

Рост давления в плоском канале при замерзании теплоносителя

© Г.Н. Товарных

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье рассмотрена задача об изменении давления, действующего на стенки плоского канала прямоугольного сечения при замерзании жидкости, которой он заполнен. Предполагается, что при замерзании жидкости из-за разности плотностей твердой и жидкой фаз изменяется объем, который она занимает в щели, и под действием разности давлений между внешней средой и внутренней областью происходит деформация стенок канала. При допущении о несжимаемости твердой и жидкой фаз изменение объема внутренней области канала в результате деформации ограждающих стенок приравнивается к изменению объема жидкости за счет изменения агрегатного состояния.

Предполагается, что замерзание происходит в верхней части канала, температура жидкости постоянна и равна температуре кристаллизации, а граница раздела твердой и жидкой фаз является плоской. Боковые стенки и дно считаются теплоизолированными и абсолютно жесткими.

Для определения давления, которое действует на стенки плоского канала прямоугольного сечения при замерзании жидкости, заполняющей канал, получены аналитические выражения.

Ключевые слова: жидкость, твердая фаза, пластина, канал, давление, температура, объем, кристаллизация, деформация.

Для обеспечения заданного температурного режима элементов в конструкциях машин и механизмов, их приборов и оборудования часто используют замкнутые жидкостные циркуляционные системы. Важно при этом выбрать теплоноситель с оптимальными теплофизическими характеристиками. Работоспособность системы терморегулирования должна быть обеспечена в широком диапазоне изменения температур. Большой практический интерес представляет сохранение работоспособности системы терморегулирования при временном изменении агрегатного состояния теплоносителя. В данной статье рассматривается задача об изменении давления в теплоносителе при его замерзании в плоском канале.

Поскольку плотности твердой и жидкой фаз различны, при замерзании теплоносителя изменяется объем, который он занимает в канале, и под действием разности давлений между внешней средой и внутренней областью происходит деформация стенок канала с теплоносителем. Принимая предположение о несжимаемости твердой и жидкой фаз, можно приравнять изменение объема внутренней области канала за счет деформации ограждающих стенок к изменению объема теплоносителя за счет изменения агрегатного состояния. Вопросы деформации стенок каналов под действием перепада давлений изложены в работах [1–5]. Задача о нахождении положения границы

раздела между твердой и жидкой фазами при замерзании жидкости или плавлении твердой фазы известна как задача Стефана, различные подходы к решению которой отражены в работах [6–11].

В качестве примера рассмотрим плоский канал прямоугольной формы (рис. 1). Боковые стенки и дно считаем теплоизолированными и абсолютно жесткими. Предположим, что замерзание происходит в верхней части канала, температура жидкости постоянна и равна температуре кристаллизации, а граница раздела твердой и жидкой фаз является плоской.

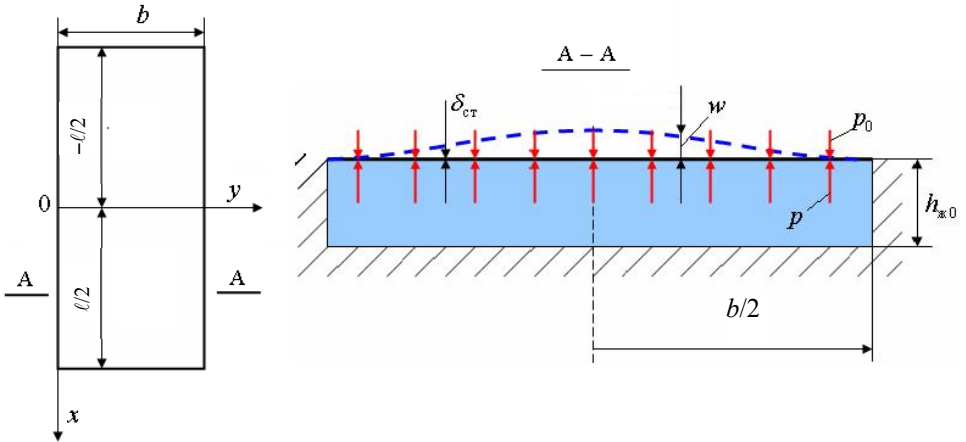


Рис. 1. Изгиб верхней пластины канала прямоугольного сечения под действием избыточного внутреннего давления

Изменение объема теплоносителя за счет изменения агрегатного состояния можно записать в виде

$$\Delta V_T = b \ell \xi \left(\frac{\rho_{ж} - \rho_T}{\rho_{ж}} \right), \quad (1)$$

где b — ширина пластины; ℓ — длина пластины; ξ — толщина слоя твердой фазы; $\rho_{ж}$ — плотность жидкой фазы; ρ_T — плотность твердой фазы.

В случае $\rho_{ж} > \rho_T$ перемещения прямоугольной защемленной пластины, нагруженной давлением, можно определить из выражения [1]

$$w(x, y) = g(x)f(y), \quad (2)$$

где

$$f(y) = \left(\frac{y}{b} \right)^4 - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 + \left(\frac{y}{b} \right)^2;$$

$$g(x) = C_1 \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(\beta x) + g_0,$$

$$\alpha = \frac{4,15}{b}, \quad \beta = \frac{2,29}{b}, \quad g_0 = 0,0417 \frac{\Delta p}{D} b^4,$$

$$g(x)|_{x=\pm \frac{\ell}{2}} = 0, \quad \left. \frac{d[g(x)]}{dx} \right|_{x=\pm \frac{\ell}{2}} = 0,$$

$$C_1 = - \frac{g_0 \left[\alpha \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) + \beta \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \right]}{\alpha \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) + \beta \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right)},$$

$$C_2 = \frac{g_0 \left[\alpha \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) - \beta \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \right]}{\alpha \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) + \beta \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right)},$$

$$D = \frac{E \delta_{\text{ст}}^3}{12(1-\mu^2)},$$

$$\Delta p = p - p_0.$$

Здесь w — перемещение; E — модуль упругости; $\delta_{\text{ст}}$ — толщина пластины; μ — коэффициент Пуассона; p — давление на внутренней стороне пластины; p_0 — внешнее давление.

Запишем выражение для $g(x)$ в виде

$$g(x) = g_0 \left[1 - \tilde{C}_1 \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(\beta x) + \tilde{C}_2 \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(\beta x) \right],$$

где

$$\tilde{C}_1 = -\frac{C_1}{g_0}, \quad \tilde{C}_2 = \frac{C_2}{g_0}.$$

Изменение внутреннего объема щели, вызванного изгибом верхней пластины,

$$\Delta V_w = \iint g(x) f(y) dx dy. \quad (3)$$

Проведем интегрирование и получим

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(\beta x) dx = \left[\frac{\alpha \operatorname{sh}(\alpha x) \cos(\beta x) + \beta \operatorname{ch}(\alpha x) \sin(\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\alpha \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) + \beta \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \right],$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(\beta x) dx = \left[\frac{\alpha \operatorname{ch}(\alpha x) \sin(\beta x) - \beta \operatorname{sh}(\alpha x) \cos(\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\alpha \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) - \beta \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \right],$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} 1 dx = \ell,$$

$$\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} g(x) dx = g_0 \left\{ \ell - \frac{2\tilde{C}_1}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\alpha \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) + \beta \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2\tilde{C}_2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\alpha \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) - \beta \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \right] \right\},$$

$$\int_0^b f(y) dy = \int_0^b \left[\left(\frac{y}{b} \right)^4 - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] dy = \frac{b}{30},$$

$$\Delta V_w = g_0 \frac{b}{30} \left\{ \ell - \frac{2\tilde{C}_1}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\alpha \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) + \beta \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2\tilde{C}_2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\alpha \operatorname{ch} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \sin \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) - \beta \operatorname{sh} \left(\alpha \frac{\ell}{2} \right) \cos \left(\beta \frac{\ell}{2} \right) \right] \right\}. \quad (4)$$

Приведем полученное выражение к безразмерному виду:

$$\Delta \bar{V}_w = \bar{g}_0 k_0. \quad (5)$$

Здесь

$$k_0 = \bar{\ell} - 0,089 \bar{C}_1 \left[4,15 \operatorname{sh}(2,075 \bar{\ell}) \cos(1,145 \bar{\ell}) + \right.$$

$$\left. + 2,29 \operatorname{ch}(2,075 \bar{\ell}) \sin(1,145 \bar{\ell}) \right] + 0,089 \bar{C}_2 \left[4,15 \operatorname{ch}(2,075 \bar{\ell}) \sin(1,145 \bar{\ell}) - \right.$$

$$\left. - 2,29 \operatorname{sh}(2,075 \bar{\ell}) \cos(1,145 \bar{\ell}) \right],$$

$$\bar{C}_1 = \frac{4,15 \operatorname{ch}(2,075 \bar{\ell}) \sin(1,145 \bar{\ell}) + 2,29 \operatorname{sh}(2,075 \bar{\ell}) \cos(1,145 \bar{\ell})}{4,15 \cos(1,145 \bar{\ell}) \sin(1,145 \bar{\ell}) + 2,29 \operatorname{sh}(2,075 \bar{\ell}) \operatorname{ch}(2,075 \bar{\ell})},$$

$$\bar{C}_2 = \frac{4,15 \operatorname{sh}(2,075 \bar{\ell}) \cos(1,145 \bar{\ell}) - 2,29 \operatorname{ch}(2,075 \bar{\ell}) \sin(1,145 \bar{\ell})}{4,15 \cos(1,145 \bar{\ell}) \sin(1,145 \bar{\ell}) + 2,29 \operatorname{sh}(2,075 \bar{\ell}) \operatorname{ch}(2,075 \bar{\ell})},$$

$$\Delta \bar{V} = \frac{\Delta V}{b^3}, \quad \bar{g}_0 = 0,0417 \frac{b^3 \Delta p}{30D} = \frac{0,01668 \Delta \bar{p} (1 - \mu^2)}{\bar{E} \bar{\delta}_{\text{ст}}^3},$$

$$\Delta \bar{p} = \frac{\Delta p}{p_0}, \quad \bar{E} = \frac{E}{p_0}, \quad \bar{\ell} = \frac{\ell}{b}, \quad \bar{\delta}_{\text{ст}} = \frac{\delta_{\text{ст}}}{b}.$$

Если изгибаются и верхняя и нижняя пластины (случай, когда нижняя пластина не является абсолютно жесткой), то объем щели увеличивается на

$$\Delta \bar{V}_w = 2 \bar{g}_0 k_0.$$

Приравнивая соотношения (1) и (4), получаем в безразмерном виде:

$$\bar{\ell} \bar{\xi} \left(\frac{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}} \right) = \bar{g}_0 k_0 = \frac{0,01668 \Delta \bar{p} (1 - \mu^2) k_0}{\bar{E} \bar{\delta}_{\text{ст}}^3}.$$

Решаем относительно безразмерного давления:

$$\bar{p} = \frac{60 \bar{E} \bar{\delta}_{\text{ст}}^3 k_{\ell}}{(1 - \mu^2)} \bar{\xi} (1 - k_p) + 1. \quad (6)$$

Здесь $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$; $\bar{\xi} = \frac{\xi}{b}$; $k_{\ell} = \frac{\bar{\ell}}{k_0}$; $k_p = \frac{\rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}}$.

Рассмотрим процесс кристаллизации жидкости. В качестве первого приближения примем предположение о том, что теплофизические свойства твердой фазы постоянны, температура кристаллизации не зависит от давления, а температура в стенке и твердой фазе распределена по линейному закону (рис. 2).

Зависимость толщины слоя твердой фазы от времени можно определить из условия Стефана на границе раздела жидкой и твердой фаз.

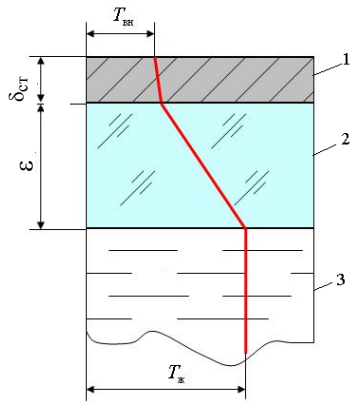


Рис. 2. Распределение температур в исследуемой области: 1 — пластина; 2 — слой льда; 3 — жидкая фаза

$$(T_{\text{ж}} - T_{\text{вн}}) / \left(\frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{\xi}{\lambda_{\text{т}}} \right) = L \rho_{\text{т}} \frac{d\xi}{d\tau},$$

где $T_{\text{ж}}$ — температура жидкой фазы; $T_{\text{вн}}$ — температура наружной поверхности стенки; $\lambda_{\text{ст}}$ — теплопроводность стенки; $\lambda_{\text{т}}$ — теплопроводность твердой фазы; L — теплота кристаллизации; τ — время.

Запишем условие Стефана в безразмерном виде:

$$\frac{1}{k_1 \bar{\delta}_{\text{ст}} + \bar{\xi}} = k_2 \frac{d\bar{\xi}}{d\text{Fo}}, \quad (7)$$

где $k_1 = \frac{\lambda_{\text{т}}}{\lambda_{\text{ст}}}$; $k_2 = \frac{L}{\Delta T c_{\text{т}}}$; $\text{Fo} = \frac{a_{\text{т}} \tau}{b^2}$; $a_{\text{т}} = \frac{\lambda_{\text{т}}}{c_{\text{т}} \rho_{\text{т}}}$; $\Delta T = T_{\text{ж}} - T_{\text{вн}}$.

После интегрирования получаем

$$\text{Fo} = k_2 \left(k_1 \bar{\delta}_{\text{ст}} \bar{\xi} + \frac{\bar{\xi}^2}{2} \right).$$

Решим полученное соотношение относительно величины $\bar{\xi}$, имеющей физический смысл:

$$\bar{\xi} = k_1 \bar{\delta}_{\text{ст}} \left(\sqrt{1 + \frac{2\text{Fo}}{k_2 (k_1 \bar{\delta}_{\text{ст}})^2}} - 1 \right). \quad (8)$$

После подстановки соотношения (8) в решение (5) получаем для случая жесткого закрепления пластины

$$\bar{p} = \frac{60 \bar{E} \bar{\delta}_{\text{ст}}^4 k_{\ell} k_1}{(1 - \mu^2)} \left(\sqrt{1 + \frac{2\text{Fo}}{k_2 (k_1 \bar{\delta}_{\text{ст}})^2}} - 1 \right) (1 - k_{\rho}) + 1. \quad (9)$$

Выражение (9) справедливо и для случая, когда нижняя пластина не теплоизолирована и имеет такую же толщину, как и верхняя. При этом обе пластины изгибаются одинаковым образом. Внутренний объем щели за счет деформации пластин увеличивается в 2 раза, но также в 2 раза растет и объем твердой фазы вследствие дополнительной кристаллизации жидкости на нижней пластине. Поэтому зависимость давления в щели от времени не изменится.

Если пренебречь тепловым сопротивлением стенки, то условие Стефана (7) принимает вид:

$$\frac{1}{\bar{\xi}} = k_2 \frac{d\bar{\xi}}{d\text{Fo}}.$$

После интегрирования:

$$Fo = \frac{k_2 \bar{\xi}^2}{2}, \quad \bar{\xi} = A\sqrt{Fo},$$

где $A = \sqrt{\frac{2}{k_2}}$.

Более точное аналитическое решение может быть получено, если температуру не задавать линейно распределенной в твердой фазе, а определять из решения уравнения теплопроводности [7]. В этом случае

$$\bar{\xi} = \beta\sqrt{Fo}. \quad (10)$$

Коэффициент β находят из трансцендентного уравнения

$$\frac{K_2 \beta}{2} = \frac{\exp\left(-\frac{\beta^2}{4}\right)}{\int_0^\beta \exp\left(-\frac{\beta^2}{4}\right) d\beta}. \quad (11)$$

Уравнение (9) принимает при этом вид:

$$\bar{p} = \frac{60\bar{E}\bar{\delta}_{ст}^3 k_\ell}{(1-\mu^2)} \beta\sqrt{Fo} (1-k_\rho) + 1. \quad (12)$$

Давление принимает максимальное значение при полном замерзании жидкости. Используя закон сохранения массы жидкости до и после ее кристаллизации, можно записать:

$$\rho_{ж} \ell b h_{ж0} = \rho_{т} \ell b \xi_{пр},$$

или

$$\bar{\xi}_{пр} = \frac{\bar{h}_{ж0}}{k_\rho}. \quad (13)$$

Здесь $\bar{\xi}_{пр}$ — приведенная толщина слоя твердой фазы; $\bar{h}_{ж0}$ — начальная высота щели, занимаемая жидкой фазой.

После подстановки соотношения (13) в уравнение (6) получаем для случаев жесткого закрепления верхней пластины при отсутствии деформации нижней пластины:

$$\bar{p}_{max} = \frac{60\bar{E}\bar{\delta}_{ст}^3 k_\ell \bar{h}_{ж0}}{(1-\mu^2)k_\rho} (1-k_\rho) + 1. \quad (14)$$

Если верхняя и нижняя пластины имеют одинаковую толщину стенок и одинаковую степень деформации, то, соответственно, справедлива запись:

$$\bar{p}_{\max} = \frac{30\overline{E\delta_{\text{ст}}^3 k_{\ell} \bar{h}_{\text{ж0}}}{(1-\mu^2)k_p} (1-k_p) + 1. \quad (15)$$

По результатам проделанной работы можно сделать следующие выводы. Полученные аналитические соотношения (9) и (12) позволяют определять изменение давления по времени в плоском канале при замерзании теплоносителя. Использование этих соотношений дает возможность рассчитать времена достижения предельного давления в канале, при котором происходит разрушение конструкции радиаторов системы термостатирования. Из соотношений (14), (15) при заданном допустимом давлении можно определить геометрические характеристики канала, позволяющие сохранить целостность конструкции в случае полного замерзания теплоносителя.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. Москва, Наука, 1966, 635 с.
- [2] Феодосьев В.И. *Сопrotивление материалов*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999, 592 с.
- [3] Колотилин А.Н., Матченко О.Н. Построение самосогласованной теории тонких пластин. *Известия ТулГУ. Серия: Строительные материалы, конструкции и сооружения*, 2004, вып. 6, с. 53–62.
- [4] Босаков С.В. К решению контактной задачи для круглой пластинки. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, № 1, с. 59–61.
- [5] Каюк Я.Ф. О динамическом изгибе слоистых пластин. *Прикладная механика*, 2009, т. 45, № 4, с. 133–144.
- [6] Мейрманов А.М. *Задача Стефана*. Новосибирск, Наука, 1986, 239 с.
- [7] Парфентьева Н.А., Самарин О.Д. О колебаниях фронта промерзания в ограждениях и численном моделировании задачи Стефана. *Строительные материалы, оборудование, технологии*, 2002, т. XXI, № 11, с. 46–47.
- [8] Кувыркин Г.Н., Ломохова А.В. Математическое моделирование процесса кристаллизации в установках для выращивания монокристаллов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2007, № 4, с. 37–44.
- [9] Крылов Д.А., Мельникова Ю.С. Математическое моделирование распределения температурных полей в криолитозоне. *Студенческий научный вестник. Сб. ст. Четвертой науч.-техн. выставки «Политехника»*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009, с. 94–97.
- [10] Крылов Д.А., Сидняев Н.И. Метод расчета массовой кристаллизации многофазных реологических сред. *Материалы Четвертой конф. геокриологов России. МГУ им. М.В. Ломоносова, 7–9 июня 2011. Т. 1, ч. 1. Физико-химия, теплофизика и механика мерзлых пород*. Москва, Университетская книга, 2011, с. 129–136.
- [11] Товарных Г.Н. Рост давления в плоской щели при замерзании теплоносителя. *Инженерный вестник: электронный научно-технический журнал*, 2014, № 11. URL: <http://engjournal.ru/issues>.

Статья поступила в редакцию 21.05.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Товарных Г.Н. Рост давления в плоском канале при замерзании теплоносителя. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5 (41). URL: <http://engjournal.ru/catalog/pmce/mdpr/1396.html>

Товарных Геннадий Николаевич родился в 1946 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 25 научных работ в области механики жидкости и газа, тепломассопереноса. e-mail: tovarnjx@yandex.ru

Pressure rise in a flat channel during heat carrier freezing

© G.N. Tovarnykh

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article deals with the problem of changing the pressure acting on the walls of a flat rectangular channel filled with freezing liquid. It is supposed that during freezing of the liquid due to the difference in densities between solid and liquid phases the volume, which it occupies in the slot, changes and channel walls deform under the influence of pressure difference between the external environment and the interior medium. Using the assumption of the incompressibility of the liquid and solid phases, the change in the volume of the channel internal area due to the deformation of the enclosure walls is equal to the volume change of the liquid by changing the state of aggregation.

It is assumed that the freezing takes place in the upper part of the channel, the liquid temperature is constant and equal to the crystallization temperature, and the interface of the solid and liquid phases is flat. The side walls and the bottom are considered insulated and totally rigid.

The analytical expressions for determining the pressure acting on the walls of a flat rectangular channel filled with a liquid at its freezing are obtained.

Keywords: liquid, solid phase, plate, channel, pressure, temperature, volume, crystallization, deformation.

REFERENCES

- [1] Timoshenko S.P., Voinovsky-Kruger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka, 1966, 635 p.
- [2] Feodosiev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, BMSTU Publ., 1999, 592 p.
- [3] Kolotilin A.N., Matchenko O.N. *Izvestija TulGU. Seriya: Stroitelnye materialy, konstruksii i sooruzheniya — Proceedings of the TSU. Series: Building materials, construction and structures*, 2004, issue 6, pp. 53–62.
- [4] Bosakov S.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied mathematics and mechanics*, 2008, vol. 72, no. 1, pp. 59–61.
- [5] Kayuk Ya.F. *Prikladnaya mekhanika — Applied mechanics*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 133–144.
- [6] Meirmanov A.M. *Zadacha Stefana* [Stefan Problem]. Novosibirsk, Nauka, 1986, 239 p.
- [7] Parfentyeva N.A., Samarin O.D. *Stroitelnye materialy, oborudovanie, technologii — Construction materials, equipment, technologies*, 2002, vol. XXI, no. 11, pp. 46–47.
- [8] Kuvyrkin G.N., Lomokhova V.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2007, no. 4, pp. 37–44.
- [9] Krylov D.A., Mel'nikova Yu.S. *Matematicheskoe modelirovanie raspredeleniya temperaturnykh poley v kriolitozone* [Mathematical modeling of distribution of temperature fields in the permafrost zone]. *Studencheskiy nauchnyi vestnik — Student scientific journal. Collected papers of the fourth scientific and technical exhibition "Polytechnic"*. Moscow, BMSTU Publ., 2009, pp. 94–97.
- [10] Krylov D.A., Sidnyaev N.I. *Metod rascheta massovoi kristallizatsii mnogofaznykh reologicheskikh sred* [Method of calculation of mass crystallization of multiphase rheological environments]. *Proceedings of the Fourth conference of geocryologists of Russia. Lomonosov MSU*, June 7–9, 2011, vol. 1, part 1, Physical chemistry, physics and mechanics of frozen soils. Moscow, Universitetskaya kniga Publ., 2011, pp. 129–136.

- [11] Tovarnykh G.N. *Inzhenernyi vestnik: elektronnyi nauchno-tekhnicheskiiy zhurnal* — *Engineering journal: Electronic scientific journal*, 2014, no. 11. Available at: <http://engjournal.ru/issues>.

Tovarnykh G.N. (b. 1946) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of the Spacecrafts and Launch Vehicles Department at the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 25 publications in the field of liquid and gas mechanics, heat and mass transfer. e-mail: tovarnjx@yandex.ru