УДК 517.3

В. Д. Морозова, Т. Ю. Михайлова

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО К РЕШЕНИЮ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

В терминах теории функций комплексного переменного представлены возможности применения конформного отображения к решению прикладных задач различного физического содержания. Приведен пример нахождения термического сопротивления кольцевого слоя теплоизоляции с оребренным кожухом путем нескольких последовательных конформных отображений повторяющегося элемента этого слоя на каноническую область в виде прямоугольника.

E-mail: fn2@bmstu.ru

Ключевые слова: *комплексный потенциал, конформное отображение, термическое сопротивление термоизоляции*

Теория функций комплексного переменного находит широкое применение при решении разнообразных прикладных задач. Прежде всего, это относится к классу задач, связанных с изучением плоского векторного поля, описываемого при помощи комплексного потенциала [1]. Изучение такого поля в области сложной формы часто удается существенно упростить путем конформного отображения этой области на более простую. Более того, нередко комплексный потенциал плоского векторного поля в сложной по конфигурации области удается построить именно при помощи ее конформного отображения.

Рассматриваемый класс задач характерен тем, что векторная функция $\mathbf{f}(x, y)$, задающая в некоторой области D на плоскости векторное поле, не зависит от времени и связана с потенциальной функцией $\widetilde{\Phi}(x, y)$ этого поля соотношением

$$\mathbf{f}(x, y) = \beta \nabla \widetilde{\Phi}(x, y), \quad (x; y) \in D, \tag{1}$$

где коэффициент $\beta \in \mathbb{R}$ связан с физическим содержанием задачи, а ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона. Например, для задач гидромеханики идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости функция $\mathbf{f}(x, y)$ описывает векторное поле скорости и $\beta = 1$. Для стационарных задач теплопроводности функция $\mathbf{f}(x, y)$ характеризует векторное поле плотности теплового потока, а $\widetilde{\Phi}(x, y)$ представляет собой функцию распределения температуры T в области D. Согласно известному закону Био–Фурье, коэффициент β, взятый с обратным знаком, совпадает с коэффициентом теплопроводности λ той среды, которая заполняет область D. Знак минус следует из второго закона термодинамики, устанавливающего, что передача теплоты происходит от участков среды с более высокой температурой к участкам с более низкой температурой, т.е. в направлении, противоположном градиенту температуры.

При диффузии в среде некоторой примеси функция $\widetilde{\Phi}(x, y)$ характеризует распределение в области D концентрации этой примеси, а $\mathbf{f}(x, y)$ — вектор плотности потока примеси. В этом случае равенство (1) выражает закон Фика, а $-\beta = \mu$ — коэффициент диффузии. Через среду в области D может просачиваться газ или жидкость. Тогда функция $\widetilde{\Phi}(x, y)$ описывает распределение давления в области D, функция $\mathbf{f}(x, y)$ задает вектор скорости частиц газа или жидкости в среде, равенство (1) выражает закон Дарси, а $-\beta = \kappa$ — коэффициент фильтрации.

Для электростатического поля функция $\mathbf{f}(x, y)$ описывает вектор напряженности, а функция $\widetilde{\Phi}(x, y)$ — распределение в области D потенциала этого поля. В этом случае $\beta = -1$. Если среда в этой области обладает электрической проводимостью с коэффициентом σ, то равенству (1) соответствует соотношение $\mathbf{j}(x,\, y) = -\sigma\nabla U(x,\, y)$, устанавливающее связь электрического потенциала $U(x, y)$ с вектором $\mathbf{j}(x, y)$ плотности электрического тока, обобщающее известный закон Ома.

Помимо равенства (1) для рассматриваемого класса задач справедливо условие

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(x, y) = 0, \quad (x; y) \in D, \tag{2}$$

отражающее закон сохранения той или иной физической субстанции в окрестности произвольной точки области D (для задач гидромеханики и диффузии— сохранение массы жидкости или примеси, для задач теплопроводности и электростатики— теплоты или заряда). Равенства (1) и (2) означают, что рассматриваемое плоское векторное поле является лапласовым и позволяют ввести для него комплексный потенциал [1].

Рассмотрим пример применения конформного отображения для нахождения термического сопротивления кольцевого слоя теплоизоляции на горячей поверхности круглой трубы радиусом $r_т$, заключенного в металлический кожух радиусом $r_к$ с тонкими продольными ребрами (рис. 1). Ребра увеличивают жесткость кожуха, что необходимо, например, в случае, когда кольцевую полость между трубой и кожухом для

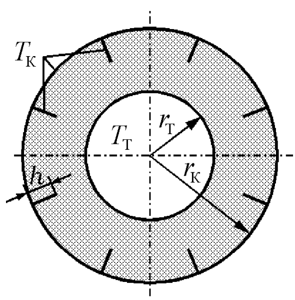

Рис. 1

повышения эффективности теплоизоляции вакуумируют [2]. Вместе с тем, наличие металлических ребер в силу их высокой теплопроводности увеличивает тепловой поток Q, проходящий через теплоизоляцию в расчете на единицу длины трубы, т.е. снижает суммарное термическое сопротивление теплоизоляции $R_{\text{т}} = \Delta T/Q$, где $\Delta T = T_{\text{т}} - T_{\text{к}}$ — разность температур трубы $T_{\text{т}}$ и кожуха $T_{\text{к}}$. В данном случае искомая величина $R_{\text{т}}$ характеризует итоговую эффективность теплоизоляции как средства уменьшения теплопотерь при заданном числе n и высоте h ребер.

Распределение температуры внутри кожуха можно найти через комплексный потенциал в виде действительной части некоторой аналитической функции в кольцевой области с повторяющимися разрезами, соответствующими расположению ребер, температуру которых примем равной температуре $T_{\text{к}}$ кожуха. Вид этой функции зависит от граничных условий: на внешней окружности, ограничивающей область, и на разрезах эта действительная часть функции имеет значение $T_{\text{к}}$, а на внутренней окружности— значение $T_{\text{т}}$.

Повторяющийся элемент кольцевого слоя теплоизоляции между двумя соседними ребрами показан на рис. 2. Отрезки A_1C_1 и $A_1'C_1'$ соответствуют радиальным сечениям кольцевого слоя, выделяющим из него повторяющийся элемент. В силу симметрии через эти отрезки нет переноса теплоты. Поэтому можно ограничиться рассмотрением отдельного элемента, считая, что на отрезках A_1C_1 и $A_1'C_1'$ этот элемент идеально теплоизолирован. Температура дуги $A_1'A_1$ равна $T_{\text{т}}$, а температура дуги D_1D_1' и отрезков C_1D_1, $D_1'C_1'$ — $T_{\text{к}}$.

Чтобы построить комплексный потенциал в выделенном элементе кольцевой области с нужным поведением на границе, отобразим этот элемент на область более простого вида — внутренность прямоугольника. Для этого введем полярную систему координат φ, ρ с полюсом O на оси трубы. Аналитическая в пределах выделенного элемента

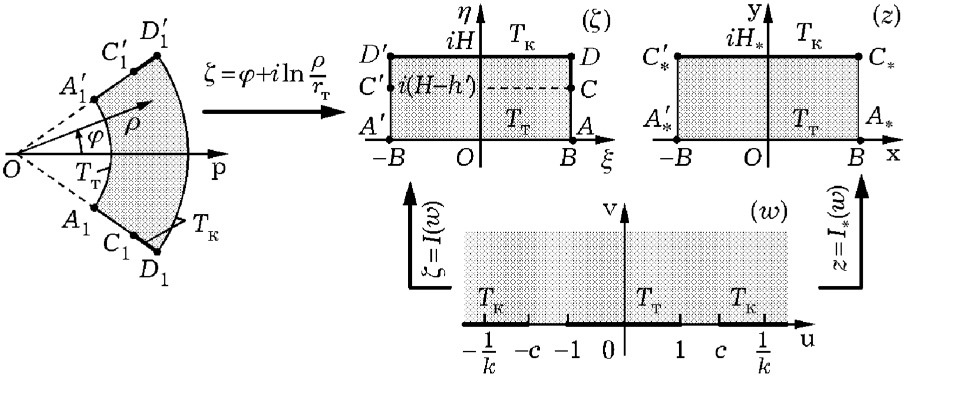

Рис. 2

функция $\zeta = \varphi + i\,\ln(\rho/r_{\text{т}})$, где $i = \sqrt{-1}$, конформно отображает этот элемент на внутренность прямоугольника $ADD'A'$ (см. рис. 2) в плоскости (ζ), характеризуемого параметрами B, H и h', которые связаны соотношениями

$$2\,\frac{B}{H} = \frac{2\pi}{n\ln(r_{\text{к}}/r_{\text{т}})}, \qquad \frac{h'}{H} = -\frac{\ln(1 - h/r_{\text{к}})}{\ln(r_{\text{к}}/r_{\text{т}})}.$$

Это конформное отображение переведет искомый комплексный потенциал в аналитическую внутри прямоугольника функцию, описывающую распределение температуры внутри прямоугольника $ADD'A'$. При этом сторона $A'A$ этого прямоугольника будет иметь температуру $T_{\text{т}}$, а сторона $D'D$ и отрезки CD и $C'D'$ – температуру $T_{\text{к}}$. При конформном отображении линии равного потенциала (в данном случае – изотермы) и линии тока теплового потока остаются взаимно перпендикулярными. Поэтому термические сопротивления слоя теплоизоляции с поперечным сечением в виде прямоугольника $ADD'A'$ и в виде выделенного повторяющегося элемента кольцевого слоя совпадают при условии, что коэффициент теплопроводности λ теплоизоляции в обоих случаях одинаков.

Однако вычислить непосредственно термическое сопротивление прямоугольника $ADD'A'$ довольно сложно. Задачу можно упростить, если этот прямоугольник удастся конформно отобразить на новый прямоугольник $A_*C_*C'_*A'_*$ в плоскости (z) (см. рис. 2), у которого верхняя сторона $C_*C'_*$ будет соответствовать участку границы $CDD'C'$ старого прямоугольника в плоскости (ζ) и иметь температуру $T_{\text{к}}$, а нижняя сторона $A_*A'_*$ нового прямоугольника – нижней стороне AA' старого и иметь температуру $T_{\text{т}}$. Тогда распределение температуры для нового прямоугольника будет определено этими значениями температуры на его горизонтальных сторонах A'_*A_* и C'_*C_* и условием идеальной теплоизоляции на его боковых сторонах. Такое распределение температуры имеет простой вид:

$$T = T_{\text{т}} + (T_{\text{к}} - T_{\text{т}})y/H_*. \tag{3}$$

Конформное отображение прямоугольника на прямоугольник можно осуществить в два этапа, используя в качестве промежуточной области верхнюю полуплоскость комплексной плоскости (w) (см. рис. 2).

При помощи эллиптического интеграла первого рода

$$\zeta = I(w) = C_w \int\limits_0^w \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad k < 1, \tag{4}$$

конформно отобразим верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ на прямоугольник $ADD'A$, подбирая соответствующим образом параметр C_w

и модуль k эллиптического интеграла. При этом отрезку $[-1,\ 1]$ действительной оси в плоскости (w) будет соответствовать сторона $A'A$ прямоугольника $ADD'A'$ в плоскости (ζ) (см. рис. 2), а точке $w = 1$ будет отвечать в плоскости (ζ) точка $\zeta = B$, т.е.

$$B = C_w \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = C_w \mathrm{K}(k), \qquad (5)$$

где $\mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [3, 4], не выражаемый через элементарные функции, но его значения табулированы для различных значений модуля k [5]. Из формулы (5) следует $C_w = B/\mathrm{K}(k)$.

При $1 < u < 1/k$ подынтегральное выражение в формуле (5) будет чисто мнимым, т.е. движению точки в пределах этого интервала в плоскости (w) соответствует движение точки вдоль стороны AD прямоугольника в плоскости (ζ). Чтобы точке $w = u = 1/k$ отвечала в плоскости (ζ) точка D ($\zeta = B+iH$), должно быть выполнено, согласно формуле (4), условие

$$B + iH = C_w \int\limits_0^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = B + iB\frac{\mathrm{K}(k')}{\mathrm{K}(k)}, \qquad (6)$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль эллиптического интеграла. Следовательно, из равенств (5) и (6) имеем $H/B = \mathrm{K}(k')/\mathrm{K}(k) = \mu(k)$. Функция $\mu(k)$ монотонно убывает до нуля в промежутке $(0,\ 1]$ (рис. 3). Поэтому любому заданному отношению $H/B \in (0,\ +\infty)$ отвечает единственное значение модуля k.

Прообразом точки C в плоскости (ζ) при отображении, определяемом формулой (4), будет точка $c > 1$ действительной оси $\mathrm{Im}\, w = 0$, удовлетворяющая условию

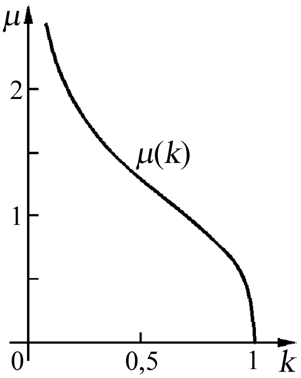

Рис. 3

$$B + i(H - h') = C_w \int\limits_0^c \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} =$$

$$= B + i\,\frac{B}{\mathrm{K}(k)} \int\limits_0^{1/c} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}$$

или

$$\frac{H-h'}{B}\mathrm{K}(k) = \int\limits_0^{1/c} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}.$$

Теперь ту же верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ конформно отобразим при помощи функции

$$z = I_*(w) = a_* \int\limits_0^z \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_*^2u^2)}}$$

на прямоугольник $A_*C_*C_*'A_*'$ в плоскости (z) так, чтобы точка C_* стала образом точки $u = c > 1$ (см. рис. 2). В этом случае $k_* = 1/c < 1$. Из условия

$$B = a_* \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_*^2u^2)}} = \mathrm{K}(k_*)$$

получаем $a_* = B/\mathrm{K}(k_*)$, а из условия

$$B + iH_* = a_* \int\limits_0^c \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_*^2u^2)}} =$$

$$= a_*\mathrm{K}(k_*) + a_* \int\limits_1^{1/k_*} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_*^2u^2)}} = B + iB\frac{\mathrm{K}(k_*')}{\mathrm{K}(k_*)},$$

где $k_*' = \sqrt{1-k_*^2}$, находим высоту $H_* = B\mathrm{K}(k_*')/\mathrm{K}(k_*)$ прямоугольника $A_*C_*C_*'A_*'$ в плоскости (z).

Решению (3) задачи теплопроводности для прямоугольника $A_*C_*C_*'A_*'$ соответствуют горизонтальные изотермы и вертикальные линии тока теплового потока. Через слой теплоизоляции единичной длины с поперечным сечением в виде этого прямоугольника проходит тепловой поток $Q' = 2\lambda B(T_{\text{т}} - T_{\text{к}})/H_*$. Прямоугольник соответствует выделенному на рис. 2 элементу $A_1D_1D_1'A_1'$. Поэтому через кольцевой слой теплоизоляции, изображенный на рис. 1, проходит тепловой поток $Q = nQ'$, так, что термическое сопротивление кольцевого слоя равно

$$R_{\text{т}} = \lambda \frac{T_{\text{т}} - T_{\text{к}}}{Q} = \frac{H_*}{2n\lambda B} = \frac{\mathrm{K}(k'_*)}{2n\lambda \mathrm{K}(k_*)}.$$

Таким образом, путем нескольких конформных отображений в данном случае удалось получить аналитическое представление для термического сопротивления теплоизоляционной конструкции достаточно сложной конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозова В. Д. Теория функций комплексного переменного. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 520 с.
2. Зарубин В. С. Расчет и оптимизация термоизоляции. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган: Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012