

## Приближенный метод расчета времени плавления шугообразного криопродукта в сферической емкости

© А.В. Тарасова, Г.Н. Товарных

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Предложен приближенный аналитический метод расчета времени плавления шугообразного криопродукта в сферической емкости при дренажном хранении. Рассмотрена задача о нахождении положения границы раздела между чистой жидкостью и шугой с учетом тепловых потоков со стороны стенок сферической емкости и из области чистой жидкости. В задаче принято, что область шуги изотермична и имеет температуру плавления твердой фазы, граница раздела шуга — чистая жидкость плоская, свободная поверхность жидкости неподвижна и имеет температуру насыщения при заданном давлении. Температура в области чистой жидкости распределена по линейному закону. Полученные приближенные соотношения позволяют оценить время плавления шугообразного криопродукта в емкости без детального расчета температурных полей в области чистой жидкости.*

**Ключевые слова:** криогенная жидкость, криопродукт, дренажное хранение, жидкость, шуга, плавление, емкость.

В настоящее время наблюдается повышение интереса к пилотируемому исследованию дальнего космоса, а также к освоению Луны. Очевидно, что для этих целей не будут использоваться ЖРД, работающие на высококипящих низкоэффективных компонентах топлива. Основное место займут ядерные ракетные двигатели, поскольку они обладают высоким удельным импульсом и высокой тягой. Однако рабочим телом в таких двигателях является жидкий водород, который имеет низкую плотность и низкую температуру кипения и просто выкипает при использовании пассивных средств хранения.

Одним из эффективных путей уменьшения потерь криогенных жидкостей при хранении является их предварительное глубокое охлаждение вплоть до тройной точки, а также хранение в шугообразном состоянии. Шугообразный криопродукт представляет собой смесь жидкой и твердой фаз.

При использовании криопродуктов в шугообразном состоянии намного снижаются затраты на транспортировку и хранение, поскольку тепло, проникающее в резервуар, тратится вначале на плавление твердых частичек и лишь затем — на нагрев и испарение жидкости.

Низкая плотность и низкая температура кипения жидкого водорода затрудняют его использование для продолжительных космических полетов. Переход на шугообразный водород позволит повысить плотность и увеличить хладоемкость, а следовательно, увеличить время хранения водорода. Результаты исследований по применению шугообразного водорода в качестве ракетного топлива показали, что по сравнению с применением насыщенной жидкости можно увеличить массу полезного груза и соответственно уменьшить потери топлива.

Исследование процессов охлаждения, хранения и транспортировки криопродуктов в неустановившихся режимах при наличии внешних теплопритоков, фазовых переходов и вибрационных нагрузок имеет важное значение. В работах [1, 2] приведены результаты численного решения задачи о плавлении шугообразного криопродукта в цилиндрической емкости. Использованию предварительного охлаждения жидкостей с целью уменьшения их потерь при хранении посвящена работа [3]. Методика расчета положения подвижной границы с учетом плавления твердой фазы представлена в работах [4–8].

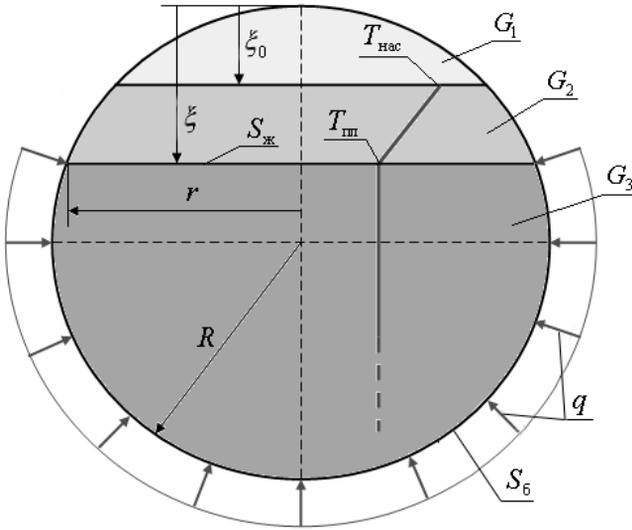
В настоящей статье получены приближенные формулы для определения времени плавления шугообразного криопродукта в сферической емкости.

Шуга рассматривается как квазижидкая среда. Плавление происходит как под действием тепловых потоков, поступающих со стороны твердых стенок, имеющих контакт с шугой, так и под действием теплового потока, поступающего к шуге сверху, со стороны чистой жидкости. При этом принимается предположение о том, что температура в чистой жидкости распределена в вертикальном направлении по линейному закону (рис. 1).

Балансное условие Стефана для шуги, частично заполняющей сферическую полость, имеет вид

$$\left( q S_6 + \lambda_{\text{ж}} \frac{T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}}}{\xi - \xi_0} S_{\text{ж}} \right) dt = L_{\text{пл}} \rho_{\text{тв}} \varphi dV, \quad (1)$$

где  $q$  — удельный тепловой поток;  $\lambda_{\text{ж}}$  — теплопроводность жидкой фазы;  $t$  — время;  $L_{\text{пл}}$  — теплота плавления;  $\rho_{\text{тв}}$  — плотность твердой фазы;  $T_{\text{нас}}$  — температура насыщенных паров (температура границы раздела жидкость — пар);  $\varphi$  — концентрация твердой фазы в шуге;  $dV$  — элементарный объем, в котором происходит плавление шуги (другие обозначения — см. подпись к рис. 1).



**Рис. 1.** Плавление шуги в сферической емкости:

$G_1$  — область пара;  $G_2$  — область чистой жидкости;  $G_3$  — область шуги;  $R$  — радиус сферической емкости;  $r$  — текущий радиус;  $\xi_0$  — начальная координата границы раздела шуги — область чистой жидкости;  $\xi$  — координата границы раздела шуги — область чистой жидкости;  $T_{пл}$  — температура плавления твердой фазы;  $S_{ж}$  — площадь поверхности раздела между шугой и областью чистой жидкости;  $S_б$  — площадь поверхности, имеющая контакт с шугой

В соответствии с рис. 1 запишем следующие геометрические соотношения:

$$r = \sqrt{R^2 - (R - \xi)^2} = \sqrt{2R\xi - \xi^2};$$

$$S_б = 2\pi R(2R - \xi);$$

$$S_{ж} = \pi(2R - \xi)\xi;$$

$$dV = \pi(2R - \xi)\xi d\xi.$$

Подставив эти соотношения в (1), получим

$$\left( q 2\pi R(2R - \xi) + \lambda_{ж} \frac{T_{нас} - T_{пл}}{\xi - \xi_0} \pi(2R - \xi)\xi \right) dt = \\ = L_{пл} \rho_{тв} \phi \pi(2R - \xi)\xi d\xi.$$

После сокращения на общий множитель  $\pi(2R - \xi)$  имеем

$$\left( q 2R + \lambda_{\text{ж}} \frac{T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}}}{\xi - \xi_0} \xi \right) dt = L_{\text{пл}} \rho_{\text{ТВ}} \Phi \xi d\xi. \quad (2)$$

Приведем уравнение (2) к безразмерному виду:

$$2\bar{q} + \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0} = \text{Ko} \bar{\xi} \frac{d\bar{\xi}}{d\text{Fo}}, \quad (3)$$

где  $\bar{q} = \frac{qR}{\lambda_{\text{ж}}(T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}})}$  — безразмерный тепловой поток  $\bar{\xi} = \xi/R$ ;

$\bar{\xi}_0 = \xi_0/R$ ;  $\text{Ko} = \frac{L_{\text{пл}}\rho_{\text{ТВ}}\Phi}{c_{\text{рж}}\rho_{\text{ж}}(T_{\text{нас}} - T_{\text{пл}})}$  — число Коссовича;  $\text{Fo} = a_{\text{ж}}t/R^2$  —

число Фурье;  $a_{\text{ж}} = \lambda_{\text{ж}}/c_{\text{рж}}\rho_{\text{ж}}$  — температуропроводность жидкой фазы;  $c_{\text{рж}}$  — теплоемкость жидкой фазы;  $\rho_{\text{ж}}$  — плотность жидкой фазы.

Из соотношения (3) можно выразить число Фурье:

$$d\text{Fo} = \frac{\text{Ko}(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}\bar{\xi}_0)d\bar{\xi}}{[(2\bar{q} + 1)\bar{\xi} - 2\bar{q}\bar{\xi}_0]}.$$

Приведем это соотношение к виду

$$d\text{Fo} = A \frac{(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}\bar{\xi}_0)d\bar{\xi}}{(B\bar{\xi} - 1)}, \quad (4)$$

где  $A = \frac{\text{Ko}}{2\bar{q}\bar{\xi}_0}$ ;  $B = \frac{(2\bar{q} + 1)}{2\bar{q}\bar{\xi}_0}$ .

Введем обозначения:

$$y = B\bar{\xi} - 1 \rightarrow \bar{\xi} = \frac{y+1}{B} \rightarrow \bar{\xi}^2 = \frac{y^2 + 2y + 1}{B^2};$$

$$dy = B d\bar{\xi} \rightarrow d\bar{\xi} = \frac{dy}{B}.$$

После интегрирования уравнения (4) получим

$$\text{Fo} = \frac{A}{B^3} \left[ B(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) \left( \frac{B}{2}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) + 1 \right) + (1 - B\bar{\xi}_0) \ln \left( \frac{B\bar{\xi} - 1}{B\bar{\xi}_0 - 1} \right) \right]. \quad (5)$$

Время полного плавления шуги можно найти решением (5), полагая  $\bar{\xi} = 2$ . Тогда

$$\text{Fo}_{\text{пл}} = \frac{A}{B^3} \left[ B(2 - \bar{\xi}_0) \left( \frac{B}{2}(2 - \bar{\xi}_0) + 1 \right) + (1 - B\bar{\xi}_0) \ln \left( \frac{2B - 1}{B\bar{\xi}_0 - 1} \right) \right].$$

Текущий объем, занимаемый шугой, определяем по формуле

$$V_{\text{ш}} = \int_{\xi}^{2R} dV = \pi \int_{\xi}^{2R} (2R - \xi) \xi d\xi = \frac{\pi}{3} (2R - \xi)^2 (R + \xi).$$

Отношение текущего объема, занимаемого шугой, к первоначальному имеет вид

$$\frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{ш}0}} = \frac{(2R - \xi)^2 (R + \xi)}{(2R - \xi_0)^2 (R + \xi_0)} = f_1(t).$$

Приводя к безразмерному виду, получаем:

$$\bar{V}_{\text{ш}} = \frac{(2 - \bar{\xi})^2 (1 + \bar{\xi})}{(2 - \bar{\xi}_0)^2 (1 + \bar{\xi}_0)} = f_2(\text{Fo}), \quad (6)$$

где  $\bar{V}_{\text{ш}} = V_{\text{ш}}/V_{\text{ш}0}$ .

Если пренебречь тепловым потоком, поступающим к шуге со стороны чистой жидкости, то вместо (1) можно записать

$$q S_{\delta} dt = L_{\text{пл}} \rho_{\text{тв}} \varphi dV.$$

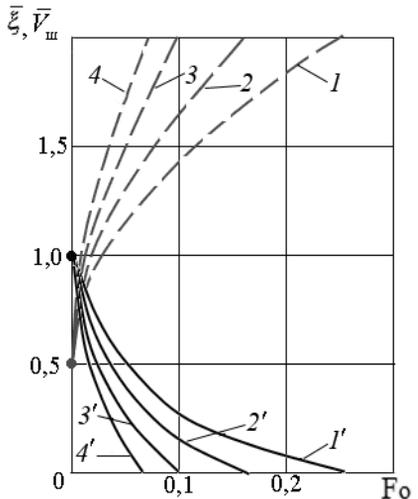
После приведения к безразмерной форме находим

$$2\bar{q} = \text{Ko} \bar{\xi} \frac{d\bar{\xi}}{d\text{Fo}}.$$

Проинтегрировав, получаем

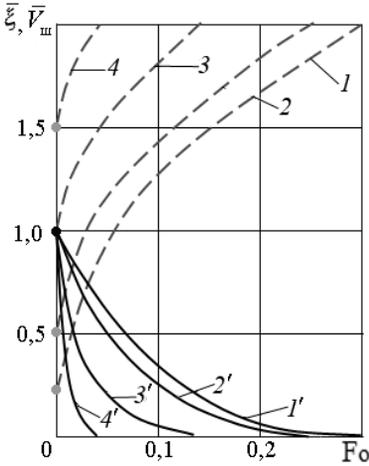
$$\text{Fo} = \frac{\text{Ko}}{4\bar{q}} (\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}_0^2).$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2–5. Базовый вариант соответствует следующим значениям основных параметров:  $\bar{q} = 1$ ;  $\text{Ko} = 0,5$ ;  $\bar{\xi}_0 = 0,5$ .

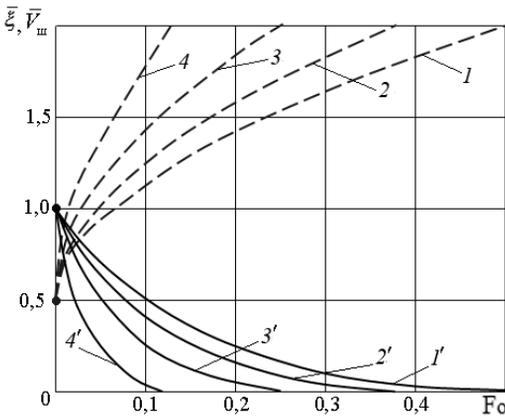


**Рис. 2.** Зависимость положения границы раздела шуга — область чистой жидкости  $\bar{\xi}$  (---) и относительного объема, занимаемого шугой  $\bar{V}_{\text{ш}}$  (—), числа Фурье от времени для различных значений теплового потока  $\bar{q}$  ( $\text{Ko} = 0,5$ ;  $\bar{\xi}_0 = 0,5$ ):

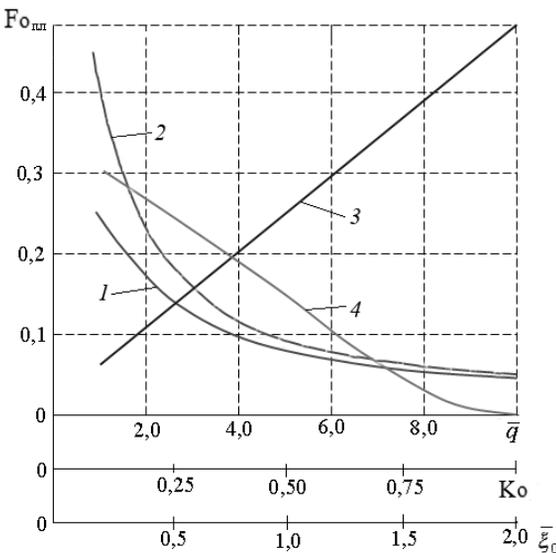
$\bar{q} = 1$  (1, 1'); 2 (2, 2'); 4 (3, 3'); 6 (4, 4')



**Рис. 3.** Зависимость положения границы раздела шуга — область чистой жидкости  $\bar{\xi}$  (---) и относительного объема, занимаемого шугой  $\bar{V}_{ш}$  (—), от числа Фурье для различных значений начального положения границы  $\bar{\xi}_0$  ( $\bar{q} = 1$ ;  $Ko = 0,5$ ):  
 $\bar{\xi}_0 = 0, 25$  (1, 1');  $0, 5$  (2, 2');  $1, 0$  (3, 3');  $1, 5$  (4, 4')



**Рис. 4.** Зависимость положения границы раздела шуга — область чистой жидкости  $\bar{\xi}$  (---) и относительного объема, занимаемого шугой  $\bar{V}_{ш}$  (—), от числа Фурье для различных значений числа Коссовича ( $\bar{q} = 1$ ;  $\bar{\xi}_0 = 0,5$ ):  
 $Ko = 1, 0$  (1, 1');  $0, 75$  (2, 2');  $0, 5$  (3, 3');  $0, 25$  (4, 4')



**Рис. 5.** Зависимость полного времени плавления от основных параметров:

1 — зависимость  $Fo_{пл} = f(\bar{q})$  с учетом теплового потока со стороны чистой жидкости; 2 — зависимость  $Fo_{пл} = f(\bar{q})$  без учета теплового потока со стороны чистой жидкости; 3 — зависимость  $Fo_{пл} = f(Ko)$ ; 4 — зависимость  $Fo_{пл} = f(\bar{\xi}_0)$

На рис. 2 зависимость положения границы раздела шуга — область чистой жидкости  $\bar{\xi}$  определена по уравнению (5), зависимость относительного объема, занимаемого шугой  $\bar{V}_{ш}$ , — по уравнению (6).

На рис. 5 расхождение между кривыми 1 и 2 при  $\bar{q} = 1$  достигает 88 %, а при  $\bar{q} \geq 10$  — менее 10 %. Это позволяет сделать вывод, что при  $\bar{q} \geq 10$  можно пренебречь тепловым потоком, поступающим к шуге со стороны чистой жидкости, так как его влияние несущественно. Кривая 3 показывает линейную зависимость  $Fo_{пл} = f(Ko)$ , зависимость 4 в диапазоне  $0,25 \leq \bar{\xi}_0 \leq 1,6$  также близка к линейной.

Анализ рис. 2–5 показывает существенное влияние параметров  $\bar{q}$ ,  $Ko$ ,  $\bar{\xi}$  на плавление шугообразного криопродукта. Полученные приближенные зависимости позволяют оценить время плавления криопродуктов в шугообразном состоянии в сферической емкости без детального расчета температурных полей в области чистой жидкости. Полученные результаты можно использовать при проектировании систем долговременного хранения криогенных компонентов топлива. В дальнейшем с учетом полученных данных планируется разработка непосредственно орбитального хранилища криогенных компонентов топлива.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Товарных Г.Н. Тепловая конвекция в замкнутой емкости, заполненной компонентом в трех фазовых состояниях. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 7(19). URL: <http://engjournal.ru/articles/861/861.pdf>
- [2] Товарных Г.Н. Плавление шугообразного водорода в вертикальной цилиндрической емкости. *Инженерный вестник*, 2014, № 10. URL: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738604.html>
- [3] Александров А.А., Денисов О.Е., Золин А.В., Чугунков В.В. Охлаждение ракетного топлива стартовым оборудованием с применением жидкого азота. *Известия вузов. Сер. Машиностроение*, 2013, № 4, с. 24–29.
- [4] Товарных Г.Н. Рост давления в плоской щели при замерзании теплоносителя. *Инженерный вестник*, 2014, № 11. URL: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738625.html>
- [5] Кувыркин Г.Н., Ломохова А.В. Математическое моделирование процесса кристаллизации в установках для выращивания монокристаллов. *Известия вузов. Сер. Машиностроение*, 2007, № 4, с. 37–44.
- [6] Крылов Д.А., Сидняев Н.И. Метод расчета массовой кристаллизации многофазных реологических сред. *Материалы Четвертой конференции геокриологов России*, Москва, 7–9 июня 2011 г., МГУ им. М.В. Ломоносова, Т. 1. Часть 1: Физико-химия, теплофизика и механика мерзлых пород. Москва, Университетская книга, 2011, с. 129–136.
- [7] Крылов Д.А. Математическое моделирование температурных полей с учетом фазовых переходов в криолитозоне. *Наука и образование: Электронное научно-техническое издание*, 2012, № 4. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/354740.html>

- [8] Парфентьева Н.А., Самарин О.Д. О колебаниях фронта промерзания в ограждениях и численном моделировании задачи Стефана. *Строительные материалы, оборудование, технологии XXI*, 2002, № 11, с. 46–47.

Статья поступила в редакцию 29.04.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тарасова А.В., Товарных Г.Н. Приближенный метод расчета плавления шугообразного криопродукта в сферической емкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/arise/itae/1394.html>

**Тарасова Анастасия Владимировна** родилась в 1994 г., студентка кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-исследовательского института «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер Научно-производственного центра «Специальная техника» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: механика жидкости и газа, тепломассопереноса.

**Товарных Геннадий Николаевич** родился в 1946 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 25 научных работ в области механики жидкости и газа, тепломассопереноса. e-mail: [tovarnjx@yandex.ru](mailto:tovarnjx@yandex.ru)

## An approximate method of calculating time of a slush-like cryogenic product melting in a spherical container

© A.V. Tarasova, G.N. Tovarnykh

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article presents an approximate analytical method for calculating the melting time of a slush-like cryogenic product in a spherical container when drain storage. The problem of finding the position of the interface between the pure liquid region and slush is examined with allowance for the heat flow from the walls and the area of pure liquid. It is accepted that the area of slush is isothermal and has a melting point of the solid phase, the interface slush — pure liquid is flat, free surface of the liquid is stationary and has a saturation temperature at a given pressure. The temperature in the area of pure liquid is linearly distributed. The resulting approximate relations allow us to evaluate the melting time of a slush-like cryogenic product in the container without a detailed calculation of the temperature fields in the pure liquid.*

**Keywords:** cryogenic liquid, cryogenic product, drain storage, liquid, slush, melting, container.

### REFERENCES

- [1] Tovarnykh G.N. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovations*, 2013, issue no. 7(19). Available at: <http://engjournal.ru/articles/861/861.pdf>
- [2] Tovarnykh G.N. *Inzhenernyi vestnik — Engineering Bulletin*, 2014, no. 10. Available at: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738604.html>
- [3] Aleksandrov A.A., Denisov O.E., Zolin A.V., Chugunkov V.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostrieniye — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2013, no. 4, pp. 24–29.
- [4] Tovarnykh G.N. *Inzhenernyi vestnik — Engineering Bulletin*, 2014, no. 11. Available at: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738625.html>
- [5] Kuvyrkin G.N., Lomohova A.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostrieniye — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2007, no. 4, pp. 37–44.
- [6] Krylov D.A., Sidnyaev N.I. Method of calculating the mass crystallization of multiphase rheological media // *Proceedings of the Fourth Conference of the Russian geocryologists. Lomonosov MSU, 7–9 June 2011, vol. 1. Part 1: Physical chemistry, thermal physics and mechanics of frozen soils*. Moscow, University Book, 2011, pp. 129–136.
- [7] Krylov D.A. *Nauka i obrazovanie: Elektronnoe nauchno-tekhnikeskoe izdanie – Science and Education: Electronic Scientific and Technical Publication*, 2012, no. 4. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/354740.html>
- [8] Parfentieva N.A., Samarin O.D. *Stroitelnye materialy, oborudovanie, tekhnologii XXI – Construction materials, equipment, technologies XXI*, 2002, no. 11, pp. 46–47.

**Tarasova A.V.** (b. 1994), a student of the Spacecraft and Launch Vehicles Department at Bauman Moscow State Technical University, an engineer of the Research Institute "Special Machinery" and an engineer of the Research and Production Center "Special Equipment" at BMSTU, an active participant in the activities of the Youth Space Center at

BMSTU. Research interests: liquid and gas mechanics, heat and mass transfer.

**Tovarnykh G.N.** (b. 1946) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. Ph.D. (Eng.), associate professor of the Spacecraft and Launch Vehicles Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 25 publications in the field of liquid and gas mechanics, heat and mass transfer.

e-mail: [tovarnjx@yandex.ru](mailto:tovarnjx@yandex.ru)