УДК 519.714, 517.977

Упругие балки минимального веса, при наличии нескольких видов изгибающих нагрузок

© А.А. Гурченков[1,2], Н.Т. Вилисова[1], И.М. Герман[2], А.М. Романенков[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]МАТИ РГТУ им. К.Э. Циолковского, Москва, 109387, Россия

Рассмотрена задача оптимизации толщины нагруженной балки, а именно — минимизация веса конструкции, при заданных краевых условиях и ограничении по податливости. Установлено, что математической моделью в данном случае является краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка. Решение возникшей оптимизационной задачи построено на двух разных подходах. Первый — классический вариационный метод, основанный на изучении вариации минимизируемого функционала и исследовании стационарной точки данного функционала. Во втором методе применяется принцип максимума Л.С. Понтрягина для задачи с закрепленными левым и правым концами.
Численные эксперименты, проведенные для разных видов изгибающих нагрузок, проиллюстрированы графиками. Сопоставление полученных результатов свидетельствует об эквивалентности обоих подходов, что существенно расширяет круг оптимизационных задач, для решения которых разрабатываются программные комплексы с моделями сложных систем.

Ключевые слова: *оптимизация толщины балки, вариационный метод, принцип максимума.*

Постановка задачи. В ряде динамических задач оптимального проектирования упругих конструкций вес конструкции является оптимизируемым функционалом. Это связано с часто возникающим требованием минимизировать толщину конструкции, особенно, когда на конструкцию действуют внешние силы [1–5].

В настоящей работе в качестве такой конструкции выбрана балка постоянной плотности, равной единице, с закреплением на обоих концах различными способами. Математическая модель в данном случае представляет собой одномерную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, которое является уравнением изгибающих нагрузок [6–8]:

$$\left(h^{\alpha}(x)W_{xx}(x)\right)_{xx}=q(x), \qquad (1)$$

где $W(x)$ — функция прогиба балки; a — константа, зависящая от формы балки; $h(x)$ — функция толщины балки; $q(x)$ — функция нагрузки. Граничные условия в соответствии со способом закрепления балки:

$$W(0) = \left(h^{\alpha}(x)W_{xx}(x)\right)\Big|_{x=0} = 0;$$
$$W(1) = W_x(1) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим функционал, который характеризует вес балки,

$$J[(x)] := \int_0^1 h(x)dx \tag{3}$$

и сформулируем оптимизационную задачу, а именно: найти такую функцию $h(x)$, которая доставляет минимум функционалу (3), и выполняются ограничения по податливости:

$$\int_0^1 q(x)W(x)dx = C, \tag{4}$$

где в формуле (4) фигурирует решение задачи (1)–(2).

В данной работе предложены два метода решения: первый из них основан на вариационном принципе, второй — на принципе максимума Л.С. Понтрягина.

Вариационный принцип. Перейдем от дифференциального уравнения четвертого порядка (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка:

$$\begin{cases} h^{\alpha}(x)\dfrac{d^2}{dx^2}W(x) = V(x); \\ \dfrac{d^2}{dx^2}V(x) = q(x). \end{cases} \tag{5}$$

Решение системы ОДУ найдено методом прогонки [9]:

$$W_{i-1} - 2W_i + W_{i+1} = \frac{V_i\tilde{h}^2}{h_i^{\alpha}}, \tag{6}$$

где $\tilde{h}$ — шаг сетки; $V_i = V(i\tilde{h}),\ h_i^{\alpha} = h^{\alpha}(i\tilde{h})$.

Найдем новое приближение функции W и из него — новое приближение функции h:

$$h_i^{(n+1)} = \left(\frac{C\tilde{h}^4}{W_{i-1} - 2W_i + W_{i+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{7}$$

Критерием для остановки процесса является выполнение условия

$$\left|\int_0^1 h^{(n+1)}(x)dx - \int_0^1 h^{(n)}(x)dx\right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Принцип максимума Понтрягина. Теперь считаем толщину балки управляющей функцией, на которую поставлены ограничения,

$$h(x) \in \left[h_{min}, h_{max}\right],$$

и будем рассматривать задачу (1)–(4) как задачу оптимального управления.

Следуя [10–12], перейдем от дифференциального уравнения четвертого порядка (1) с помощью последовательных замен к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Из (2) получим краевые условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} W_{1x} = W_2; \\ W_{2x} = \dfrac{W_3}{h^\alpha}; \\ W_{3x} = W_4; \\ W_{4x} = q; \\ W_{5x} = qW_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} W_1(0) = W_1(1) = 0; \\ W_2(0) = W_2(1) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Согласно принципу максимума Л.С. Понтрягина [13–18], выпишем функцию Гамильтона и сопряженную систему для задачи оптимального управления:

$$H = -h + \psi_1 W_2 + \psi_2 \frac{W_3}{h^\alpha} + \psi_3 W_4 + \psi_4 q + \psi_5 q W_1; \tag{11}$$

$$\begin{cases} \psi_{1x} = -q\psi_5; \\ \psi_{2x} = -\psi_1; \\ \psi_{3x} = -\dfrac{\psi_2}{h^\alpha}; \\ \psi_{4x} = -\psi_3; \\ \psi_{5x} = 0; \end{cases} \tag{12}$$

$$\psi_3(0) = \psi_3(1) = \psi_4(0) = \psi_4(1) = 0. \tag{13}$$

Отметим, что оптимальное управление доставляет максимум функции Гамильтона. Определим стационарные по h точки функции Гамильтона:

$$\frac{\partial H}{\partial h} = -1 - \frac{\alpha W_3 \psi_2}{h^{\alpha+1}} = 0; \tag{14}$$

$$h = \sqrt[\alpha+1]{-\alpha W_3 \psi_2}. \tag{15}$$

Найдем вторую производную функции Гамильтона по переменной h и обозначим ее через F:

$$F = \frac{\partial^2 H}{\partial h^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)W_3\psi_2}{h^{\alpha+2}}. \qquad (16)$$

Подберем значение $\hat{h}$ таким образом, чтобы функция Гамильтона принимала максимальное значение. Для этого, как известно, необходимо потребовать отрицательность второй производной в стационарной точке.

Введем разбиение отрезка [0; 1] на конечное число частей $x_i, i = 1, \ldots, N$, которые имеют одинаковую длину. Далее рассмотрим значение F в концевых точках каждого отрезка разбиения. Обозначим F_i — значение функции F в точке разбиения i.

Если $F_i < 0$, то новое значение функции $\hat{h}_i$ в точке i не изменяется $(\hat{h}_i = x_i)$. Если $F_i > 0$, то новое значение функции $\hat{h}_i$ в точке i подбираем таким образом, чтобы функция H принимала максимальное значение:

$$\hat{h}_i = \begin{cases} h_{\min}, \text{ если } H\left(h_{\min}\right) > H\left(h_{\max}\right); \\ h_{\max}, \text{ если } H\left(h_{\min}\right) < H\left(h_{\max}\right). \end{cases} \qquad (17)$$

Таким образом, сформулирован алгоритм построения функции $h(x)$, которая является решением задачи (1)–(4).

Рассмотрим примеры численных решений, которые выполнены в программном комплексе, разработанном с помощью пакета MatLab.

Пример 1. $q(x) \equiv 1$. Балку нагружаем равномерно распределенной нагрузкой q. Решение вариационным методом представлено на рис. 1. Решение этой задачи с использованием принципа максимума Понтрягина при $q(x) \equiv 1$ показано на рис. 2. По горизонтали на рис. 1 и 2 отложена координата x от 0 до 1; по вертикали — функция прогиба балки $W(x)$, толщина балки $h(x)$, а также зависимость функционала J от числа итераций.

Отметим, что с помощью разработанной программы найдена функция прогиба и толщины балки. Модуль разности между функционалами, которые рассчитаны вариационным методом и методом, основанным на принципе максимуме Понтрягина, равен $\Delta J = 0,01$.

Пример 2. $q(x) = -4\cos(\pi x) + 1$. Балка нагружена неравномерно. Решение вариационным методом представлено на рис. 3. Решение той же задачи с использованием принципа максимума Понтрягина представлено на рис. 4. По горизонтали на рис. 3 и 4 отложена координата x от 0 до 1, по вертикали — функция прогиба балки $W(x)$, толщина балки $h(x)$, а также зависимость функционала J от числа итераций.

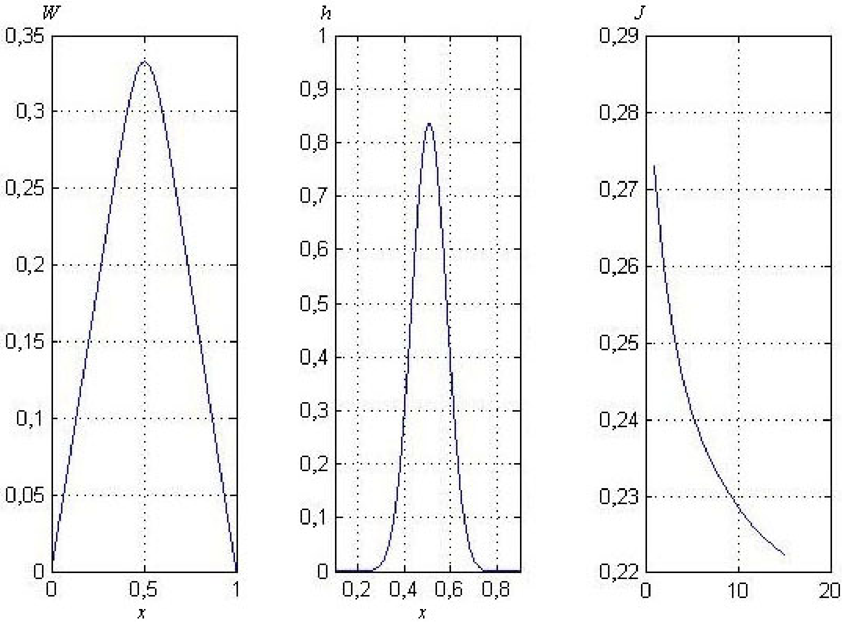

Рис. 1

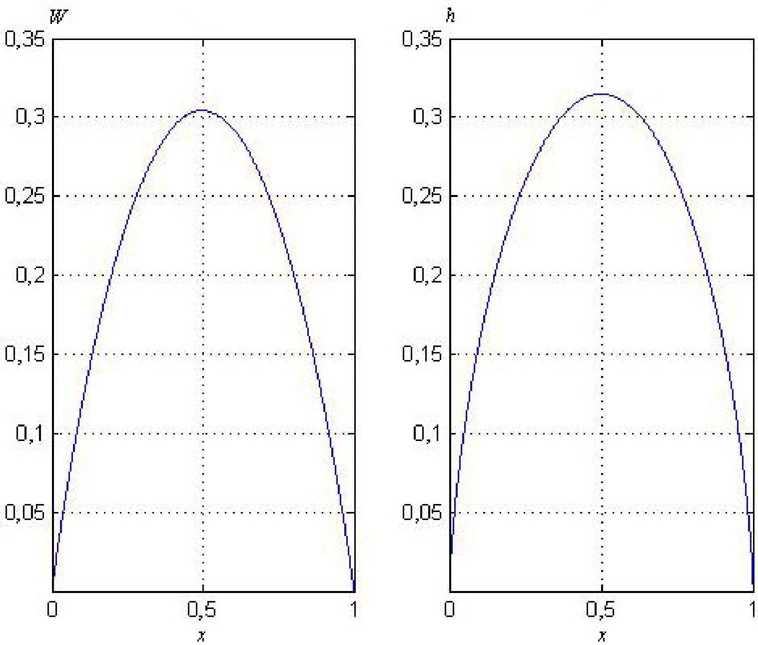

Рис. 2

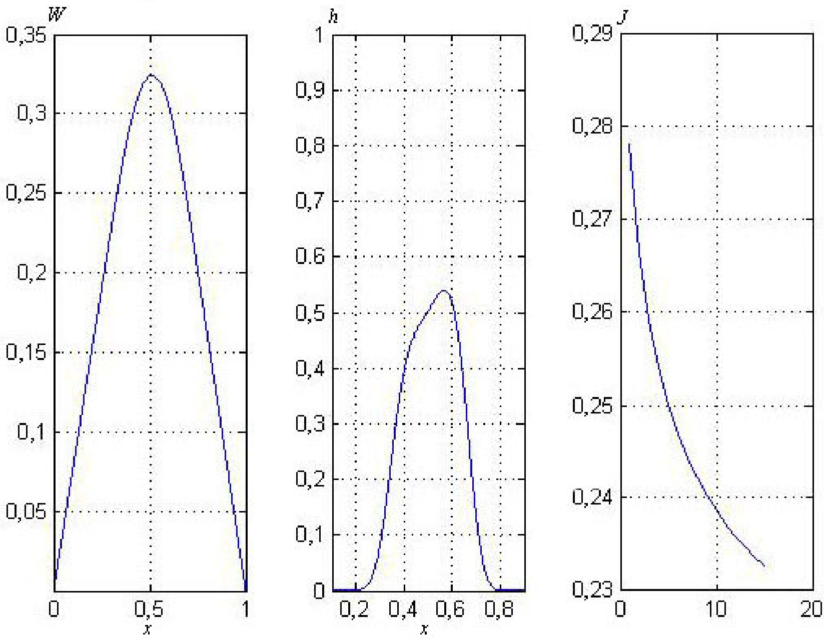

Рис. 3

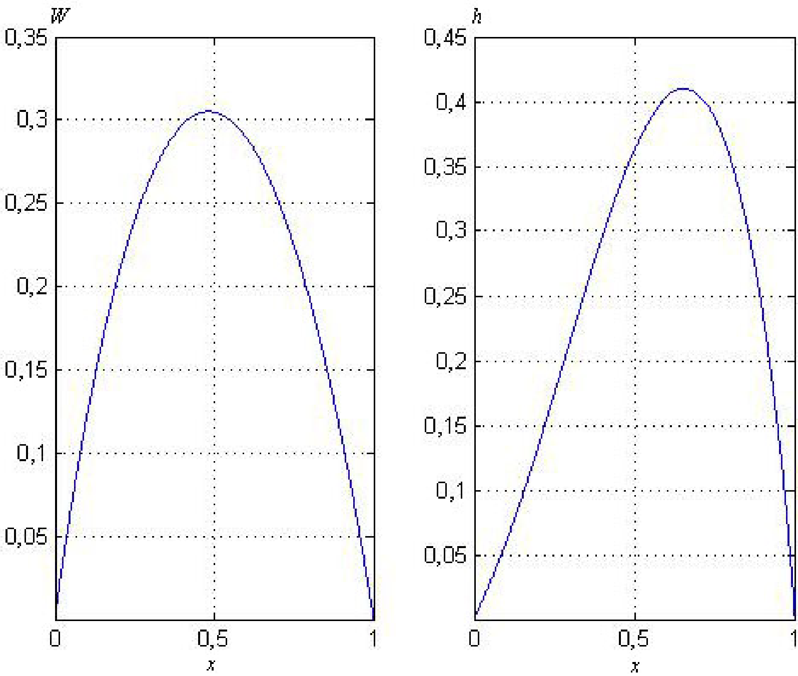

Рис. 4

Ситуация аналогична той, которая рассмотрена в примере 1. В данном случае модуль разности между функционалами $\Delta J = 0{,}01$.

Сопоставляя результаты двух типов нагрузок, которые получены на основе вариационного метода и метода, основанного на принципе максимума Понтрягина, отметим, что модуль разности между этими функционалами равен 0,01. Это свидетельствует об эквивалентности обоих подходов.

Заключение. В этой работе задача оптимизации веса конструкции решена при заданных ограничениях по податливости и краевых условиях (балка жестко закреплена на концах). Для поиска минимума разработано два алгоритма:

- классический вариационный метод, основанный на вариации функционала;
- алгоритм, основанный на принципе максимума Понтрягина, для краевой задачи с закрепленными правыми и левыми концами. В ходе реализации алгоритма найдено решение сопряженной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В результате проведенных вычислительных экспериментов для разных видов нагрузок установлено, что для каждого из двух методов и для различных видов изгибающей нагрузки уменьшение веса конструкции составило около 20 %. Оба подхода являются равноправными при решении широкого круга оптимизационных задач, при разработке проблемно-ориентированных программных комплексов с моделями сложных систем. Это обстоятельство позволяет эффективно решать различные блочно-сепарабельные задачи оптимального управления.

Дальнейшие исследования, связанные с задачами управления динамическими системами сложной геометрии с упругими стенками, будут продолжены с использованием работ [19–22].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 15-01-05552.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Баничук Н. В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974, №4, с. 34–51.

[2] Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. *Методы оптимизации*. Москва, Наука, 1978.

[3] Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. Москва, Наука, 1971.

[4] Цвей А.Ю. *Балки и плиты на упругом основании*. Москва, МАДИ, 2014, 96 с.

[5] Вассерман Н.Н. и др. *Сопротивление материалов*. Пермь: Перм. нац. исслед. политехн. ун-т, 2011, 365 с.

[6] Макаров Е.Г. *Курсовая работа по методу конечных элементов*. Санкт-Петербург, БГТУ–Военмех, 2011, 49 с.

[7] Санкин Ю.Н., Юганова Н.А. *Нестационарные колебания стержневых систем при соударении с препятствием*. Ульяновск, УлГТУ, 2010, 174 с.

[8] Исаев В.И. *Математические модели стержней, балок и плит в задачах сосредоточенного удара*. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Москва, 2007, 155 с.

[9] Атамуратов А.Ж. Использование методик параллельного программирования при численном решении задач оптимизации методами координатного и градиентного спусков на примере задач гашения колебаний. *Молодой ученый*, 2014, № 1, с. 13–18.

[10] Андреев В.И., Барменкова Е.В., Матвеева А.В. Обратная задача для неоднородной упругой балки при сложном сопротивлении. *Вестник МГСУ*, 2014, № 1, с. 25–32.

[11] Hjelmstad K.D. Fundamentals of the Structural Mechanics. *Springer Science Media*, 2005, XIV, 480 p.

[12] Andreev V.I. Optimization of thick-walled shells based on solutions 0f inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 189–202.

[13] Kravanja S., Zlender B. Optimization of the underground gas storage in different rock environments. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 15–26.

[14] Issa H.K. Simplified structural analysis of steel portal frames developed from structural optimization. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 47–58.

[15] Syngellakis S. Longitudinal buckling of slender pressurized tubes. *Fluid Structure Interaction* XII, 2013, pp. 133–144.

[16] Гурченков А.А., Носов М.В., Цурков В.И. *Управление вращающимися твердыми телами с жидкостью*. Москва, Физматлит, 2011, с. 202.

[17] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRC Press, 2013, p. 147.

[18] Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. *Вариационные задачи механики и управления*. Москва, Наука, 1973.

[19] Гурченков А.А. Момент сил внутреннего трения быстровращающегося цилиндрического сосуда, заполненного вязкой жидкостью. *Известия вузов. Приборостроение*, 2001, т. 44, № 2, с. 44.

[20] Gurchenkov A.A. Stability of a fluid-filled gyroscope. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics*, 2002, vol. 75, no. 3, p. 554.

[21] Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела*. Москва. Физматлит, 2010, 221 с.

[22] Гурченков А.А. Диссипация энергии в колеблющейся полости с вязкой жидкостью и конструктивными неоднородностями. *Док. Академии наук*, 2002, т. 382, № 4, с. 476.

Статья поступила в редакцию 03.09.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гурченков А.А., Вилисова Н.Т., Герман И.М., Романенков А.М. Упругие балки минимального веса, при наличии нескольких видов изгибающих нагрузок. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1404.html

Гурченков Анатолий Андреевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных работ, в числе которых 10 монографий. Сфера научных интересов: задачи оптимизации и управления вращательными твердыми телами с жидким наполнением, устойчивость динамических систем с жидкостью. e-mail: challenge2005@mail.ru

Вилисова Нина Трофимовна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Герман Илья Маркович — магистрант кафедры «Прикладная математика и информатика» МАТИ РГТУ им. К. Э. Циолковского. Научные интересы: численные методы, методы оптимизации, оптимальное управление.
e-mail: ilja.german2014@yandex.ru

Романенков Александр Михайлович — канд. техн. наук, ассистент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» МАТИ РГТУ им. К. Э. Циолковского. Научные интересы: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, оптимальное управление, принцип максимума Л. С. Понтрягина. e-mail: romanaleks@gmail.com

Elastic beams of minimum weight in the presence of several types of bending loads

© A.A.Gurchenkov[1,2], N.T. Vilisova[1], I.M. German[2], A.M. Romanenkov[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]MATI – Russian State Technological University named after K.E. Tsiolkovsky, Moscow, 109387, Russia

The article considers the problem of optimizing the loaded beam thickness, i.e. minimizing weight of the structure, for given boundary conditions and restrictions of strain capacity. It was found that the mathematical model in this case is the boundary value problem for ordinary differential equation of 4th order. Solving the optimization problem is based on two different approaches. The first one is the classical variational method based on studying the variation of the minimized functional and analyzing the stationary point of the functional. In the second method, the Pontryagin maximum principle is applied to the problem with fixed left and right ends.
Numerical experiments carried out for different types of bending loads, are illustrated by graphs. Comparison of the results shows the equivalence of the two approaches. This significantly extends the range of optimization problems, for solution of which software with models of complex systems is developed.

Keywords: *beam thickness optimization, variational method, principle of maximum.*

REFERENCES

[1] Banichuk N.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Proceedings of the USSR AS. Mechanics of Rigid Body,* 1974, no. 4, pp. 44–51.
[2] Moiseev N.N., Ivanilov Yu.P., Stolyarova E.M. *Metody optimizatsii* [Optimization Techniques]. Moscow, Nauka Publ., 1978.
[3] Samarskiy A.A. *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1971.
[4] Tsvey A.Yu. *Balki i plity na uprugom osnovanii* [Beams and Plates on Elastic Foundation]. Moscow, MADI Publ., 2014, 96 p.
[5] Vasserman N.N., et al. *Soprotivlenie materialov* [Strength of Materials]. Perm, Perm National Research Polytechnic University Publ., 2011, 365 p.
[6] Makarov E.G. *Kursovaya rabota po metodu konechnykh elementov* [Term paper on the finite element method]. St. Petersburg, Baltic State Technical University "Voenmeh" Publ., 2011, 49 p.
[7] Sankin Yu.N., Yuganova N.A. *Nestatsionarnye kolebaniya sterzhnevykh system pri soudarenii s prepyatstviem* [Unsteady Oscillations of Rod Systems in a Collision with an Obstacle]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University Publ., 2010, 174 p.
[8] Isaev V.I. *Matematicheskie modeli sterzhney, balok i plit v zadachakh sosredotochennogo udara* [Mathematical Models of Rods, Beams and Plates in Problems of the Centric Impact]. Ph.D. Thesis (Phys.-Math.). Moscow, 2007, 155 p.
[9] Atamuratov A.Zh. *Molodoy uchenyy – Young Scientist*, 2014, no. 1, pp. 13–18.
[10] Andreev V.I., Barmenkova E.V., Matveeva A.V. *Vestnik MGSU – Herald of the National Research University Moscow State University of Civil Engineering, 2014, no. 1, pp. 25–32.*

[11] Hjelmstad K.D. *Fundamentals of the Structural Mechanics*. Springer Science Media, 2005, XIV, 480 p.
[12] Andreev V.I. Optimization of thick-walled shells based on solutions 0f inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 189–202.
[13] Kravanja S., Zlender B. Optimization of the underground gas storage in different rock environments. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 15–26.
[14] Issa H.K. Simplified structural analysis of steel portal frames developed from structural optimization. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 47–58.
[15] Syngellakis S. Longitudinal buckling of slender pressurized tubes. *Fluid Structure Interaction XII*, 2013, pp. 133–144.
[16] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Upravlenie vraschauschimisya tverdymi telami s zhidkostyu* [Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies]. Moscow, Fismatlit Publ., 2011, 202 p.
[17] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRC Press, 2013, p. 147.
[18] Chernousko F.L. Banichuk N.V. *Variatsionnye zadachi mekhaniki i upravleniya* [Variational Problems in Mechanics and Control]. Moscow, Nauka Publ., 1973.
[19] Gurchenkov A.A. *Izvestiya vuzov. Priborostroenie – Proceedings of Universities. Instrument Engineering,* 2001, vol. 44, No. 2, p. 44.
[20] Gurchenkov A.A. Stability of a fluid-filled gyroscope. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics,* 2002, vol. 75, no. 3, p. 554.
[21] Gurchenkov A.A. *Dinamika zavikhrennoy zhidkosti v polosti vraschayuschegosya tela* [Dynamics of Swirling Liquid in the Cavity of a Rotating Body]. Moscow, Fismatlit Publ., 2010, 221 p.
[22] Gurchenkov A.A. *Doklady RAN – Reports of RAS*, 2002, vol. 382, no. 4, p. 476.

Gurchenkov A.A., Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor of Mathematics at the Department of Higher Mathematics at Bauman Moscow State Technical University, author of over 140 research publications including 10 monographs in the field of optimization and control of fluid-containing rotating rigid bodies, stability of a fluid-filled systems.
e-mail: challenge2005@mail.ru

Vilisova N.T., Cand. Sci. (Eng.), associate professor of Engineering at the Department of Higher Mathematics at Bauman Moscow State Technical University.

German I.M., M.Sc. student at the Department of Applied Mathematics and Information Technologies at MATI – Russian State Technological University named after K.E. Tsiolkovsky. Research interests: numerical techniques, optimization techniques, optimal control. e-mail: ilja.german2014@yandex.ru

Romanenkov A.M., Cand. Sci. (Eng.), assistant lecturer at the Department of Applied Mathematics and Information Technologies at MATI – Russian State Technological University named after K.E. Tsiolkovsky. Research interests: ordinary differential equations, partial differential equations, optimal control, maximum principle of Pontryagin. e-mail: romanaleks@gmail.com