{\alpha\alpha KL}>_\xi+\varepsilon^{(0)}_{KL,\beta}<H_\alpha C^{(0)}_{\alpha\beta KL}>_\xi))+\ae^2<\sigma^{(2)}_{I3}>.
\end{aligned}
$$

Осредненная система уравнений для многослойных оболочек. Подставляя выражения (40), (41) и следующие кинематические соотношения из (12):

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} = \frac{1}{H_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^{(0)} + \frac{1}{H_1 H_2} H_{\alpha,\beta} u_\beta^{(0)} + \frac{1}{H_\alpha} u_3^{(0)} H_{\alpha 3};$$
$$\varepsilon_{12}^{(0)} = \frac{1}{2H_1 H_2} (u_{1,2}^{(0)} H_1 - u_1^{(0)} H_{1,2} + u_{2,1}^{(0)} H_2 - u_2^{(0)} H_{2,1}) \qquad (42)$$

в систему (39), получаем итоговую систему уравнений теории оболочек относительно трех неизвестных функций $u_I^{(0)}$ и $u_3^{(0)}$.

Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в оболочке. После того как решена осредненная система уравнений (39) и найдены функции $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, вычисляем деформации (42), а затем напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$ (23). Сдвиговые напряжения $\sigma_{I3}^{(0)}$ и поперечное напряжение $\sigma_{33}^{(0)}$, как было установлено, в оболочке тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются, согласно (33), у следующего члена асимптотического разложения — $\sigma_{I3}^{(1)}$. Поэтому с точностью до членов порядка $æ^2$ выражение для сдвиговых напряжений в оболочке имеет вид

$$\sigma_{\alpha 3} = æ(-O_1 O_2 < ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)})_{,\alpha} + (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}) +$$
$$+ (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(0)} >_\xi) + æ^2(-O_1 O_2 < ((H_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)})_{,\alpha} +$$
$$+ (H_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(1)})_{,\beta} + H_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - H_{\beta,\alpha}\sigma_{\beta\beta}^{(1)} + (H_\alpha H_{\beta 3} + 2H_\beta H_{\alpha 3})\sigma_{\alpha 3}^{(1)}) >_\xi),$$

где функции $\sigma_{IJ}^{(0)}$ вычисляют по (23), $\sigma_{I3}^{(1)}$ — по (33), $\sigma_{\beta\beta}^{(1)}$ — по формулам (37).

Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение — это значение $\sigma_{33}^{(2)}$, которое вычисляют согласно (33), (34):

$$\sigma_{33} = æ^2(-O_1 O_2 < (H_2 \sigma_{13}^{(1)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(1)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(1)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(1)} >_\xi) +$$
$$+ æ^3(-O_1 O_2 < (H_2 \sigma_{13}^{(2)})_{,1} + (H_1 \sigma_{23}^{(2)})_{,2} - H_2 H_{13} \sigma_{11}^{(2)} - H_1 H_{23} \sigma_{22}^{(2)} +$$
$$+ (H_{13} H_2 + H_{12} H_{13}) \sigma_{33}^{(2)} >_\xi - (p_- + O_1 O_2 \Delta p (\xi + 0,5))).$$

Таким образом, разработанная асимптотическая теория тонких оболочек позволяет найти шесть компонент тензора напряжений с математической степенью точности, т. е. полученные соотношения для напряжений в оболочке представляют собой асимптотически точное выражение напряжений общей трехмерной теории упругости.

Выводы. Разработанная авторами асимптотическая теория тонких многослойных анизотропных оболочек построена без каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине на основе анализа уравнений трехмерной теории оболочек в криволинейной системе координат. В рамках предложенной теории сформулированы и решены локальные задачи теории упругости нулевого, первого, второго и третьего приближений. Осредненные уравнения равновесия многослойных оболочек, полученные с помощью разработанной теории, для случая ортотропии формально в точности совпадают с осредненными уравнениями теории оболочек Кирхгофа — Лява.

Разработанная теория позволяет найти распределение шести компонент тензора напряжений в оболочке.

Исследование выполнено за счет гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-5961.2015.8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов. *Механика композитных материалов*, 1988, № 4, с. 698–704.

[2] Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2006, № 6, с. 71–79.

[3] Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины. *Вычислительная механика сплошной среды*, 2011, т. 4, № 2, с. 128–139.

[4] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.

[5] Акимова Е. А., Назаров С. А., Чечкин Г. А. Асимптотика решения задачи о деформации произвольной локально периодической пластины. Тр. Моск. математ. о-ва, 65, Москва, УРСС, 2004, с. 3–34; англ. пер.: Akimova E.A., Nazarov S.A., Chechkin G. A. Asymptotics of the Solution of the Problem of Deformation of an Arbitrary Locally Periodic thin Plate, Trans. Mosc. Math. Soc., 2004, 1–29.

[6] Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 2, с. 308–321.

[7] Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит. *Прикладная математика и механика*, 2003, т. 67, вып. 3, с. 472–483.

[8] Kohn R.V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Structures*, 1984, vol. 20 (4), pp. 333–350.

[9] Панасенко Г.П., Резцов М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине. *Докл. АН СССР*, 1987, т. 294, № 5, с. 1061–1065.

[10] Levinski T., Telega J.J. *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*. Singapore, London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.

[11] Kolpakov A.G. *Homogenized Models for Thin-Walled Nonhomogeneous Structures with Initial Stresses*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2004, 228 p.

[12] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов.* Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1984, 336 с.

[13] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984. 356 с.
[14] Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. Москва, Мир, 1984, 472 с.
[15] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–108.
[16] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 1, с. 102–116.
[17] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 5, с. 3–20.
[18] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of Composites under High Temperatures*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 1999, 347 p.
[19] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.
[20] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.
[21] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
[22] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин. *Наука и образование: электронное научно-техническое издание,* 2014, № 10, с. 359–382. doi: 10.7463/1014.0730105.
[23] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 18–36.
[24] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html
[25] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4: Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 580 с.

Статья поступила в редакцию 05.05.2015.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Шалыгин И.С. Теория тонких оболочек, основанная на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5.

URL: http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1406.html

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 300 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, газодинамики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Шалыгин Иван Сергеевич — студент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: ishalygin@yandex.ru

Thin sells theory based on the asymptotic analysis of three-dimensional equations of the elasticity theory

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, I.S. Shalygin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents main relations for a new theory of thin multilayer anisotropic shells. The main equations of the shell theory suggested were deduced from general three-dimensional theory of elasticity by means of asymptotic expansions over small parameter without any hypothesis concerning displacement and stress distribution over thickness. It is shown that the averaged problem of the shell theory developed proves to be similar to the Kirchhoff—Love shell theory, but there are some differences in constitutive relations, that contain derivatives for membrane strains. The method suggested allows one to calculate all six stress tenor components including transverse normal stresses and stresses of interlayer shear of thin elastic shells.

Keywords: *viscoelastic composites laminated fibrous composites, elastic-dissipative properties, steady vibrations, tangent of loss angle, complex elastic modules, method of asymptotic averaging.*

REFERENCES

[1] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Mekhanika kompozitnykh materialov — Mechanics of Composite Materials*, 1988, vol. 24, no. 4, pp. 698–704.

[2] Sheshenin S.V. *Izv. RAN. MTT — Proc. of the Russ. Acad. Sci. Mech. Rigid Body*, 2006, no. 6, pp. 71–79.

[3] Sheshenin S.V., Khodos O.A. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnoi sredy — Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 128–139.

[4] Nazarov S.A, Sweers G.H, Slutskij A.S. *Matematicheskiy sbornik — Sbornik: Mathematics*., 2011, vol. 202, no. 8, pp. 41–80.

[5] *Akimova E.A., Nazarov S.A., Chechkin G.A.* Asymptotics of the solution of the problem of deformation of an arbitrary locally periodic thin plate. *Trans. Mosc. Math. Soc*., 2004, pp. 1–29.

[6] *Zveryaev E.M., Makarov G.I. PMM — J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 308–321.

[7] Zveryaev E.M. *PMM — J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, iss. 3, pp. 472– 483.

[8] Kohn R.V., Vogelyus M. *Int. J. Solids and Struct*., 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.

[9] Panasenko G.P., Reztsov M.V. *Dokl. AN SSSR — Reports of Acad. Sci. USSR*, 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065.

[10] Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. Singapore, London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.

[11] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 228 p.

[12] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov MST Publ., 1984, 336 p.

[13] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging of processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 356 p.

[14] Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Moscow, Mir Publ., 1984, 471 p. (in Russ.).

[15] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman MSTU. Series: Natural sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–108.

[16] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman MSTU. Series: Natural sciences*, 2007, no. 1, pp. 102–116.

[17] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe Modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20.

[18] Dimitrienko Yu.I. *Thermomechanics of Composites under High Temperatures*. Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, 1999, 347 p.

[19] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman MSTU. Series: Natural sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–100.

[20] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompositsionnykh materialov i konstruktsiy — Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.

[21] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.

[22] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 10. doi: 10.7463/1014.0730105. pp. 359–382.

[23] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp.18–36.

[24] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html

[25] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.

Dimitrienko Yu.I. (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci.(Phys. & Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Gubareva E.A. (b. 1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. Author 40 scientific publications in the field of composite mechanics, asymptotic analisys, ocontact mechanics. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Shalygin I.S. (b. 1993) student of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: ishalygin@yandex.ru