

## Оптимальное проектирование балки с ограничениями на частоту собственных колебаний

© А.А. Гурченков<sup>1,2</sup>, И.М. Герман<sup>2</sup>, А.М. Романенков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>2</sup>МАТИ РГТУ им. К.Э. Циолковского, Москва, 109387, Россия

*Задача, рассматриваемая в данной работе, является актуальной в области оптимизации форм упругих тел. Предложенный авторами способ решения удобен для применения на практике. Исследованы различные условия закрепления концов балки. При численном решении экстремальной задачи использовались метод последовательных приближений и метод проектирования градиента. Задача решена с учетом ограничений, наложенных на параметры балки, естественно возникающие при решении подобного рода задач. Для расчета оптимальной формы прогиба балки с помощью современных информационных технологий разработано удобное для конечного пользователя программное решение, которое позволяет наглядно демонстрировать результаты вычислений.*

**Ключевые слова:** оптимизация частоты колебаний, метод спуска.

**Постановка задачи.** В ряде динамических задач оптимального проектирования упругих конструкций часто возникает необходимость облегчить вес проектируемой конструкции при заданной фундаментальной частоте собственных колебаний. Задача такого типа рассматривается в данной работе. В качестве оптимизируемой конструкции выбрана упругая балка с различными способами закрепления на обоих концах.

Известно, что поперечные колебания балки описываются обыкновенным дифференциальным уравнением 4-го порядка с соответствующими граничными условиями, которые характеризуют способ закрепления балки. Рассмотрим уравнение состояния упругой балки в соответствии с [1–5]:

$$\left( h^\alpha(x) W_{xx} \right)_{xx} = \omega W, \quad (1)$$

где  $\omega$  — первое собственное значение;  $h(x)$  — толщина балки;  $W(x)$  — прогиб балки.

От уравнения (1) можно перейти к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} h^\alpha(x) W_{xx} = V; \\ V_{xx} = \omega W. \end{cases} \quad (2)$$

Граничные условия, которые соответствуют закреплению балки,

$$\begin{aligned} W(0) = V(0) = 0; \\ W(1) = V(1) = 0. \end{aligned} \tag{2'}$$

В качестве минимизируемого функционала выберем вес балки (плотность балки полагаем равной единице), который определяется соотношением:

$$J[h(x)] := \int_0^1 h(x) dx. \tag{3}$$

Таким образом, возникает экстремальная задача: найти функцию  $h(x)$ , доставляющую минимум функционалу (3), при которой задача (2)–(2') имеет нетривиальное решение.

**Описание метода решения.** При решении подобных задач с применением известных алгоритмов оптимизации требуется на каждом шаге алгоритма определять  $W(x)$  и  $\omega$ . С этой целью в данной работе использован метод последовательных приближений [6–10]. Он заключается в последовательных итерациях, при выполнении которых определяются значения  $W^{(0)}, W^{(1)}, \dots, W^{(s)}, W^{(s+1)}$  и  $\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(s)}, \omega^{(s+1)}$ . Для решения системы уравнений вида (2) используется метод матричной прогонки.

Для последующего применения метода проектирования градиента выразим вариацию собственной частоты через вариацию управляющей функции (в данном случае  $h(x)$ ). Придадим функции  $h(x)$  малое приращение  $\delta h(x)$ , т. е.  $h(x) = h(x) + \delta h(x)$ .

Естественно, функции  $W(x), V(x)$ , а также собственное значение  $\omega$  также получает малое приращение  $\delta W(x), \delta V(x), \delta \omega$  соответственно. Ограничиваясь членами первого порядка малости, получим уравнения в вариациях

$$\begin{cases} \alpha h^{\alpha-1} W_{xx}(x) \delta h(x) + \delta W_{xx}(x) h^{\alpha}(x) = \delta V(x); \\ \delta V_{xx} = \delta \omega W(x) + \omega \delta W(x) \end{cases} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\delta W(0) = \delta W(1) = \delta V(0) = \delta V(1) = 0. \tag{4'}$$

Умножим первое уравнение системы (4) на некоторую функцию  $q_1(x)$ , а второе — на  $q_2(x)$ , сложим их и проинтегрируем от 0 до 1. После интегрирования по частям, учитывая граничные условия (4'), а также подчиняя функции  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$  граничным условиям

$$q_1(0) = q_1(1) = q_2(0) = q_2(1) = 0, \tag{5}$$

получаем

$$\int_0^1 \left( \alpha h^{\alpha-1} W_{xx}(x) \delta h(x) q_1(x) + \left( h^{\alpha}(x) q_1(x) \right)_{xx} \delta W(x) + \right.$$

$$+ q_2(x)_{xx} \delta V) dx = \int_0^1 (\delta V(x) q_1(x) + \delta \omega W(x) q_2(x) \omega \delta W(x) q_2(x)) dx. \quad (6)$$

Таким образом, выведено выражение вариации первого собственного значения через вариацию  $\delta h(x)$ :

$$\delta \omega = \frac{\int_0^1 (\alpha h^{-1-\alpha} V(x)^2 \delta h(x)) dx}{\int_0^1 W(x)^2 dx}. \quad (7)$$

Для численного решения задачи вводим, следуя [11], разностную сетку  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  с постоянным шагом  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ .

Функцию  $h(x)$  аппроксимируем кусочно-постоянной функцией вида

$$h(x) = h_i \quad \text{при} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad (8)$$

где  $h_i$  — некоторые константы.

Для реализации метода оптимизации применим метод градиентного спуска [12–14]:

$$\overline{h_i^{(k+1)}} = h_i^k - \gamma \Delta x, \quad (9)$$

где  $\gamma$  — длина шага.

Далее необходимо найти проекцию точки  $h^{(k+1)}$  на поверхность, описываемую формулой (7) для приращения  $\omega$ , которое в нашем случае должно быть равно нулю. Из этой формулы видно, что искомая поверхность нелинейным образом зависит от  $h(x)$ . Этот факт чрезвычайно затрудняет поиск проекции любой точки на эту поверхность.

Поэтому поступим следующим образом. Обозначим в формуле (7)  $\delta h = h^{(k+1)} - h^{(k)}$ , при этом необходимо найти значения  $h^{(k+1)}$ , которые являются проекциями величин  $\overline{h_i^{(k+1)}} = a_i$  на поверхность

$$\sum_{i=1}^{N-1} \alpha (h_i^k)^{(-1-\alpha)} \left( \frac{V_i + V_{i+1}}{2} \right)^2 (h_i^{(k+1)} - h_i^{(k)}) \Delta x = 0.$$

В формуле (10) слева стоит численная аппроксимация интеграла, находящегося в числителе дроби (7). Отметим, что  $\int_0^1 W^2(x) dx = 1$ , так как после каждого просчета  $\omega$  выполнялась нормировка функций  $W(x)$  и  $V(x)$ .

Для краткости обозначим  $h_i^{(k+1)} = x_i$ ,  $\overline{h_i^{(k+1)}} = a_i$ . Таким образом, необходимо решить следующую классическую задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (x_i - a_i)^2 \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^N (x_i - h_i^{(k)}) A_i = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где  $A_i = (h_i^{(k)})^{-1-\alpha} \left( \frac{V_i + V_{i+1}}{2} \right)^2 \alpha \Delta x$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Для решения задачи на условный экстремум воспользуемся методом множителей Лагранжа [14–17], который дает следующее правило построения функции  $h(x)$ :

$$h_i^{(k+1)} = h_i^{(k)} - \gamma \Delta x + \frac{\gamma \Delta x \sum_{j=1}^N A_j}{\sum_{j=1}^N A_j^2} A_i.$$

На формуле (12) основано программное решение поиска оптимальной толщины балки. Отметим, что система дифференциальных уравнений (2)–(2') решена методом матричной прогонки.

**Результаты.** В следующих примерах приведена форма прогиба балки, зависящая от различных способов закрепления концов балки. Данные результаты получены с использованием программы, разработанной на языке C# 5.0 .net framework 4.5.

**Пример 1.** Балка свободно оперта на обоих концах (рис. 1). По горизонтали на рис. 1 отложена координата  $x$  от 0 до 1. С помощью программы определена толщина балки, а именно функция, значение которой строго положительно. Кривая, находящаяся в отрицательной части графика, получена простым отражением верхней кривой. Значение веса балки, а именно, значение функционала  $J[h(x)]$  равно  $0,89J_0$ , где  $J_0$  — вес балки, рассчитанный без применения метода оптимизации.

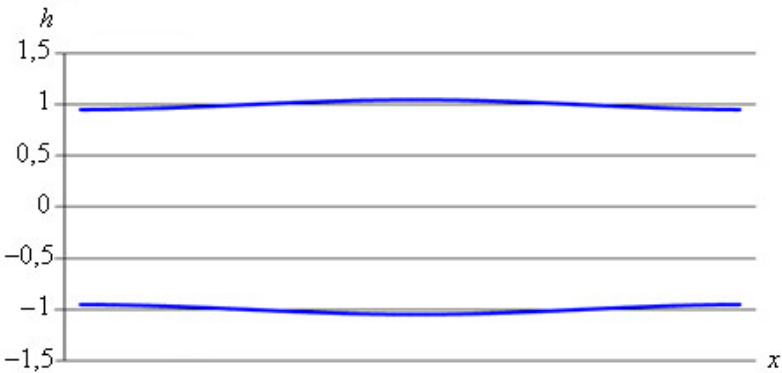


Рис. 1

**Пример 2.** Балка жестко закреплена с двух концов. График функции толщины балки показан на рис. 2. Ситуация аналогична той, что изложена в примере 1. В данном случае  $J[h(x)] = 0,76J_1$ , где  $J_1$  — вес балки, закрепленной с двух концов, который получен без применения оптимизации.

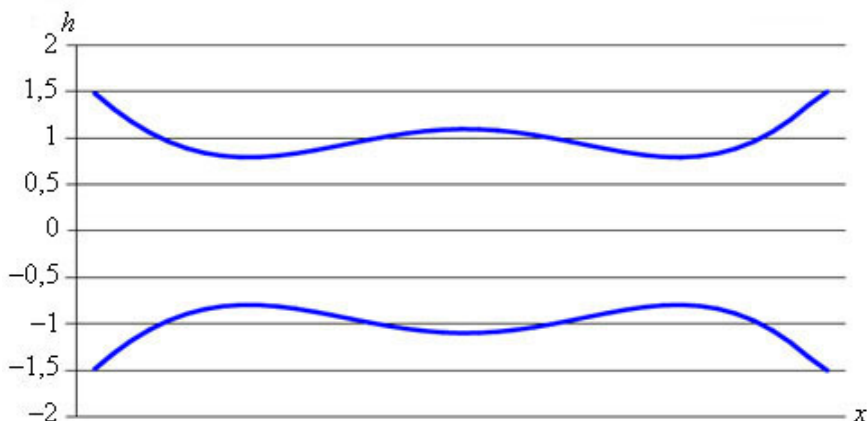


Рис. 2

**Пример 3.** Балка жестко закреплена на правом конце, опирается на левом. График функции толщины при смешанном способе закрепления балки показан на рис. 3. Значение функционала  $J[h(x)] = 0,84J_3$ , где  $J_3$  — вес балки при смешанном закреплении без использования оптимизационного режима.

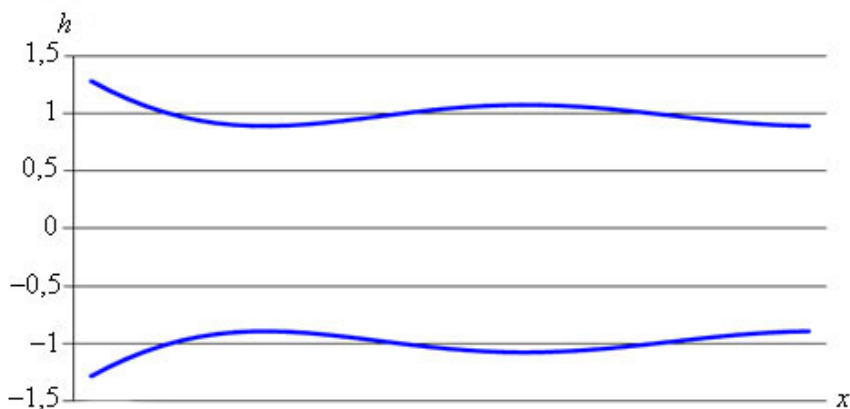


Рис. 3

Анализируя полученные результаты, можно отметить, что во всех трех рассмотренных примерах происходит уменьшение веса балки, причем в случае жестко закрепленной балки достигается максимальное уменьшение веса относительно персонального.

**Закключение.** Для решения задачи оптимального проектирования балки в области оптимизации форм упругих тел в данной работе разработан и использован новый метод последовательных приближений, а для дальнейшей оптимизации — метод проектирования градиента. Этот метод применялся для всевозможных видов закрепления концов балки.

Для визуализации продемонстрированных результатов, полученных на основании данного метода, был разработан программный комплекс, который предоставляет удобный интерфейс пользователю, а также реализует графический вывод результатов расчета.

Опираясь на работы [18–23], дальнейшие исследования будут направлены на изучение задач управления упругими телами с жидким наполнением.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-05552.*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баничук Н.В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974, № 4, с. 44–51.
- [2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. Москва, Бином; Лаборатория знаний, 2012.
- [3] Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. Москва, Наука, 1971.
- [4] Васильев Ф.П. *Методы оптимизации*. В 2 кн. Москва, МЦНМО, 2011.
- [5] Черноушко Ф.Л., Баничук Н.В. *Вариационные задачи механики и управления*. Москва, Наука, 1973.
- [6] Цвей А.Ю. *Балки и плиты на упругом основании*. Москва, МАДИ, 2014, 96 с.
- [7] Вассерман Н.Н. и др. *Сопротивление материалов*. Пермь, Перм. нац. иссл. политехн. ун-т, 2011, 365 с.
- [8] Макаров Е.Г. *Курсовая работа по методу конечных элементов*. Санкт-Петербург, БГТУ–Военмех, 2011, 49 с.
- [9] Санкин Ю.Н., Юганова Н.А. *Нестационарные колебания стержневых систем при соударении с препятствием*. Ульяновск, УлГТУ, 2010, 174 с.
- [10] Исаев В.И. *Математические модели стержней, балок и плит в задачах сосредоточенного удара*. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2007, 155 с.
- [11] Атамуратов А.Ж. Использование методик параллельного программирования при численном решении задач оптимизации методами координатного и градиентного спусков на примере задач гашения колебаний. *Молодой ученый*, 2014, № 1, с. 13–18.
- [12] Андреев В.И., Барменкова Е.В., Матвеева А.В. Обратная задача для неоднородной упругой балки при сложном сопротивлении. *Вестник МГСУ*, 2014, № 1, с. 25–32.
- [13] Hjeltnad K.D. *Fundamentals of the Structural Mechanics*. Springer Science Media, 2005, XIV, 480 p.
- [14] Andreev V.I. Optimization of thick-walled shells based on solutions of inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 189–202.

- [15] Kravanja S., Zlender B. Optimization of the underground gas storage in different rock environments. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 15–26.
- [16] Issa H.K. Simplified structural analysis of steel portal frames developed from structural optimization. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 47–58.
- [17] Syngellakis S. Longitudinal buckling of slender pressurized tubes. *Fluid Structure Interaction XII*, 2013, pp. 133–144.
- [18] Гурченков А.А., Носов М.В., Цурков В.И. *Управление вращающимися твердыми телами с жидкостью*. Москва, Физматлит, 2011, с. 202.
- [19] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRC Press, 2013, pp. 147.
- [20] Гурченков А.А. Момент сил внутреннего трения быстровращающегося цилиндрического сосуда, заполненного вязкой жидкостью. *Известия вузов. Приборостроение*, 2001, т. 44, № 2, с. 44.
- [21] Gurchenkov A.A. Stability of a fluid-filled gyroscope. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics*, 2002, vol. 75, no. 3, pp. 554.
- [22] Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела*. Москва. Физматлит, 2010, 221 с.
- [23] Гурченков А.А. Диссипация энергии в колеблющейся полости с вязкой жидкостью и конструктивными неоднородностями. *Докл. Академии наук*, 2002, т. 382, № 4, с. 476.

Статья поступила в редакцию 04.09.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гурченков А.А., Герман И.М., Романенков А.М. Оптимальное проектирование балки с ограничениями на частоту собственных колебаний. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1402.html>

**Гурченков Анатолий Андреевич** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных работ, в числе которых 10 монографий. Сфера научных интересов: задачи оптимизации и управления вращательными твердыми телами с жидким наполнением, устойчивость динамических систем с жидкостью. e-mail: challenge2005@mail.ru

**Герман Илья Маркович** — магистрант кафедры «Прикладная математика и информатика» МАТИ РГТУ им. К.Э. Циолковского. Научные интересы: численные методы, методы оптимизации, оптимальное управление. e-mail: ilja.german2014@yandex.ru

**Романенков Александр Михайлович** — канд. техн. наук, ассистент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» МАТИ РГТУ им. К.Э. Циолковского. Научные интересы: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, оптимальное управление, принцип максимума Л. С. Понтрягина. e-mail: romanaleks@gmail.com

## Optimal design of the beam under Eigen-oscillation frequency constraints

© A.A. Gurchenkov<sup>1,2</sup>, I.M. German<sup>2</sup>, A.M. Romanenkov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>2</sup>MATI – Russian State Technological University named after K.E. Tsiolkovsky, Moscow, 109387, Russia

*The problem considered in the work is relevant to the current situation in the field of elastic body shape optimization. The proposed method of solving the problem is suitable for use in practice. Various conditions of end restraint were studied. For the numerical solving the extreme problem the methods of successive approximations and the gradient projection were used. The problem is solved considering various beam parameter constraint conditions naturally arising in solving such problems. To calculate the optimal shape of the beam deflection by the modern information technology, convenient for the user software was developed, allowing the results of calculations to be clearly demonstrated.*

**Keywords:** optimization of the oscillation frequency, method of descent.

### REFERENCES

- [1] Banichuk N.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela — Proceedings of the USSR AS. Mechanics of Rigid Body*, 1974, no. 4, pp. 44–51.
- [2] Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical Techniques]. Moscow, Binom. Laboratoriya znaniy Publ., 2012.
- [3] Samarskiy A.A. *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1971.
- [4] Vasilyev F.P. *Metody optimizatsii. V 2 knigakh* [Optimization Techniques. In 2 books.]. Moscow, Moskovskiy Tsentr Nepreryvnogo Matematicheskogo Obrazovaniya Publ., 2011.
- [5] Chernousko F.L. Banichuk N.V. *Variatsionnye zadachi mekhaniki i upravleniya* [Variational Problems in Mechanics and Control]. Moscow, Nauka Publ., 1973.
- [6] Tsvey A.Yu. *Balki i plity na uprugom osnovanii* [Beams and Plates on Elastic Foundation]. Moscow, MADI Publ., 2014, 96 p.
- [7] Vasserman N.N., et al. *Soprotivlenie materialov* [Strength of Materials]. Perm, Perm National Research Polytechnic University Publ., 2011, 365 p.
- [8] Makarov E.G. *Kurovaya rabota po metodu konechnykh elementov* [Term paper on the finite element method]. St. Petersburg, Baltic State Technical University "Voenmeh" Publ., 2011, 49 p.
- [9] Sankin Yu.N., Yuganova N.A. *Nestatsionarnyye kolebaniya sterzhnevyykh sistem pri soudarenii s prepyatstviem* [Unsteady Oscillations of Rod Systems in a Collision with an Obstacle]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University Publ., 2010, 174 p.
- [10] Isaev V.I. *Matematicheskie modeli sterzhney, balok i plit v zadachakh sosredotochennogo udara* [Mathematical Models of Rods, Beams and Plates in Problems of the Centric Impact]. Ph.D. Thesis (Phys.-Math.). Moscow, 2007, 155 p.
- [11] Atamuratov A.Zh. *Molodoy uchenyy – Young Scientist*, 2014, no. 1, pp. 13–18.



- [12] Andreev V.I., Barmenkova E.V., Matveeva A.V. *Vestnik MGSU – Herald of the National Research University, Moscow State University of Civil Engineering*, 2014, no. 1, pp. 25–32.
- [13] Hjelmstad K.D. *Fundamentals of the Structural Mechanics*. Springer Science Media, 2005, XIV, 480 p.
- [14] Andreev V.I. Optimization of thick-walled shells based on solutions of inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 189–202.
- [15] Kravanja S., Zlender B. Optimization of the underground gas storage in different rock environments. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 15–26.
- [16] Issa H.K. Simplified structural analysis of steel portal frames developed from structural optimization. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*, 2012, pp. 47–58.
- [17] Syngellakis S. Longitudinal buckling of slender pressurized tubes. *Fluid Structure Interaction XII*, 2013, pp. 133–144.
- [18] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Upravlenie vraschaischimisya tverdymi telami s zhidkostyu* [Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 202 p.
- [19] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRC Press, 2013, pp. 147.
- [20] Gurchenkov A.A. *Izvestiya vuzov. Priborostroenie – Proceedings of Universities. Instrument Engineering*, 2001, vol. 44, no. 2, p. 44.
- [21] Gurchenkov A.A. Stability of a fluid-filled gyroscope. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics*, 2002, vol. 75, no. 3, pp. 554.
- [22] Gurchenkov A.A. *Dinamika zavikhrennoy zhidkosti v polosti vraschayusche-gosya tela* [Dynamics of Swirling Liquid in the Cavity of a Rotating Body]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 221 p.
- [23] Gurchenkov A.A. *Doklady RAN – Reports of RAS*, 2002, vol. 382, no. 4, p. 476.

**Gurchenkov A.A.**, Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor of Mathematics at the Department of Higher Mathematics at Bauman Moscow State Technical University. Author of over 140 research publications including 10 monographs in the field of optimization and control of fluid-containing rotating rigid bodies, stability of fluid-filled systems. e-mail: challenge2005@mail.ru

**German I.M.**, M.Sc. student at the Department of Applied Mathematics and Information Technologies at MATI – Russian State Technological University named after K.E. Tsiolkovsky. Research interests: numerical techniques, optimization techniques, optimal control. e-mail: ilja.german2014@yandex.ru

**Romanenkov A.M.**, Cand. Sci. (Eng.), assistant lecturer at the Department of Applied Mathematics and Information Technologies at MATI – Russian State Technological University named after K.E. Tsiolkovsky. Research interests: ordinary differential equations, partial differential equations, optimal control, maximum principle of Pontryagin. e-mail: romanaleks@gmail.com