УДК 533.72

Влияние неупругих столкновений молекул многоатомного газа на коэффициент барнеттовского скольжения

© А.Б. Поддоскин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В рамках предложенной кинетической модели для многоатомного газа с вращательными степенями свободы молекул, в которой учтены вращательно-поступательные переходы молекул газа, решена задача о барнеттовском скольжении газа вдоль плоской поверхности. Получен коэффициент барнеттовского скольжения в виде функции, зависящей от частоты неупругих столкновений молекул газа и от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

Ключевые слова: *барнеттовское скольжение, многоатомный газ, вращательные степени свободы молекул.*

Как известно, если над поверхностью тела находится газ, в объеме которого созданы температурные напряжения, то возникает барнеттовское скольжение [1–3]. Этот эффект необходимо учитывать при построении теорий движения неоднородных газов в каналах, в динамике капель и аэрозольных частиц, и в частности при построении теории термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц [3].

В отличие от молекул простого (одноатомного) газа молекулы двухатомного и многоатомного газов обладают внутренними степенями свободы, что существенно усложняет кинетическое уравнение [4], поэтому для решения граничных задач применяют модельные кинетические уравнения [5–7]. В работе [7] предложено модельное уравнение, в котором учтены вращательные степени свободы молекул многоатомного газа, а свободные параметры модели выражены через парциальные факторы Эйкена [4]. В рамках этого модельного уравнения решена задача о барнеттовском скольжении многоатомного газа вдоль плоской поверхности. В результате получен коэффициент барнеттовского скольжения, который зависит от теплофизических параметров газа, числа неупругих столкновений молекул газа и от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

При рассмотрении стационарных задач в линейной постановке функцию распределения молекул многоатомного газа можно записать в виде [4]

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) = f_0(1 + \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})),$$

где

$$f_0 = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT_0}\right)^{3/2}\frac{\left(I_1I_2I_3\right)^{1/2}}{\left(2\pi kT_0\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT_0}-\frac{I_\alpha\omega_\alpha^2}{2kT_0}\right)$$

(n_0 и T_0 — равновесные концентрация и температура газа; m, $\mathbf{v}$ и ω_α — масса, линейная и угловая скорость молекулы; k — постоянная Больцмана; I_α — компоненты момента инерции многоатомной молекулы); $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ — функция, описывающая состояние газа в неравновесной области. Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование.

Нормировка f_0 соответствует соотношению

$$n_0 = \int f_0 d^3\omega d^3\mathrm{v},$$

в котором n_0 — числовая равновесная концентрация молекул газа.

В настоящей работе применяется модельное кинетическое уравнение для многоатомного газа с учетом вращательных степеней свободы [7]:

$$\mathbf{c}\cdot\nabla\Phi = \varepsilon\left(\nu+\left(c^2+c_\omega^2-3\right)\right)\tau+2\left(\mathbf{cG}\right)+$$

$$+\xi_1\left(\mathbf{cQ}^t\right)\left(c^2-5/2\right)+\xi_2\left(\mathbf{cQ}^r\right)\left(c_\omega^2-3/2\right)-\Phi\Big), \qquad (1)$$

где $c^2 = m\mathrm{v}^2\big/\left(2kT_0\right)$; $c_\omega^2 = I_\alpha\omega_\alpha^2\big/\left(2kT_0\right)$; $\mathbf{G} = \sqrt{m/2kT_0}\,\mathbf{u}$ — безразмерная скорость газа; ν, τ — отклонения от равновесных значений концентрации и температуры газа; $\mathbf{Q}^t$ и $\mathbf{Q}^r$ — безразмерные составляющие потока тепла, связанные с переносом поступательной (трансляционной) энергии молекул и переносом вращательной (ротационной) энергии; ε, ξ_1, ξ_2 — свободные параметры модели, которые связаны с парциальными факторами Эйкена $f^{\,t}$ и $f^{\,r}$ [4]. Мэзон и Мончик [8, 9] получили формулы, устанавливающие связь факторов Эйкена с числом неупругих столкновений молекул газа Z (подробнее см. [7]), поэтому параметры ε, ξ_1, ξ_2 зависят от Z.

Применяя метод Чепмена — Энскога к уравнению (1) и ограничиваясь при этом приближением, в котором из слагаемых второго порядка учтены только температурные напряжения, получаем функцию распределения вида

$$f_{ChB} = f_0\left(1+\nu+\left(c^2+c_\omega^2-4\right)\tau+2c_\alpha G_\alpha+\Psi_{Ch}+\Psi_B\right),$$

где

$$\Psi_{Ch} = a_1c_\alpha g_\alpha\left(5/2-c^2\right)+a_2c_\alpha g_\alpha\left(3/2-c_\omega^2\right)-b_1c_\alpha c_\beta\Pi_{\alpha\beta};$$

$$\Psi_B = d_1c_\alpha c_\beta T_{\alpha\beta}\left(5/2-c^2\right)+d_2c_\alpha c_\beta T_{\alpha\beta}\left(3/2-c_\omega^2\right);$$

$$d_1 = a_1 b_1/2;\ d_2 = a_2 b_1/2;$$

$$g_\alpha = \frac{\partial T}{T_0 \partial x_\alpha};\ T_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 T}{T_0 \partial x_\alpha \partial x_\beta};\ \Pi_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{m}{2kT_0}} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}.$$

Пусть над твердой плоской поверхностью находится многоатомный газ, в котором создан неоднородный градиент температуры. Направим ось OX декартовой системы координат перпендикулярно поверхности, а ось OY вдоль нее. Будем считать, что из компонент тензора напряжений $T_{\alpha\beta}$ отличной от нуля будет только $T_{xy} = \partial^2 T / \left(T_0 \partial x \partial y\right)$, тогда модельное кинетическое уравнение (1) для Φ можно записать следующим образом:

$$c_x \frac{d\Phi}{dx_0} = 2c_y G_y + \xi_1 c_y Q_y^t \left(c^2 - 5/2\right) + \xi_2 c_y Q_y^r \left(c_\omega^2 - 3/2\right) - \Phi, \tag{2}$$

где $x_0 = \varepsilon x$.

Далее задачу решаем методом полупространственных моментов [7]. Функцию Φ ищем в виде

$$\Phi = \eta(+)\cdot\Phi^+ + \eta(-)\cdot\Phi^-,$$

где

$$\eta(\pm) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \operatorname{sign} c_x\right);$$

$$\operatorname{sign} c_x = 1 \text{ для } c_x > 0;\ \operatorname{sign} c_x = -1 \text{ для } c_x < 0;$$

$$\Phi^\pm = c_y a_0^\pm(x) + c_x c_y a_1^\pm(x) + c_y c_x \left(c^2 - 5/2\right) a_2^\pm(x) + \\ + c_y c_x \left(c_\omega^2 - 3/2\right) a_3^\pm(x).$$

При этом макропараметры газа G_y, Q^t_y, Q^r_y имеют вид:

$$G_y = \frac{1}{4}(a_0^+ + a_0^-) + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}(a_1^+ - a_1^-) + \frac{1}{8\sqrt{\pi}}(a_2^+ - a_2^-);$$

$$Q_y^t = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}(a_1^+ - a_1^-) + \frac{13}{16\sqrt{\pi}}(a_2^+ - a_2^-);$$

$$Q_y^r = \frac{3}{8\sqrt{\pi}}(a_3^+ - a_3^-).$$

Умножая уравнение (2) последовательно на выражения

$$\eta(\pm) c_y \exp(-c^2 - c_\omega^2);$$

$$\eta(\pm) c_y c_x \exp(-c^2 - c_\omega^2);$$

$$\eta(\pm)c_y c_x (c^2 - 5/2)\exp(-c^2 - c_\omega^2);$$

$$\eta(\pm)c_y c_x (c_\omega^2 - 3/2)\exp(-c^2 - c_\omega^2)$$

и интегрируя по всему пространству скоростей ($\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$), получаем систему моментных уравнений в виде

$$M_{\alpha\beta}\frac{d}{dx_0}a_\beta = L_{\alpha\beta}a_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, ..., 8), \tag{3}$$

где матрицы $M_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta}$ имеют следующие элементы:
$M_{11} = M_{33} = -M_{22} = -M_{11} = 1/(4\sqrt{\pi})$; $M_{35} = M_{53} = M_{77} = -M_{46} = -M_{64} = -M_{88} = 3/(8\sqrt{\pi})$; $M_{13} = M_{15} = M_{24} = M_{26} = M_{31} = M_{42} = M_{15} = M_{62} = 1/8$;

$L_{11} = L_{22} = -L_{21} = -L_{12} = -1/8$, $L_{13} = L_{14} = -L_{23} = -L_{24} = L_{31} = -L_{32} = L_{41} = -L_{42} = -1/(8\sqrt{\pi})$; $L_{15} = L_{16} = -L_{25} = -L_{26} = L_{51} = -L_{52} = L_{61} = -L_{62} = -1/(16\sqrt{\pi})$; $L_{33} = L_{44} = (8 - 8\pi + \xi_1)/(64\pi)$; $L_{55} = L_{66} = (8 - 144\pi + 169\xi_1)/(256\pi)$; $L_{43} = L_{34} = (-8 - \xi_1)/(64\pi)$; $L_{53} = L_{35} = L_{64} = L_{46} = (8 - 16\pi + 13\xi_1)/(128\pi)$; $L_{54} = L_{63} = L_{45} = L_{36} = -(8 + 13\xi_1)/(128\pi)$; $L_{65} = L_{56} = -(8 + 169\xi_1)/(256\pi)$; $L_{77} = L_{88} = 3(-4\pi + 3\xi_2)/(64\pi)$; $L_{78} = L_{87} = (-9\xi_2)/(64\pi)$;
остальные элементы этих матриц равны нулю.

Вектор-столбец

$$a_\alpha = \left\{a_0^+, a_0^-, a_1^+, a_1^-, a_2^+, a_2^-, a_3^+, a_3^-\right\}.$$

Решение системы уравнений (3) имеет вид

$$a_k^\pm(x_0) = A_1\alpha_k^\pm \exp(-\rho_1 x_0) + A_2\beta_k^\pm \exp(-\rho_2 x_0)\left(k = 0, 1, 2\right); \tag{4}$$

$$a_3^\pm(x_0) = A_3\gamma_k^\pm \exp(-\rho_3 x_0). \tag{5}$$

Параметры ρ_1, ρ_2, ρ_3 и коэффициенты $\alpha_i^\pm, \beta_i^\pm\left(i = 0,1,2\right), \gamma^\pm$ в свою очередь зависят от ξ_1, ξ_2, а значит от Z.

В (4), (5) A_1, A_2, A_3 — некоторые константы, которые определяют из граничных условий для функции распределения. Чтобы найти эти граничные условия, воспользуемся зеркально-диффузной моделью [10]:

$$f^+(\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z; \omega, 0) = qf_0 + (1-q)f^-(-\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z; \omega, 0), \tag{6}$$

где f^+, f^- — функции распределения отраженных и падающих на поверхность молекул.

Граничные условия для моментов функции распределения получаем умножением (6) на моменты:

$$c_x c_y \exp(-c^2 - c_\omega^2);$$

$$c_x^2 c_y \exp(-c^2 - c_\omega^2);$$

$$c_x^2 c_y (c^2 - 5/2)\exp(-c^2 - c_\omega^2);$$

$$c_x^2 c_y (c_\omega^2 - 3/2)\exp(-c^2 - c_\omega^2)$$

и интегрированием по полупространству скоростей (**c**, c_ω). В результате решения полученной системы уравнений находим скорость барнеттовского скольжения многоатомного газа в виде

$$u_B = -\beta_B \frac{\mu\lambda}{\rho_0 T_0} \frac{d^2 T}{dxdy},$$

где коэффициент барнеттовского скольжения

$$\beta_B = \frac{12}{5\sqrt{\pi}} f^t(Z) \frac{(2-q)}{q} \frac{\Lambda_1\left(q, Z\right)}{\Lambda_0\left(q, Z\right)}. \tag{7}$$

В (7) обозначено:

$$\Lambda_0(q, Z) = 2\left[F_{21}F_{32} - F_{31}F_{22}\right] + \sqrt{\pi}\left[F_{12}F_{31} - F_{11}F_{32}\right] + \left[F_{11}F_{22} - F_{21}F_{12}\right];$$

$$\Lambda_1(q, Z) = 2\sqrt{\pi}\left[F_{21}F_{32} - F_{31}F_{22}\right] + 6\left[F_{12}F_{31} - F_{11}F_{32}\right] + 9\sqrt{\pi}\left[F_{11}F_{22} - F_{21}F_{12}\right];$$

$$F_{11} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\alpha_0^+ - (1-q)\alpha_0^-\right] + \frac{1}{8}\left[\alpha_1^+ + (1-q)\alpha_1^-\right] + \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left[\alpha_2^+ - (1-q)\alpha_2^-\right];$$

$$F_{21} = \frac{1}{8}\left[\alpha_0^+ - (1-q)\alpha_0^-\right] + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\alpha_1^+ + (1-q)\alpha_1^-\right] + \frac{1}{8}\left[\alpha_2^+ - (1-q)\alpha_2^-\right];$$

$$F_{31} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left[\alpha_0^+ - (1-q)\alpha_0^-\right] + \frac{1}{8}\left[\alpha_1^+ + (1-q)\alpha_1^-\right] + \frac{13}{16\sqrt{\pi}}\left[\alpha_2^+ - (1-q)\alpha_2^-\right];$$

$$F_{12} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\beta_0^+ - (1-q)\beta_0^-\right] + \frac{1}{8}\left[\beta_1^+ + (1-q)\beta_1^-\right] + \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left[\beta_2^+ - (1-q)\beta_2^-\right];$$

$$F_{22} = \frac{1}{8}\left[\beta_0^+ - (1-q)\beta_0^-\right] + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\beta_1^+ + (1-q)\beta_1^-\right] + \frac{1}{8}\left[\beta_2^+ - (1-q)\beta_2^-\right];$$

$$F_{32} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left[\beta_0^+ - (1-q)\beta_0^-\right] + \frac{1}{8}\left[\beta_1^+ + (1-q)\beta_1^-\right] + \frac{13}{16\sqrt{\pi}}\left[\beta_2^+ - (1-q)\beta_2^-\right].$$

Полученный коэффициент барнеттовского скольжения многоатомного газа β_B зависит от теплоемкостей c_v^t, c_v^r, коэффициентов переноса, числа неупругих столкновений молекул газа Z и от коэффициента аккомодации тангенциального импульса q.

В случае чисто упругих столкновений молекул газа друг с другом $Z^{-1} \to 0$. Если, кроме этого, формально предположить, что коэффициент диффузии внутренней энергии молекул равен нулю, то получим переход к одноатомному газу [7]. Тогда (7) преобразуется в выражение для коэффициента барнеттовского скольжения одноатомного газа, полученного в приближении кинетической S-модели. При этом значения параметров $\alpha_i^{\pm}, \beta_i^{\pm} \left(i = 0,1,2\right)$, ρ_1, ρ_2 равны:

$$\alpha_0^+ = 1;\ \alpha_0^- = 0,5182;\ \alpha_1^+ = -0,2787;\ \alpha_1^- = 0,1890;$$

$$\alpha_2^+ = -0,8975;\ \alpha_2^- = -0,0929;$$

$$\beta_0^+ = 1;\ \beta_0^- = 0,1810;\ \beta_1^+ = -1,1165;\ \beta_1^- = 0,0945;$$

$$\beta_2^+ = 0,1794;\ \beta_2^- = 0,0060;$$

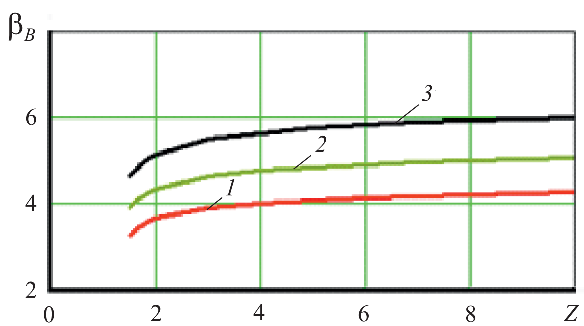
$$\rho_1 = 1,2560;\ \rho_2 = 2,1431.$$

Используя эти параметры, находим коэффициент барнеттовского скольжения β_B = 4,538 (при q = 1) — результат совпадает с полученным в приближении S-модели. Отметим, что в теории термофореза [2] используется коэффициент барнеттовского скольжения $\beta_Б = \beta_B / K_{TS}^{(0)}$ (здесь $K_{TS}^{(0)}$ — коэффициент теплового скольжения газа), числовое значение которого в этом случае $\beta_Б = 3,844$.

Далее при расчете коэффициента барнеттовского скольжения многоатомного газа β_B используем формулу Сандлера [11] для коэффициента диффузии D^r. При этом параметр β^r определяем как [7]

$$\beta^r = 1,32\left(1 + \frac{0,27}{Z} - \frac{0,44}{Z^2} - \frac{0,90}{Z^3}\right)$$

— см. рисунок.



Зависимость коэффициента барнеттовского скольжения β_B от числа неупругих столкновений Z:
1 — q = 1; *2* — q = 0,9; *3* — q = 0,8

На рисунке видно, что в случае полной аккомодации (q = 1) и при изменении Z от 1,5 до 10 значение β_B увеличивается от 3,283 до 4,264 (≈30 %); при q = 0,9 — от 3,894 до 5,055; при q = 0,8 — от 4,623 до 6,006. Таким образом, коэффициент барнеттовского скольжения заметно возрастает при увеличении числа неупругих столкновений молекул газа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sone Y., Aoki K. Forces of a Spherical Particle in a Slightly Rarefied Gas. *Rarefied Gas Dynamics. Proc. 6th Int. Symp*. N.Y., Acad. Press, 1977, vol. 51, part 1, p. 417.

[2] Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны. *Доклады АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1980, т. 254, № 2, с. 343.

[3] Яламов Ю.И., Галоян В.С. *Динамика капель в неоднородных вязких средах.* Ереван, Луйс, 1985, 205 с.

[4] Жданов В.М., Алиевский М.Я. *Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах.* Москва, Наука, 1989, 335 с.

[5] Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. О коэффициентах скольжения и скачках макропараметров двухатомного газа с вращательными степенями свободы на слабо искривленной сферической поверхности. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2000, № 1, с. 163.

[6] Поддоскин А.Б. О температурной зависимости коэффициентов теплового и изотермического скольжения двухатомного газа с вращательными степенями свободы. *Теплофизика высоких температур*, 2004, т. 42, № 5, с. 796.

[7] Поддоскин А.Б. Модельное кинетическое уравнение для многоатомных газов с учетом вращательных степеней свободы молекул. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/1189.html

[8] Mason E.A., Monchick L. Heat Conductivity of Polyatomic and Polar Gases. *J. Chem. Phys*., 1962, vol. 36, p. 1622.

[9] Monchick L., Pereira A.N.G., Mason E.A. Heat Conductivity of Polyatomic and Polar Gases and Gas Mixtures. *J. Chem. Phys*., 1965, vol. 42, p. 3241.

[10] Баранцев Р.Г. *Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями*. Москва, Наука, 1975, 343 с.

[11] Sandler S.I. Thermal Conductivity of Polyatomic Gases. *Phys. Fluids*, 1968, vol. 11, p. 2549.

Статья поступила в редакцию 03.04.2015

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Поддоскин А.Б. Влияние неупругих столкновений молекул многоатомного газа на коэффициент барнеттовского скольжения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 3.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mech/mlgp/1386.html

Поддоскин Александр Борисович. Окончил физический факультет МОПИ в 1972 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области кинетической теории газов и динамики аэрозольных частиц. e-mail: apoddoskin@yandex.ru

Effect of inelastic collisions of polyatomic gas molecules on the Burnett slip coefficient

© A.B. Poddoskin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The problem of gas Burnett sliding along a flat surface is solved under the proposed kinetic model for the polyatomic gas with molecule rotational degrees of freedom, with due regard for the rotational-translational transitions of the gas molecules. The Burnett slip coefficient is obtained as a function depending on the frequency of inelastic collisions of the gas molecules and the accommodation coefficient of tangential momentum.

Keywords*: Burnett slip, polyatomic gas, molecule rotational degrees of freedom.*

REFERENCES

[1] Sone Y., Aoki K. Forces of a spherical particle in a slightly rarefied gas. *Rarefied Gas Dynamics: Proc. 6th Intern. Symp.* N.Y., Acad. Press, 1977, vol. 51, part 1, 417 p.

[2] Poddoskin A.B., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. *Doklady SSSR AN. MZhG – Reports of USSR AS. FM,* 1980, vol. 254, no. 2, p. 343.

[3] Yalamov Yu.I., Galoyan V.S. *Dinamika kapel v neodnorodnykh vyazkikh sredakh* [The Dynamics of Droplets in Inhomogeneous Viscous Media]. Yerevan, Luys Publ., 1985, 205 p.

[4] Zhdanov V.M., Alievskiy M.Ya. *Protsessy perenosa i relaksatsii v molekulyarnykh gazakh* [Processes of Transfer and Relaxation in Molecular Gases]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 335 p.

[5] Poddoskin A.B., Yushkanov A.A. *Izvestiya RAN. MZhG – Proceedings of the RAS. FM,* 2000, no. 1, p. 163.

[6] Poddoskin A.B. *Teplofizika vysokikh temperatur – High Temperature,* 2004, vol. 42, no. 5, p. 796.

[7] Poddoskin A.B. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations,* 2014, no. 1. Available at: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/1189.html.

[8] Mason E.A., Monchick L. Heat Conductivity of Polyatomic and Polar Gases. *J. Chem. Phys*. 1962, vol. 36, p. 1622.

[9] Monchick L., Pereira A.N.G., Mason E.A. Heat Conductivity of Polyatomic and Polar Gases and Gas Mixtures. *J. Chem. Phys*., 1965, vol. 42, p. 3241.

[10] Barantsev R.G. *Vzaimodeystvie razrezhennykh gazov s obtekaemymi poverkhnostyami* [Interaction of Rarefied Gases with Streamlined Surfaces]. Moscow, Nauka Publ.,1975, 343 p.

[11] Sandler S.I. Thermal Conductivity of Polyatomic Gases. *Phys. Fluids*., 1968, vol. ll, p. 2549.

Poddoskin A.B. graduated from Krupskaya Moscow Regional Pedagogical Institute (Faculty of Physics) in 1972**.** Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor at the Department of Physics at the Bauman Moscow State Technical University. The author of more than 100 researches in the field of kinetic theory of gas and dynamics of aerosols.
e-mail: apoddoskin@yandex.ru.