

## Моделирование слоистых композитов с конечными деформациями методом асимптотической гомогенизации

© Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Д.Ю. Кольжанова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Рассмотрена задача моделирования характеристик слоистых композитов с конечными деформациями по характеристикам отдельных слоев, имеющая важное значение для проектирования резинотехнических деталей, эластомерных конструкций и др. Предложен вариант метода асимптотической гомогенизации для слоистых упругих композитов с конечными деформациями и периодической структурой, при этом использовано предложенное Ю.И. Димитриенко универсальное представление определяющих соотношений для слоев композита, объединяющее в себе комплекс различных нелинейно-упругих моделей. Разработан численный метод решения задачи на ячейке периодичности для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями, реализованный в виде программного кода на языке C++. Метод позволяет рассчитывать эффективные диаграммы деформирования слоистых композитов с конечными деформациями, связывающие компоненты осредненных тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа и градиента деформаций. Представленный пример расчета демонстрирует реализуемость и эффективность разработанного метода расчета упругих характеристик слоистых композитов с конечными деформациями.*

**Ключевые слова:** слоистые композиты, конечные деформации, метод асимптотической гомогенизации, тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, градиент деформации, универсальные модели определяющих соотношений.

**Введение.** Композиционные материалы, состоящие из резиноподобных или эластомерных матриц, способных выдерживать без разрушения большие деформации (100 % и более), и жестких армирующих наполнителей типа тканей, дисперсных частиц, высокопрочных волокон, представляют значительный интерес для промышленности [1–6]. В частности, к материалам такого типа относятся резинокордные материалы, активно применяемые в шинной промышленности, а также эластомерные теплозащитные материалы, наполненные микросферами [7]. Необходимость расчета характеристик в области больших деформаций возникает даже для «традиционных» композитов, образованных намоткой волокон, если углы намотки заметно отличаются от нуля [8, 9]. Расчет точных эффективных упругих характеристик таких композитов с конечными деформациями — достаточно сложная задача ввиду сильной физической нелинейности механического поведения фаз композита, а также геометрической нелинейности задачи. Работ, которые посвящены решению этой задачи, немного [3, 8, 9].

В настоящей работе предложен метод расчета диаграмм деформирования слоистых композитов с конечными деформациями на основе асимптотической теории гомогенизации (осреднения) нелинейно-упругих композитов с периодической структурой, обобщенной для случая конечных деформаций. Метод асимптотического осреднения достаточно хорошо развит, численное моделирование микромеханики композитов успешно реализовано, но главным образом для линейных задач [10–17]. Для построения метода асимптотического осреднения в случае конечных деформаций в настоящей работе использованы универсальные представления моделей нелинейно-упругих сред с конечными деформациями, предложенные Ю.И. Димитриенко [18–20]. Получены аналитические решения локальных задач для слоистых композитов с конечными деформациями. Для численной реализации этих решений применен метод вложенной оптимизации. Представлены примеры численного расчета слоистых композитов с конечными деформациями.

**Исходная задача нелинейной упругости для композитов с периодической структурой и конечными деформациями.** Обозначим эйлеровы (декартовы) координаты каждой материальной точки в отсчетной и актуальной конфигурациях как  $x^k$  и  $x^k$ , а лагранжевы координаты как  $X^i$  и будем полагать лагранжевы координаты совпадающими с декартовыми:  $X^i = x^i$ . Рассмотрим неоднородную упругую твердую среду  $V$  с конечными деформациями, которая в отсчетной конфигурации  $K$  обладает периодической структурой (композит) и для которой можно выделить повторяющийся элемент — ячейку периодичности (ЯП)  $V_\xi$ , состоящую из  $N$  компонентов:  $V_{\alpha\xi}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , где  $\xi$  — локальная лагранжева координата в отсчетной конфигурации  $K$ .

Рассмотрим для такой неоднородной среды задачу нелинейной теории упругости в лагранжевом описании в общей формулировке, представленной в [18–20], с использованием универсальных моделей — так называемых моделей  $A_n$ , предложенных Ю.И. Димитриенко, для сред с конечными деформациями (все компоненты векторов и тензоров отнесены к неподвижному ортонормированному базису  $e_k$  — отсчетной конфигурации  $K$ ):

$$\nabla_i P^{ij} + \rho f^j = 0, \quad X^i \in V; \quad (1)$$

$$P^{ij} = \mathcal{F}^{0ij(n)}(F^{kl}, X^m), \quad X^i \in V \cup \Sigma; \quad (2)$$

$$F^k_l = \delta_l^k + \nabla_l u^k, \quad X^i \in V \cup \Sigma; \quad (3)$$

$$n_i[P^{ij}] = 0, \quad [u^i] = 0, \quad X^i \in \Sigma_{\alpha\beta}; \quad (4)$$

$$n_i P^{ij} = t_e^j, \quad X^i \in \Sigma_1, \quad u^i = u_e^i, \quad X^i \in \Sigma_2. \quad (5)$$

Здесь (1) — уравнения равновесия; (2) — определяющие соотношения нелинейно-упругой среды; (3) — кинематическое соотношение; (4) — условия идеального контакта на поверхностях раздела  $\Sigma_{\alpha\beta}$   $\alpha$ -й и  $\beta$ -й компонент композита; (5) — граничные условия на частях  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  внешней поверхности композита ( $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial V$ ). В уравнениях (1)–(5) обозначено:  $[P^{ij}]$  — скачок функций на границе раздела  $\Sigma_{\alpha\beta}$  компонент композита;  $\rho$  — плотность; компоненты:  $P^{ij}$  — тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа,  $F^k_l$  — тензора градиента деформаций,  $u^k$  — вектора перемещений,  $n_i$  — вектора нормали к поверхности в  $K$ ,  $t_e^j$  — вектора поверхностных усилий,  $u_e^i$  — вектора заданных перемещений поверхности,  $f^j$  — вектора плотности массовых сил,  $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial X^i}$  — набла-оператора, а также  $\mathcal{F}^{0ij(n)}$  — тензора определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита, который для моделей  $A_n$  упругих сред с конечными деформациями имеет сложный неявно заданный вид [18–20] и зависит от компонент градиента деформаций  $F^k_l$  и лагранжевых координат (разрывным образом)  $X^i$ :

$$\mathcal{F}^{0ij(n)}(F^k_l, X^m) = \rho(X^m) E^{0ijsq(n)}(F^k_l) \Psi_{sq}(C^{np}, X^m); \quad (6)$$

$$C^{np} = \frac{1}{n-3} \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_{\gamma}^{n-3} Q_{\gamma}^n Q_{\gamma}^p - \frac{1}{n-3} \delta^{np};$$

$$E^{0ijsq(n)}(F^k_l) = \sum_{\gamma, \omega=1}^3 E_{\gamma\omega}^0 Q_{\gamma}^i Q_{\omega}^j Q_{\omega}^s Q_{\gamma}^q;$$

$$\Psi_{sq}^{(n)}(C^{np}, X^m) = \frac{\partial}{\partial C^{np}} \Psi^{(n)}(C^{np}, X^m).$$

Здесь  $\Psi^{(n)}(C^{np}, X^m)$  — упругий потенциал (различный для каждого компонента композита и поэтому зависящий явно от  $X^i$ );  $C^{np}$  — компоненты симметричного тензора энергетических деформаций;  $E^{0ijsq}$  — компоненты тензора энергетической эквивалентности [18, 19];  $Q_\gamma^i(F_l^k)$ ,  $Q_\omega^j(F_l^k)$  — матрицы собственных векторов левого и правого тензоров искажений (являются неявными функциями только от  $F_l^k$ );  $E_{\gamma\omega}^0(\lambda_\gamma)$  — функции собственных значений  $\lambda_\gamma$  тензоров искажений (собственные значения  $\lambda_\gamma$  также являются функциями только от компонент тензора  $F_l^k$ ).

Решение задачи (1)–(5) отыскивают относительно поля вектора перемещений  $u^k = u^k(X^i)$ , после нахождения которого координаты произвольной точки композита вычисляют по формуле  $x^k(X^i) = x^k(X^i) + u^k(X^i)$ .

**Асимптотические разложения в теории конечных деформаций.** Рассмотрим слоистый композит, который в отсчетной конфигурации представляет собой систему параллельных слоев, ортогональных к направлению  $OX^3$  и периодически повторяющихся таким образом, что можно ввести ЯП — набор из конечного числа слоев суммарной толщиной  $l$ . Введем малый параметр  $\kappa = l/L \ll 1$  как отношение толщины ЯП  $l$  к общей толщине композита  $L$  (размеры определены для отсчетной конфигурации  $K^0$ ), а также введем локальную лагранжеву координату  $\xi$  в  $K^0$ , которая связана с координатами  $X^i$  соотношениями

$$\xi = \frac{\bar{X}^3}{\kappa}; \quad \bar{X}^i = \frac{X^i}{L}. \quad (7)$$

Положим, что локальная координата в ЯП изменяется в диапазоне  $-0,5 \leq \xi \leq 0,5$ , а границы раздела слоев обозначим как  $\xi = \xi_\alpha$ ,  $\alpha = 1..n-1$ .

В силу периодичности структуры композита его плотность  $\rho$  и тензор определяющих соотношений  $\mathcal{F}^{0ij}$  (6) можно рассматривать как периодические функции локальной координаты:  $\mathcal{F}^{0ij}(F^k_l, \xi)$ .

Решение задачи (1)–(5) относительно вектора перемещений будем искать в виде квазипериодической функции координат, т. е. периодической функции локальной лагранжевой координаты, зависящей от глобальных лагранжевых координат:

$$u^k = u^k(X^i, \xi), \quad u^k(X^i, \xi) = u^k(X^i, \xi + a), \quad (8)$$

где  $a$  — произвольное целое число.

Дифференцирование квазипериодических функций  $f^k(X^i, \xi)$  осуществляем по формальным правилам дифференцирования сложной функции и с учетом (7) имеем

$$\nabla_i^0 u^k = u^k_{,i} + \frac{1}{\kappa} u^k_{|3} \delta_{i3}, \quad (9)$$

где

$$u^k_{,i} = \frac{\partial}{\partial X^i} u^k(X^l, \xi); \quad u^k_{|3} = \frac{\partial}{\partial \xi} u^k(X^l, \xi).$$

Будем искать решение задачи (1)–(5) для композита периодической структуры в виде асимптотических разложений по параметру  $\kappa$ :

$$u^k(X^i, \xi) = u^k_{(0)}(X^i) + \kappa u^k_{(1)}(X^i, \xi) + \kappa^2 \dots \quad (10)$$

Представление (10) означает, что в данной задаче допускаемые перемещения композита с периодической структурой могут быть конечными только на «глобальных» расстояниях порядка  $L$ , а на расстояниях порядка  $l$ , т. е. в рамках каждой ЯП, допускаются лишь малые перемещения порядка  $O(\kappa)$ , однако деформации в ЯП могут быть конечными.

Подставляя (10) в (3) с учетом (9), находим асимптотическое разложение для градиента деформации

$$F^k_l = F^k_{l(0)}(X^i, \xi) + \kappa F^k_{l(1)}(X^i, \xi) + \kappa^2 \dots; \quad (11)$$

$$F^k_{l(0)}(X^i, \xi) = \delta^k_l + u^k_{,i(0)} + u^k_{|3(1)} \delta_{i3}; \quad F^k_{l(1)} = u^k_{,i(1)} + u^k_{|3(2)} \delta_{i3}. \quad (12)$$

Подставляя разложение (11) в (2) и используя формулу Тейлора, находим асимптотические разложения определяющих соотношений и тензора Пиолы — Кирхгофа:

$$P^{ij} = P^{ij(0)}(X^k, \xi) + \kappa P^{ij(1)}(X^k, \xi) + \kappa^2 \dots; \quad (13)$$

$$P^{ij(0)} = \mathcal{F}^{0ij(n)}(F_l^k(0), \xi); \quad P^{ij(1)} = \frac{\partial}{\partial F_l^k(0)} \mathcal{F}^{0ij(n)}(F_l^k(0), \xi) F_l^k(1).$$

После подстановки разложения (13) в (1) с учетом (7) получаем асимптотическое разложение уравнений равновесия и граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} P^{ij(0)}|_3 \delta_{i3} + (P^{ij(0)},_i + P^{ij(1)}|_3 \delta_{i3} + \rho f^j) + \\ + \kappa (P^{ij(1)},_i + P^{ij(2)}|_3 \delta_{i3}) + \kappa^2 \dots = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$n_3 [P^{3j(0)}] + \kappa n_3 [P^{3j(1)}] + \kappa^2 \dots = 0; \quad [u^{k(0)}] + \kappa [u^{k(1)}] + \kappa^2 \dots = 0,$$

$$X^i \in \overset{0}{\Sigma}_{\alpha\beta}; \quad (15)$$

$$n_3 P^{3j(0)} + \kappa n_3 P^{3j(1)} + \kappa^2 \dots = t_e^j, \quad X^i \in \overset{0}{\Sigma}_1;$$

$$u^{k(0)} + \kappa u^{k(1)} + \kappa^2 \dots = u_e^i, \quad X^i \in \overset{0}{\Sigma}_2.$$

**Локальные задачи нелинейной теории упругости.** Приравнивая в (14), (15) члены при одинаковых степенях  $\kappa$  к нулю, получаем рекуррентную последовательность  $L_\kappa$  локальных задач нелинейной упругости. Задача  $L_0$  имеет следующий вид:

$$P^{3j(0)}|_3 = 0; \quad (16)$$

$$P^{ij(0)} = \mathcal{F}^{0ij(n)}(F_l^k(0), \xi); \quad (17)$$

$$F_l^k(0)(X^i, \xi) = \bar{F}_l^k + u^{k(1)}|_3 \delta_{l3}; \quad (18)$$

$$[P^{3j(0)}] = 0, \quad [u^{k(1)}] = 0, \quad \xi = \xi_\alpha, \quad \alpha = 1..n-1; \quad (19)$$

$$\langle u^{k(1)} \rangle = 0; \quad (20)$$

$$\left[ [u^{k(1)}] \right]_3 = 0. \quad (21)$$

Здесь введена операция осреднения по ЯП  $\overset{0}{V}_\xi$ :

$$\langle u^{k(1)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} u^{k(1)} d\xi$$

и обозначен средний градиент деформаций

$$\bar{F}_l^k = \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l}.$$

Наличие условия (20) вызвано требованием единственности задачи на ЯП и делает эту задачу интегродифференциальной. Условие (21) означает периодичность неизвестных функций на границе ЯП:  $\left[ \left[ u^{k(1)} \right] \right]_3 = u^{k(1)} \Big|_{\xi=0,5} - u^{k(1)} \Big|_{\xi=-0,5} = 0$ . Задача  $L_0$  рассматривается относительно неизвестных перемещений  $u^{k(1)}$ . Средний тензор-градиент деформаций  $\bar{F}_l^k$  рассматривается как «входные данные» локальной задачи  $L_0$ .

Локальная задача  $L_1$  имеет вид

$$P^{ij(0)}_{,i} + P^{ij(1)} \Big|_3 \delta_{i3} + \rho f^j = 0; \quad (22)$$

$$P^{ij(1)} = \frac{\partial}{\partial F_l^k(0)} \mathcal{F}^{0ij}(F_l^k(0), \xi) F_l^k(1); \quad (23)$$

$$F_l^k(1) = u^{k(1)}_{,l} + u^{k(2)} \Big|_3 \delta_{l3}; \quad (24)$$

$$[P^{3j(1)}] = 0, [u^{k(1)}] = 0, \xi = \xi_\alpha, \alpha = 1..n-1,$$

$$\langle u^{k(2)} \rangle = 0, \left[ \left[ u^{k(2)} \right] \right]_3 = 0. \quad (25)$$

Эта система уравнений рассматривается относительно перемещений  $u^{k(2)}$  и является относительно них линейной.

**Осредненная задача нелинейной теории упругости для композита.** В силу периодичности функций на ЯП имеет место соотношение

$$\langle P^{3j(0)} \Big|_3 \rangle = P^{3j(0)} \Big|_{\xi=0,5} - P^{3j(0)} \Big|_{\xi=-0,5} = 0. \quad (26)$$

Осредняя систему уравнений (12), (18), (22), с учетом (26) получаем осредненную задачу нелинейной упругости для композита:

$$\langle P^{ij(0)} \rangle_{,i} + \langle \rho f^j \rangle = 0; \quad (27)$$

$$\langle P^{ij(0)} \rangle = \langle \mathcal{F}^{0ij}(F_l^k(0), \xi) \rangle; \quad (28)$$

$$\langle F_l^k(0)(X^i, \xi) \rangle = \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l}; \quad (29)$$

$${}^0 n_i \langle P^{ij(0)} \rangle = \langle t_e^j \rangle; \quad X^i \in \Sigma_1; \quad u^{k(0)} = \langle u_e^i \rangle; \quad X^i \in \Sigma_2. \quad (30)$$

Осредненный градиент деформации  $\langle F_l^k \rangle$  в силу периодичности функций  $u^{k(1)}$  совпадает со средним градиентом деформаций  $\bar{F}_l^k$ . В задаче (27)–(30) предполагается, что перемещение  $u^{k(1)}$ , являющееся решением задачи  $L_0$ , может быть представлено как функция локальных координат и «входных данных задачи» — среднего градиента деформаций, поэтому, согласно (18), в виде такой же зависимости может быть представлен и градиент  $F_l^{k(0)}(X^i, \xi)$  нулевого приближения, т. е.

$$u^{k(1)} = u^{k(1)}(\bar{F}_s^m, \xi); \quad F_l^{k(0)} = F_l^{k(0)}(\bar{F}_s^m, \xi). \quad (31)$$

Подставляя (31) в (29) и (28), получаем осредненные определяющие соотношения композита, записанные в неявной форме:

$$\langle P^{ij(0)} \rangle = \bar{F}^{0ij(n)}(\bar{F}_l^k); \quad (32)$$

$$\bar{F}^{0ij(n)}(\bar{F}_l^k) = \langle \bar{F}^{0ij(n)}(\bar{F}_l^k + u^{k(1)}(\bar{F}_l^k, \xi^m))_3 \delta_{l3} \rangle. \quad (33)$$

**Решение локальной задачи нулевого приближения.** Эта задача (16)–(21) является нелинейной, но одномерной, в ней все функции зависят только от координаты  $\xi$ , поэтому можно найти формальное решение этой задачи.

Интегрируя уравнения равновесия (16), получаем, что напряжения  $P^{3j(0)}$  постоянны в ЯП:

$$P^{3j(0)} = C^j = \text{const}, \quad (34)$$

где  $C^j$  — постоянные интегрирования.

Из уравнения (18) следует, что среди девяти компонент градиента деформаций  $F_l^{k(0)}$  от координаты  $\xi$  зависят только три компоненты:

$$F_3^k(0) = \bar{F}_3^k + u^{k(1)}|_3, \quad (35)$$

а остальные шесть совпадают с компонентами среднего градиента

$$F_L^k(0) = \bar{F}_L^k, \quad L = 1, 2. \quad (36)$$

Тогда, подставляя (35), (36) в (34), получаем систему трех нелинейных алгебраических уравнений, которую можно рассматривать относительно трех компонент  $F_3^k(0)$ :



$$C^j = \mathcal{F}^{03j} (F_3^{k(0)}, \bar{F}_L^k, \xi).$$

Запишем формальное решение этой системы в виде

$$F_3^{k(0)} = \mathcal{G}^k (C^j, \bar{F}_L^k, \xi). \quad (37)$$

Подставим в формулу (37) выражение (35) и получим систему трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно перемещений  $u^{k(1)}$ :

$$\bar{F}_3^k + u^{k(1)}|_3 = \mathcal{G}^k (C^j, \bar{F}_L^k, \xi), \quad (38)$$

которую легко интегрировать:

$$u^{k(1)} = \int_{-0,5}^{\xi} \mathcal{G}^k (C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) d\xi - \bar{F}_3^k \xi + B^k, \quad (39)$$

где  $B^k$  — константы интегрирования.

Заметим, что условия идеального контакта (19) для функций (39) и (34) автоматически выполняются. Подставляя (39) в условие нормировки (20), находим константы  $B^k$ :

$$B^k = \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} \mathcal{G}^k (C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) d\xi \right\rangle.$$

После подстановки выражения (39) в условие периодичности (21), получаем уравнение

$$\left\langle \mathcal{G}^k (C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) \right\rangle = \bar{F}_3^k,$$

которое можно рассматривать как нелинейное алгебраическое уравнение относительно констант  $C^j$ .

Запишем формальное решение этого уравнения в виде

$$C^j = \mathcal{S}^j (\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k).$$

Тогда из (18) и (38) находим соотношение между градиентом  $F_l^{k(0)}$  и средним градиентом  $\bar{F}_j^k$ :

$$F_l^{k(0)} = \bar{F}_l^k + (\mathcal{G}^k (\mathcal{S}^j (\bar{F}_3^k, \bar{F}_l^k), \bar{F}_l^k, \xi) - \bar{F}_3^k) \delta_{l3}. \quad (40)$$

Подставляя выражение (40) в (33) и интегрируя его по ЯП, находим эффективные определяющие соотношения (32) для слоистого композита, где

$$\bar{F}^{0ij}(\bar{F}_m^k) = \langle \bar{F}^{0ij}(\bar{F}_l^k + (\mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_l^k), \bar{F}_l^k, \xi) - \bar{F}_3^k)\delta_{l3}, \xi) \rangle. \quad (41)$$

**Метод численного расчета.** Функции  $\bar{F}^{03j}(F_{3\alpha}^k(0), \bar{F}_L^k, \xi)$  для слоистого композита являются кусочно-постоянными по аргументу  $\xi$ :

$$\bar{F}^{03j}(F_{3\alpha}^k(0), \bar{F}_L^k, \xi) = \bar{F}^{03j}_\alpha(F_{3\alpha}^k(0), \bar{F}_L^k), \quad \xi \in V_\alpha,$$

где  $V_\alpha = \{\xi: \xi_{\alpha-1} < \xi < \xi_\alpha\}$  —  $\alpha$ -слой;  $h_\alpha = \xi_\alpha - \xi_{\alpha-1}$  — толщина  $\alpha$ -слоя, поэтому и значения градиента  $F_{3\alpha}^k(0) = \text{const}$  являются постоянными для каждого слоя.

Тогда может быть предложен следующий алгоритм численного нахождения эффективных определяющих соотношений (41).

1. Выбираем значения девяти компонент осредненного градиента  $\bar{F}_m^k = \{\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k\}$  из куба значений  $0 < \bar{F}_m^k < \bar{F}_{\max}^k$ .
2. Выбираем значения констант  $C^j$ , имеющих смысл «напряжений»  $P^{3j}$ , из некоторой области (куба) значений  $C_{\min}^j < C^j < C_{\max}^j$ .
3. При фиксированных значениях  $C^j$  и  $\bar{F}_L^k$  ищем решение уравнений

$$C^j = \bar{F}^{03j}_\alpha(F_{3\alpha}^k(0), \bar{F}_L^k) \quad (42)$$

для каждого  $\alpha$ -слоя относительно функций  $F_{3\alpha}^k(0) = \text{const}$ .

Решение уравнения (42) ищем методом минимизации функционала невязки: 1) выбираем начальные значения  $F_{3\alpha}^k(0) = \text{const}$ , по ним вычисляем значения функций  $\bar{F}^{03j}_\alpha(F_{3\alpha}^k(0), \bar{F}_L^k)$ ; 2) вычисляем невязку  $\left| C^j - \bar{F}^{03j}_\alpha(F_{3\alpha}^k(0), \bar{F}_L^k) \right|$ , сравниваем ее с полученной на предыдущей итерации, выбираем минимальное значение и переходим к следующему шагу согласно тому или иному численному методу решения задачи минимизации невязки:

$$\left| C^j - \mathcal{F}^{03j}_{\alpha} \left( F^k_{3\alpha}{}^{(0)}, \bar{F}_L^k \right) \right| \rightarrow \min,$$

$$F^k_{3\alpha}{}^{(0)}$$

в итоге находим значения  $F^k_{3\alpha}{}^{(0)}$  для каждого слоя.

4. Найденные значения  $F^k_{3\alpha}{}^{(0)}$  представляют собой значения обратной функции  $F^k_{3\alpha}{}^{(0)} = \mathcal{G}^k_{\alpha} \left( C^j, \bar{F}_L^k \right)$  для каждого слоя, поэтому, осредняя это выражение, получаем некоторое значение  $\hat{F}_3^k$ :

$$\langle \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{G}^k_{\alpha}(C^j, \bar{F}_L^k) h_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N F^k_{3\alpha}{}^{(0)} h_{\alpha} \equiv \hat{F}_3^k$$

(где  $h_{\alpha}$  — толщины слоев), которое может отличаться от истинного значения градиента  $\bar{F}_3^k$ .

5. Образует относительное отклонение этих векторов — еще одну невязку  $\left| \hat{F}_3^k - \bar{F}_3^k \right|$  — и организуем цикл итерации, в котором будем изменять значения  $C^j$  таким образом, чтобы доставить минимум вектору ошибки:

$$\left| \hat{F}_3^k - \bar{F}_3^k \right| \rightarrow \min.$$

В результате получим вторую задачу минимизации в трехмерном пространстве  $C^j$ , для которой этапы 2–4 являются внутренними и повторяются. Реализовав численный алгоритм решения второй задачи (например, методом градиентного спуска), находим значения  $\hat{C}^j$ .

6. Этим значениям  $\hat{C}^j$  соответствуют значения компонент  $\hat{F}_{3\alpha}^k{}^{(0)}$ , вычисленные по пп.1–3. Подставляя эти значения в определяющие соотношения (41):

$$P^{ij(0)} = \mathcal{F}^{0ij} \left( \hat{F}_3^k{}^{(0)}, \bar{F}_I^k, \xi \right), \quad (43)$$

получаем распределения напряжений в композите.

7. Осредняя уравнение (43), получаем осредненные определяющие соотношения:

$$\bar{P}^{ij(0)} = \langle \mathcal{F}^{0ij} \left( \hat{F}_3^k{}^{(0)}, \bar{F}_I^k, \xi \right) \rangle.$$

Поскольку значение  $\hat{F}_3^{k(0)}$  зависит от значения  $\hat{C}^J$ , а они, в свою очередь, являются функциями  $\bar{F}_3^k$  и  $\bar{F}_I^k$ , то эти осредненные определяющие соотношения формально можно записать так:

$$\bar{P}^{ij} = \langle \mathcal{F}^{0ij}(\hat{F}_3^{k(0)}, \bar{F}_I^k, \xi) \rangle \equiv \bar{\mathcal{F}}^{0ij}(\bar{F}_3^k, \bar{F}_I^k).$$

**Линейные модели  $A_n$ .** Рассмотрим пример, когда все слои композита могут быть описаны линейной моделью  $A_n$  [18, 19], но с разными коэффициентами. Тогда для всех слоев определяющие соотношения (6) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi(C^{np}, \xi) &= \frac{1}{2} l_1(\xi) (I_1(C^{is}))^2 + l_2(\xi) (I_1(C^{is} C_s^k)); \\ \mathcal{F}^{0ij} &= E^{0ijsq} \sum_{\gamma=1}^2 \Phi_{\gamma} I_{\gamma Csq}; \\ I_{1Csq} &= \delta_{sq}, \quad I_{2Csq} = \delta_{sq} I_1(C^{kl}) - C_{sq}; \\ \Phi_1 &= J(l_1 + 2l_2) I_1(C^{is}), \quad \Phi_2 = -2l_2 J, \quad J = \frac{\rho}{\det F} = \frac{1}{\rho}; \\ C^{np} &= \frac{1}{n-3} \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_{\gamma}^{n-3} Q_{\gamma}^n Q_{\gamma}^p - \frac{1}{n-3} \delta^{np}; \\ E^{0ijkl} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \overset{\circ}{E}_{\alpha\beta} Q_{\alpha}^i Q_{\beta}^j \overset{\circ}{Q}_{\beta}^k \overset{\circ}{Q}_{\alpha}^l, \quad E_{\alpha\beta}^{\circ} = \frac{\rho}{\lambda_{\alpha}} \overset{\circ}{E}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь  $l_1(\xi), l_2(\xi)$  — константы модели, различные для каждого слоя композита;  $I_1 = I_1(C^{is})$  — первый инвариант энергетического тензора деформаций  $C_{sq}$ . Компоненты матрицы  $E_{\alpha\beta}^{\circ}$  вычисляют по формулам [18–20]:

$$\begin{aligned} \text{I } E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}}; \quad \text{II } E_{\alpha\beta} = \frac{2}{\lambda_{\alpha} + \lambda_{\beta}}; \quad \text{III } E_{\alpha\beta} = 1; \\ \text{IV } E_{\alpha\beta} &= \frac{2\lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}}{\lambda_{\alpha} + \lambda_{\beta}}; \quad \text{V } E_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}. \end{aligned}$$

В системе (44) собственные значения  $\lambda_\alpha$  и матрицы Якоби  $\overset{\circ}{Q}_\alpha^i$ ,  $Q_\alpha^i$  собственных векторов  $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_\alpha = \overset{\circ}{Q}_\alpha^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{p}_\alpha = Q_\alpha^i \mathbf{e}_i$  являются функциями компонент  $F^{ij}$  градиента деформации в декартовом базисе  $\mathbf{e}_i$  и могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} \det(F^i_l F^k_j \delta_{ik} - \lambda_\alpha^2 \delta_{lj}) &= 0; \\ (F^i_l F^k_j \delta_{ik} - \lambda_\alpha^2 \delta_{lj}) \overset{\circ}{Q}_\alpha^i &= 0; \\ (F^i_l F^k_j \delta^{lj} - \lambda_\alpha^2 \delta^{ik}) \delta_{km} Q_\alpha^m &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Для численного расчета собственных значений  $\lambda_\alpha$  и матриц Якоби  $\overset{\circ}{Q}_\alpha^i$ ,  $Q_\alpha^i$  был использован метод вращений [21]. В качестве дополнительных уравнений к (45) используются условия нормировки:  $\overset{\circ}{Q}_\alpha^i \overset{\circ}{Q}_\alpha^j \delta_{ij} = 1$ ,  $Q_\alpha^i Q_\alpha^j \delta_{ij} = 1$ .

**Пример численного расчета.** Для модели материала  $A_1$  ( $n = 1$ ) согласно предложенному методу были проведены численные расчеты. Была разработана программа расчета на языке C++, позволяющая реализовать решение цепочки систем нелинейных алгебраических уравнений методом многомерной оптимизации.

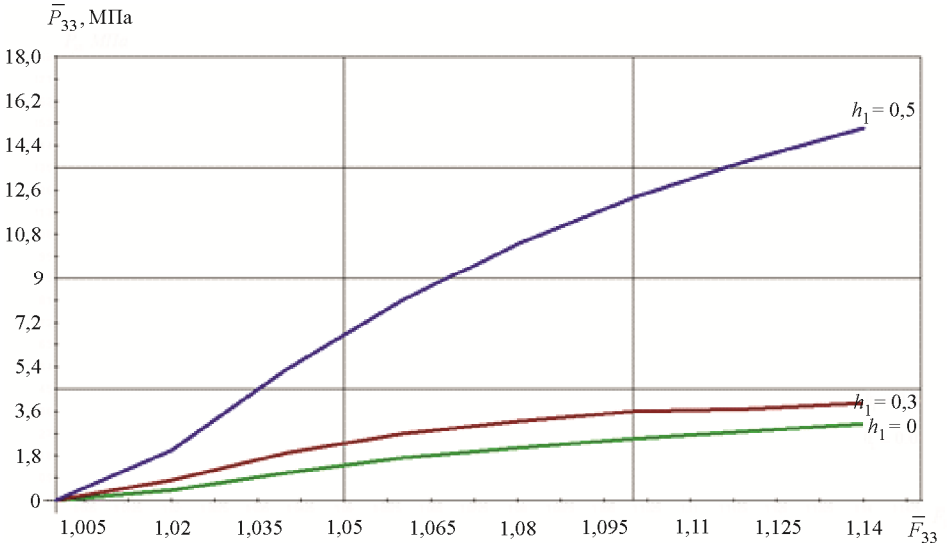
Графики функций (32) определяющих соотношений слоистого композита, построенные с помощью описанного выше алгоритма, показаны на рис. 1–3. Был рассмотрен композит с ЯП из трех слоев, характеризующихся двумя различными наборами упругих констант:

$$\begin{aligned} \text{слой 1, 3: } l_1 &= 100 \text{ МПа, } l_2 = 50 \text{ МПа;} \\ \text{слой 2: } l_1 &= 20 \text{ МПа, } l_2 = 10 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

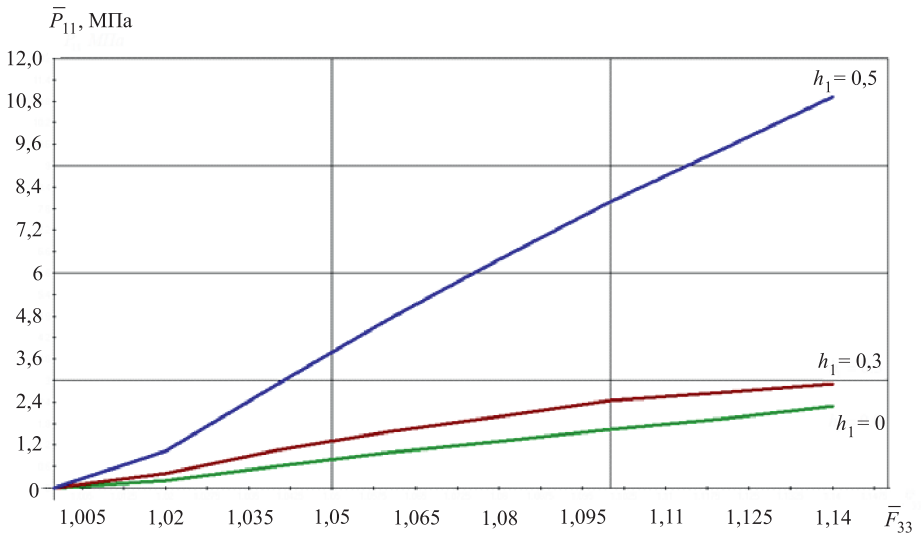
Были выбраны следующие соотношения слоев (относительные толщины):  $h_1 = 0,3$ ;  $h_2 = 1 - 2h_1$ .

На рис. 1 представлены графики функций (32) для компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа  $\bar{P}_{33}$  в зависимости от компоненты  $\bar{F}_{33}$  среднего градиента деформаций, которая изменялась в диапазоне  $1,0 \dots 1,2$ . Начальные значения для остальных компонент осредненного градиента:  $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{22} = 1$ ,  $\bar{F}_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ .

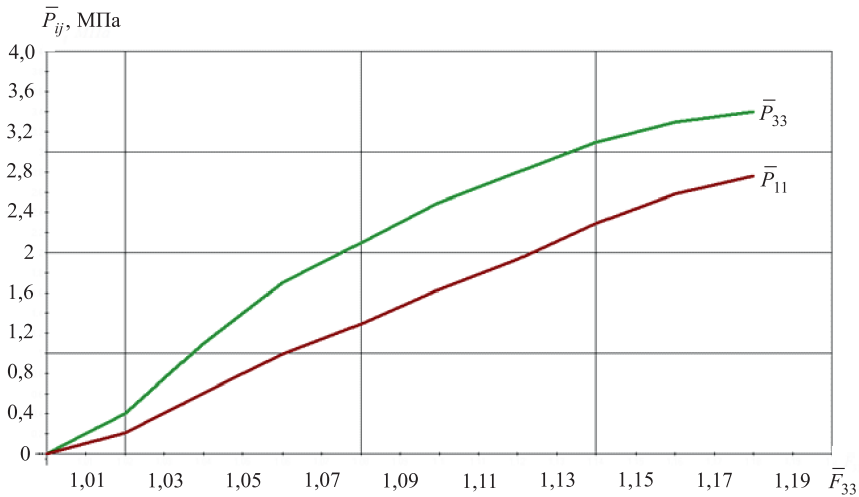
Эти значения соответствуют условиям одноосного деформирования слоистого композита в направлении, ортогональном к плоскости слоев, причем по боковым поверхностям композит скользит без изменения линейных размеров ( $x_1 = x_2 = \text{const}$ ).



**Рис. 1.** Диаграммы деформирования  $\bar{P}_{33}(\bar{F}_{33})$  для слоистого композита с ЯП из трех слоев, имеющих различную толщину



**Рис. 2.** Диаграммы деформирования  $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{33})$  для слоистого композита с ЯП из трех слоев, имеющих различную толщину



**Рис. 3.** Диаграммы деформирования  $\bar{P}_{33}$  ( $\bar{F}_{33}$ ) и  $\bar{P}_{11}$  ( $\bar{F}_{33}$ ) для слоистого композита с ЯП из трех слоев

Расчеты проводили для трех значений соотношения слоев: 1)  $h_1 = 0,3$ ; 2)  $h_1 = 0$ ; 3)  $h_1 = 0,5$ . Случаи  $h_1 = 0$  и  $h_1 = 0,5$  соответствуют гомогенным материалам с характеристиками первого или второго слоев. Функция  $\bar{P}_{33}$  ( $\bar{F}_{33}$ ), представляющая собой диаграмму деформирования, для композита располагается между соответствующими функциями для отдельных его слоев: для первого слоя с более высокой жесткостью и для второго слоя с меньшей жесткостью, чем у композита.

На рис. 2 изображена эффективная диаграмма зависимости тензора напряжения Пиолы — Кирхгофа  $\bar{P}_{11}$  от компоненты осредненного градиента деформации  $\bar{F}_{33}$  для трех различных соотношений слоев: 1)  $h_1 = 0$ ; 2)  $h_1 = 0,3$ ; 3)  $h_1 = 0,5$ . При увеличении толщины первого слоя наблюдается рост напряжения.

На рис. 3 показаны графики функций (32) для двух нормальных компонент осредненного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа  $\bar{P}_{33}$  и  $\bar{P}_{11}$  в зависимости от компоненты  $\bar{F}_{33}$  при одноосном деформировании.

Представленные примеры расчетов демонстрируют реализуемость и эффективность разработанного метода расчета упругих характеристик слоистых композитов с конечными деформациями, а также численного алгоритма вычисления диаграмм деформирования композитов.

**Выводы.** В работе предложен вариант метода асимптотического осреднения для слоистых упругих композитов с конечными деформациями и периодической структурой с использованием универсального представления определяющих соотношений для слоев композита. Разработан численный метод решения задачи на ЯП для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями. Метод, реализованный в виде программного кода на языке C++, позволяет рассчитывать эффективные диаграммы деформирования слоистых композитов с конечными деформациями, связывающие компоненты осредненных тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа и градиента деформаций. Пример расчета подтверждает реализуемость и эффективность предложенного метода.

*Исследование выполнено за счет гранта президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-5961.2015.8).*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aboudi J., Micromechanics-Based Thermoviscoelastic Constitutive Equations for Rubber-Like Matrix Composites at Finite Strains. *Int. J. Solids and Structure*, 2004, no. 41, pp. 5611–5629.
- [2] Yang Q., Xu F. Numerical Modeling of Nonlinear Deformation of Polymer Composites Based on Hyperelastic Constitutive Law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, vol. 4, is. 3, pp. 284–288.
- [3] Aboudi J. Finite Strain Micromechanical Modeling of Multiphase Composites. *Int. J. Multiscale Comp. Engrg.* 2008, no. 6, pp. 411–434.
- [4] Zhang B., Yu X., Gu B. Micromechanical Modeling of Large Deformation in Sepiolite Reinforced Rubber Sealing Composites under Transverse Tension. *Polymer Composites*, 2015, doi: 10.1002/pc.23596.
- [5] Ge Qi., Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Qi H.J. A Finite Deformation Thermomechanical Constitutive Model for Triple Shape Polymeric Composites Based on Dual Thermal Transitions. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.
- [6] Димитриенко Ю.И., Даштиев И.З. Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2001, № 1, с. 21–41.
- [7] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков. *Композиты и наноструктуры*, 2013, № 3, с. 35–51.
- [8] Ma C.C.M., Taib N.H., Wua S.H., Lina S.H., Wua J.F., Lina J.M. Creep Behavior of Carbon-Fiber-Reinforced Polyetheretherketone (PEEK) [±45]4s Laminated Composites. *Composites. Part B: Engineering*, 1997, vol. 28, iss. 4, pp. 407–417.
- [9] Takano N., Ohnishia Y., Zako M., Nishiyabub K. The Formulation of Homogenization Method Applied to Large Deformation Problem for Composite Materials. *Int. J. of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, is. 44 (1), pp. 6517–6535.



- [10] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 5, с. 3–20.
- [11] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Численное моделирование композиционных материалов с многоуровневой структурой. *Известия Российской академии наук. Сер. физическая*, 2011, т. 75, № 11, с. 1549–1554.
- [12] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П. Численное моделирование микроразрушения и прочностных характеристик пространственно-армированных композитов. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2013, т. 19, № 3, с. 365–383.
- [13] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
- [14] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.
- [15] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным наполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.
- [16] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование: электронное научно-техническое издание*, 2014, № 7, doi: 10.7463/0714.0717805.
- [17] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.
- [18] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
- [19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
- [20] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
- [21] Golub G.H. Eigenvalue computation in the 20th century. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol. 23, no. 1–2, pp. 35–65. doi: 10.1016/S0377-0427(00)00413-1.

Статья поступила в редакцию 31.05.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю. Моделирование слоистых композитов с конечными деформациями методом асимптотической гомогенизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1405.html>

**Димитриенко Юрий Иванович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана; заведующий ка-

федрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики.  
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

**Губарева Елена Александровна** — канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 40 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов. e-mail: gubareva\_ea@pochta.ru

**Кольжанова Дарья Юрьевна** — студентка кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
e-mail: darya.kolzhanova@yandex.ru

## Modeling of laminated composites with finite deformations by asymptotic homogenization method

© Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, D.Yu. Kolzhanova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article covers a problem of elastic characteristic modeling for laminated composites with finite deformations. The problem is impotent for design of rubber-like and elastomer structures. A variant of asymptotic homogenization method is suggested for laminated elastic composites with finite deformations and periodical structures. Proposed by Yu. Dimitrienko, a universal representation of nonlinear constitutive relation for materials under finite deformations, is applied for composite model developed. Computational method for solution of nonlinear elasticity problem over periodicity cell of composite with finite deformation is suggested. The method is implemented in C++ program codes. The method allows to calculate an effective stress-strain diagrams in terms of averaged Piola—Kirchhoff deformation gradient for laminated composites with finite deformations. Examples of calculations demonstrate feasibility and efficiency of the method developed for prediction of elastic characteristic of laminated composites with finite deformations.*

**Keywords:** laminated composites, finite deformation, asymptotic homogenization method, Piola—Kirchhoff stress tensor, deformation gradient, universal representation of nonlinear constitutive relation.

### REFERENCES:

- [1] Aboudi J. Micromechanics-based thermoviscoelastic constitutive equations for rubber-like matrix composites at finite strains. *Int. J. Solids and Struct.*, 41 (2004), 5611–5629.
- [2] Yang Q., Xu F. Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*. September 2009, vol. 4, issue 3, pp. 284–288.
- [3] Aboudi J. Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites. *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, 6 (2008), 411–434.
- [4] Zhang B., Yu X., Gu B. Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension. *Polym. Compos.*, 2015. doi: 10.1002/pc.23596
- [5] Ge Qi, Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Qi H.J. A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape polymeric composites based on dual thermal transitions. *Int. J. Solids and Struct.*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.
- [6] Dimitrienko Yu.I., Dashtiyev I.Z. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman MSTU. Series: Natural sciences*, 2001, no. 1, pp. 21–41.
- [7] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Sokolov A.P., Sadovnichiy D.N., Gafarov B.R. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2013, no. 3, pp. 35–51.
- [8] Ma C.C.M., Taib N.H., Wua S.H., Lina S.H., Wua J.F., Lina J.M. Creep behavior of carbon-fiber-reinforced polyetheretherketone (PEEK) [±45]<sub>4s</sub> laminated composites. *Composites Part B: Engineering*, 1997, vol. 28, issue 4, pp. 407–417.

- [9] Takano N., Ohnishia Y., Zako M., Nishiyabub K. The Formulation of Homogenization Method Applied to Large Deformation Problem for Composite Materials. *Int. J. of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, is. 44 (1), pp. 6517–6535.
- [10] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe Modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20.
- [11] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Izvestiya Rossiyskoi akademii nauk. Seriya fizicheskaya — Izvestiya: Physics*, 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1549–1554.
- [12] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Sokolov A.P. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy — Composite Mechanics and Design*, 2013, vol. 19, no. 3, pp. 365–383.
- [13] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
- [14] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy — Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.
- [15] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonyuk N.N., Sborschikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigorev M.M., Prozorovsky A.A. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.
- [16] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Prozorovsky A.A. *Nauka i obrazovanie. Elektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 7, doi: 10.7463/0714.0717805.
- [17] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman MSTU. Series: Natural sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–100.
- [18] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
- [19] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universal'niye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnykh sred.* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of continuum mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [20] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
- [21] Golub, G.H. Eigenvalue computation in the 20th century. *J. of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol. 23, no. 1–2, pp. 35–65. doi:10.1016/S0377-0427(00)00413-1

**Dimitrienko Yu.I.** (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of over 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com.

**Gubareva E.A.** (b. 1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, deputy head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University.

ty. Author 40 scientific publications in the field of composite mechanics, asymptotic analysis, contact mechanics. e-mail: gubareva\_ea@pochta.ru

**Kolzhanova D.Yu.** (b. 1993), student of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University.  
e-mail: darya.kolzhanova@yandex.ru