УДК 519.718

Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами

© И.В. Павлов, С.В. Разгуляев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача доверительного оценивания показателей надежности системы с нагруженным резервированием внутри различных подсистем по результатам испытаний ее компонентов (элементов, подсистем). Получены асимптотические (для случая высокой надежности) выражения для доверительных границ функции надежности системы.

Ключевые слова: *надежность, сложные системы, резервирование.*

Введение. Оценка и прогноз показателей надежности сложных систем по результатам статистических испытаний их компонентов (элементов, подсистем) являются одной из актуальных проблем математической теории надежности. Подобные задачи возникают в ситуациях, когда испытания системы не могут быть проведены в достаточном объеме или вообще невозможны и требуется оценить характеристики системы в целом по результатам испытаний ее отдельных элементов. При этом основной интерес с точки зрения приложений чаще всего представляет построение доверительных оценок и гарантированного прогноза для тех или иных характеристик надежности системы (см., например, [1–7] и др.). Далее предлагаются асимптотические выражения для доверительных оценок функции надежности системы для случая нагруженного режима резервирования элементов в системе.

Система с параллельной структурой. Рассмотрим систему, составленную из n элементов, соединенных параллельно (в смысле надежности) и работающих в режиме нагруженного резервирования. В предположении, что элементы системы отказывают независимо друг от друга, функция надежности системы имеет вид

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - P_i(t)\right],$$

где $P_i(t) = P\left\{\xi_i > t\right\}$ — функция надежности i-го элемента, i = 1, ..., n (ξ_i — время безотказной работы i-го элемента).

Далее будем предполагать, что элементы системы имеют экспоненциальные распределения времени безотказной работы. Другими словами, функция надежности i-го элемента имеет вид $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, где λ_i — параметр интенсивности отказов i-го элемента, $i = 1, \ldots, n$. Функцию надежности системы можно записать в виде

$$P(\lambda, t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right),$$

где $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ — вектор параметров надежности элементов системы. Точные значения параметров элементов λ_i чаще всего неизвестны, известна лишь статистическая информация — результаты испытаний на надежность системы в целом или ее отдельных компонентов (элементов, подсистем).

Рассмотрим часто встречающийся в инженерной практике случай, когда испытания системы проводятся в течение некоторого фиксированного времени с восстановлением (заменой) отказавших элементов. Далее будем рассматривать общий случай, когда время испытаний различных элементов, вообще говоря, может быть различным.

Пусть d_i — число отказов элементов i-го типа, наблюдаемое на испытаниях (для i-го потока отказов в течение времени T_i), $i = 1, \ldots, n$. Тогда суммарное число отказов всех элементов $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i$, откуда получаем, что γ-доверительное множество в пространстве пара-метров $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ имеет вид

$$H(d) = \left\{ \lambda:\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i \le \overline{\Lambda}_\gamma(D),\ \lambda_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{1}$$

Задача сводится к нахождению верхней γ-доверительной границы $\bar{Q}$ для вероятности отказа системы $Q = Q(\lambda, t)$ на интервале времени $(0, t)$ следующего вида:

$$\bar{Q} = \bar{Q}(d, t) = \max \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right),$$

где максимум берется по доверительному множеству (1), т. е. при следующих ограничениях на вектор параметров λ:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i \le \overline{\Lambda}_\gamma(D),\ \lambda_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n$$

Далее получаем, что $\bar{Q}(d, t) = \exp\left(\bar{f}\right)$, при этом

$$\overline{f}(d,t)=\max_{\lambda\in H(d)}\sum_{i=1}^{n}f_i(\lambda_i,t), \tag{2}$$

где функция $f_i(\lambda_i,t)=\ln\left(1-e^{-\lambda_i t}\right)$ монотонно возрастает и выпукла вверх по $\lambda_i \geq 0$, $i=1,\dots,n$. В силу указанной монотонности максимум (2) достигается на границе области $H(d)$, т. е. при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T_i=\overline{\Lambda}_\gamma(D),\ \lambda_i=0,\ i=1,\dots,n.$$

Система уравнений Лагранжа (необходимое условие для условного экстремума в (2)) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial\lambda_i}=\dfrac{te^{-\lambda_i t}}{1-e^{-\lambda_i t}}=\beta T_i; & (3)\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T_i=\overline{\Lambda}_\gamma(D),\quad i=1,\dots,n, & (4)\end{cases}$$

где $\beta>0$ — неопределенный множитель Лагранжа. Решая систему уравнений (3), (4), находим, что максимум (2) достигается в точке $\lambda^*=\left(\lambda_1^*,\dots,\lambda_n^*\right)$, где

$$\lambda_i^*=\lambda_i^*(\alpha)=\frac{1}{t}\ln\left(1+\alpha\frac{t}{T_i}\right),\ i=1,\dots,n. \tag{5}$$

Величина $\alpha>0$ определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{t}\ln\left(1+\frac{\alpha t}{T_i}\right)=\overline{\Lambda}_\gamma(D). \tag{6}$$

Соответственно, верхняя γ-доверительная граница $\overline{Q}$ для вероятности отказа системы

$$\overline{Q}=\overline{Q}(t)=\prod_{i=1}^{n}\left\{1-\exp\left[-\lambda_i^*(\alpha)t\right]\right\}, \tag{7}$$

а нижняя γ-доверительная граница для функции надежности системы

$$\underline{P}=\underline{P}(t)=1-\prod_{i=1}^{n}\left\{1-\exp\left[-\lambda_i^*(\alpha)t\right]\right\}.$$

Асимптотические выражения для случая высокой надежности. Рассмотрим асимптотическое поведение полученных выражений при $t\to 0$, т. е. на начальном интервале времени при малых *t*, когда надежность системы $P(t)$ близка к единице. Обозначим левую часть уравнения (6) через $\varphi(\alpha)$, а правую — через A, т. е.

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{t} \ln\left(1 + \frac{\alpha t}{T_i}\right), \tag{8}$$

$$A = \overline{\Lambda}_\gamma(D).$$

Тогда, учитывая, что $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ при $|x| < 1$, получаем

$$\frac{\alpha t}{T_i} - \frac{t^2\alpha^2}{2T_i^2} \le \ln\left(1 + \frac{\alpha t}{T_i}\right) \le \frac{\alpha t}{T_i},$$

откуда

$$n\alpha - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{t}{T_i}\alpha^2 \le \varphi(\alpha) \le n\alpha. \tag{9}$$

Точное значение $\alpha = \alpha(t)$ определяется из уравнения (6), или из уравнения $\varphi(\alpha) = A$. С учетом (9) после простых преобразований получаем, что при $t \to 0$

$$\alpha(t) = \frac{A}{n} + \left(\frac{A^2}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}\right)t + o(t). \tag{10}$$

Из формул (5), (7) следует, что верхняя доверительная граница вероятности отказа системы $\overline{Q} = \overline{Q}(t)$ может быть записана в виде

$$\overline{Q}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha(t)t}{T_i + \alpha(t)t}. \tag{11}$$

Из формул (10), (11) получаем асимптотическое (при $t \to 0$) выражение для верхней доверительной границы $\overline{Q} = \overline{Q}(t)$:

$$\overline{Q}(t) = \left(\frac{At}{n}\right)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} T_i}\left[1 - \frac{At}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i} + o(t)\right]. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь случай, когда заранее известно, что все элементы системы **идентичны** (с одинаковыми параметрами надежности, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$). В этом случае наблюдаемое на испытаниях суммарное число отказов элементов $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda = \lambda \sum_{i=1}^{n} T_i$. Тогда верхняя γ-доверительная граница для параметра λ

$$\overline{\lambda} = \overline{\Lambda}_\gamma (D) / \sum_{i=1}^{n} T_i,$$

а для вероятности отказа системы

$$\overline{Q}_{\text{ид}} = \overline{Q}_{\text{ид}}(t) = \left(1 - e^{-\overline{\lambda} t}\right)^n = \left\{1 - \exp\left[-\frac{\overline{\Lambda}_\gamma (D) t}{\sum_{i=1}^{n} T_i}\right]\right\}^n .$$

Отсюда нетрудно получить соответствующее асимптотическое выражение при $t \to 0$:

$$\overline{Q}_{\text{ид}}(t) = \left(\frac{At}{nT_{\text{с}}}\right)^n \left[1 - \frac{At}{2T_{\text{с}}} + o(t)\right], \tag{13}$$

где $T_{\text{с}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i$ — среднее время испытаний по элементам системы.

Из выражений (12), (13) следует, что

$$\frac{\overline{Q}(t)}{\overline{Q}_{\text{ид}}(t)} = \frac{T_{\text{с}}^n}{\prod_{i=1}^{n} T_i} \left(1 + o(1)\right).$$

Другими словами, при $t \to 0$

$$\frac{\overline{Q}(t)}{\overline{Q}_{\text{ид}}(t)} \to \frac{T_{\text{с}}}{T_{\text{г}}} \geq 1 , \tag{14}$$

где $T_{\text{г}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} T_i}$ — среднее геометрическое значение по объемам испытаний элементов.

В частном случае, когда объемы испытаний элементов равны, т. е. $T_1 = T_2 = ... = T_n = T$, из выражения (14) следует, что

$$\frac{\overline{Q}(t)}{\overline{Q}_{\text{ид}}(t)} \to 1. \tag{15}$$

Из формулы (15) видно, что дополнительная априорная информация об идентичности элементов системы вида $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ в случае, когда все элементы системы испытывают одинаковое время

T, не дает выигрыша при доверительном оценивании функции надежности системы снизу, что является достаточно неочевидным выводом.

Заключение. Таким образом, получены асимптотические (в естественной с точки зрения приложений асимптотике, а именно для случая высокой надежности) выражения для доверительных оценок функции надежности системы с параллельной структурой. Для этой же системы получены также асимптотические выражения для выигрыша, который дает априорная информация об идентичности резервных элементов (при нагруженном режиме резервирования) в системе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. *Математические методы в теории надежности: основные характеристики надежности и их статистический анализ.* 2-е изд. Москва, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013, 584 с.

[2] Барлоу Р., Прошан Ф. *Математическая теория надежности*. Москва, Советское радио, 1969, 488 с.

[3] Asadi M., Bayramoglu I. The mean residual life function of a k-out-of-n structure at the system level. *IEEE Transactions on Reliability*, 2006, vol. 55, no. 2, pp. 314–318.

[4] Chang G., Lirong C., Hwang F.K. *Reliabilities of consecutive-k systems*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000, 217 p.

[5] Лёвин П.А., Павлов И.В. Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки,* 2009, № 2, с. 28–37.

[6] Лёвин П.А., Павлов И.В. Оценка надежности системы с нагруженным резервированием по результатам испытаний ее элементов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки,* 2011, № 3, с. 59–70.

[7] Eryilmaz S. On the lifetime Distribution of Consecutive k-out-of-n: F System. *IEEE Transactions on Reliability,* 2007, vol. 56, pp. 35–39.

Статья поступила в редакцию 10.12.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Павлов И.В., Разгуляев С.В. Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 2. URL: http://engjournal.ru/catalog/arse/gcle/1365.html

Павлов Игорь Валерианович родился в 1945 г., окончил МФТИ в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 публикаций. Область научных интересов: теория вероятностей, математическая статистика и теория надежности. e-mail: ipavlov@bmstu.ru

Разгуляев Сергей Васильевич родился в 1991 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2014 г. Аспирант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: теория вероятностей, математическая статистика и теория надежности. e-mail: sergach_91@mail.ru

Reliability asymptotic estimates of a system with redundant heterogeneous elements

© I. V. Pavlov, S.V. Razgulyaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Authors reviewed the problem of confidence estimation of reliability indices of the system with a loaded reservation within the various subsystems by the results of tests of its components (sub-elements). Were Obtained asymptotic (for the case of high reliability) expressions for confidence bounds for the reliability function of the system.

Keywords: *reliability, complex systems, reservation.*

REFERENCES

[1] Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyov A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti: osnovnye kharakteristiki nadezhnosti i ikh statisticheskiy analiz* [Mathematical methods in reliability theory: the main characteristics of reliability and statistical analysis]. 2nd ed. Moscow, Librokom Publ., 2013, 584 p.

[2] Barlow R.E., Proschan F. Mathematical Theory of Reliability. Wiley, New York 1965. [in Russian: Barlow R.E., Proschan F. Matematicheskaya teoriya nadezhnosti. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 488 p.].

[3] Asadi M., Bayramoglu I. The mean residual life function of a k-out-of-n structure at the system level. *IEEE Transactions on Reliability*, 2006, vol. 55, no. 2, pp. 314–318.

[4] Chang G., Lirong C., Hwang F.K. *Reliabilities of consecutive-k systems*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000, 217 p.

[5] Lyovin P.A., Pavlov I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences,* 2009, no. 2, pp. 28–37.

[6] Lyovin P.A., Pavlov I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences,* 2011, no. 3, pp. 59–70.

[7] Eryilmaz S. On the lifetime Distribution of Consecutive k-out-of-n: F System. *IEEE Transactions on Reliability,* 2007, vol. 56, pp. 35–39.

Pavlov I.V. (b. 1945) graduated from the Moscow Physics and Technology Institute in 1968. Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of the Higher Mathematics Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 80 publications in the field of probability theory, mathematical statistics and reliability theory. e-mail: ipavlov@bmstu.ru

Razgulyaev S.V. (b. 1991), graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2014. Postgraduate at the Аспирант Higher Mathematics Department of BMSTU. Sphere of research interests: probability theory, mathematical statistics, reliability theory. e-mail: sergach_91@mail.ru