

## Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами

© И.В. Павлов, С.В. Разгуляев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Рассмотрена задача доверительного оценивания показателей надежности системы с нагруженным резервированием внутри различных подсистем по результатам испытаний ее компонентов (элементов, подсистем). Получены асимптотические (для случая высокой надежности) выражения для доверительных границ функции надежности системы.*

**Ключевые слова:** надежность, сложные системы, резервирование.

**Введение.** Оценка и прогноз показателей надежности сложных систем по результатам статистических испытаний их компонентов (элементов, подсистем) являются одной из актуальных проблем математической теории надежности. Подобные задачи возникают в ситуациях, когда испытания системы не могут быть проведены в достаточном объеме или вообще невозможны и требуется оценить характеристики системы в целом по результатам испытаний ее отдельных элементов. При этом основной интерес с точки зрения приложений чаще всего представляет построение доверительных оценок и гарантированного прогноза для тех или иных характеристик надежности системы (см., например, [1–7] и др.). Далее предлагаются асимптотические выражения для доверительных оценок функции надежности системы для случая нагруженного режима резервирования элементов в системе.

**Система с параллельной структурой.** Рассмотрим систему, составленную из  $n$  элементов, соединенных параллельно (в смысле надежности) и работающих в режиме нагруженного резервирования. В предположении, что элементы системы отказывают независимо друг от друга, функция надежности системы имеет вид

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P_i(t)],$$

где  $P_i(t) = P\{\xi_i > t\}$  — функция надежности  $i$ -го элемента,  $i = 1, \dots, n$  ( $\xi_i$  — время безотказной работы  $i$ -го элемента).

Далее будем предполагать, что элементы системы имеют экспоненциальные распределения времени безотказной работы. Другими

словами, функция надежности  $i$ -го элемента имеет вид  $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$ , где  $\lambda_i$  — параметр интенсивности отказов  $i$ -го элемента,  $i = 1, \dots, n$ . Функцию надежности системы можно записать в виде

$$P(\lambda, t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}),$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  — вектор параметров надежности элементов системы. Точные значения параметров элементов  $\lambda_i$  чаще всего неизвестны, известна лишь статистическая информация — результаты испытаний на надежность системы в целом или ее отдельных компонентов (элементов, подсистем).

Рассмотрим часто встречающийся в инженерной практике случай, когда испытания системы проводятся в течение некоторого фиксированного времени с восстановлением (заменой) отказавших элементов. Далее будем рассматривать общий случай, когда время испытаний различных элементов, вообще говоря, может быть различным.

Пусть  $d_i$  — число отказов элементов  $i$ -го типа, наблюдаемое на испытаниях (для  $i$ -го потока отказов в течение времени  $T_i$ ),  $i = 1, \dots, n$ .

Тогда суммарное число отказов всех элементов  $D = \sum_{i=1}^n d_i$  имеет

пуассоновское распределение с параметром  $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i$ , откуда

получаем, что  $\gamma$ -доверительное множество в пространстве параметров  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  имеет вид

$$H(d) = \left\{ \lambda : \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i \leq \bar{\Lambda}_\gamma(D), \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}. \quad (1)$$

Задача сводится к нахождению верхней  $\gamma$ -доверительной границы  $\bar{Q}$  для вероятности отказа системы  $Q = Q(\lambda, t)$  на интервале времени  $(0, t)$  следующего вида:

$$\bar{Q} = \bar{Q}(d, t) = \max \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}),$$

где максимум берется по доверительному множеству (1), т. е. при следующих ограничениях на вектор параметров  $\lambda$ :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i T_i \leq \bar{\Lambda}_\gamma(D), \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

Далее получаем, что  $\bar{Q}(d, t) = \exp(\bar{f})$ , при этом

$$\bar{f}(d, t) = \max_{\lambda \in H(d)} \sum_{i=1}^n f_i(\lambda_i, t), \quad (2)$$

где функция  $f_i(\lambda_i, t) = \ln(1 - e^{-\lambda_i t})$  монотонно возрастает и выпукла вверх по  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . В силу указанной монотонности максимум (2) достигается на границе области  $H(d)$ , т. е. при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i T_i = \bar{\Lambda}_\gamma(D), \quad \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Система уравнений Лагранжа (необходимое условие для условного экстремума в (2)) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = \frac{te^{-\lambda_i t}}{1 - e^{-\lambda_i t}} = \beta T_i; \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i = \bar{\Lambda}_\gamma(D), \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

$$\quad (4)$$

где  $\beta > 0$  — неопределенный множитель Лагранжа. Решая систему уравнений (3), (4), находим, что максимум (2) достигается в точке  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ , где

$$\lambda_i^* = \lambda_i^*(\alpha) = \frac{1}{t} \ln \left( 1 + \alpha \frac{t}{T_i} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Величина  $\alpha > 0$  определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{T_i}{t} \ln \left( 1 + \frac{\alpha t}{T_i} \right) = \bar{\Lambda}_\gamma(D). \quad (6)$$

Соответственно, верхняя  $\gamma$ -доверительная граница  $\bar{Q}$  для вероятности отказа системы

$$\bar{Q} = \bar{Q}(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \exp \left[ -\lambda_i^*(\alpha) t \right] \right\}, \quad (7)$$

а нижняя  $\gamma$ -доверительная граница для функции надежности системы

$$\underline{P} = \underline{P}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \exp \left[ -\lambda_i^*(\alpha) t \right] \right\}.$$

**Асимптотические выражения для случая высокой надежности.** Рассмотрим асимптотическое поведение полученных выражений при  $t \rightarrow 0$ , т. е. на начальном интервале времени при малых  $t$ , когда

надежность системы  $P(t)$  близка к единице. Обозначим левую часть уравнения (6) через  $\varphi(\alpha)$ , а правую — через  $A$ , т. е.

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{t} \ln \left( 1 + \frac{\alpha t}{T_i} \right), \quad (8)$$

$$A = \bar{\Lambda}_\gamma(D).$$

Тогда, учитывая, что  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$  при  $|x| < 1$ , получаем

$$\frac{\alpha t}{T_i} - \frac{t^2 \alpha^2}{2T_i^2} \leq \ln \left( 1 + \frac{\alpha t}{T_i} \right) \leq \frac{\alpha t}{T_i},$$

откуда

$$n\alpha - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{t}{T_i} \alpha^2 \leq \varphi(\alpha) \leq n\alpha. \quad (9)$$

Точное значение  $\alpha = \alpha(t)$  определяется из уравнения (6), или из уравнения  $\varphi(\alpha) = A$ . С учетом (9) после простых преобразований получаем, что при  $t \rightarrow 0$

$$\alpha(t) = \frac{A}{n} + \left( \frac{A^2}{2n^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right) t + o(t). \quad (10)$$

Из формул (5), (7) следует, что верхняя доверительная граница вероятности отказа системы  $\bar{Q} = \bar{Q}(t)$  может быть записана в виде

$$\bar{Q}(t) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha(t)t}{T_i + \alpha(t)t}. \quad (11)$$

Из формул (10), (11) получаем асимптотическое (при  $t \rightarrow 0$ ) выражение для верхней доверительной границы  $\bar{Q} = \bar{Q}(t)$ :

$$\bar{Q}(t) = \left( \frac{At}{n} \right)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n T_i} \left[ 1 - \frac{At}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} + o(t) \right]. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь случай, когда заранее известно, что все элементы системы идентичны (с одинаковыми параметрами надежности, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ ). В этом случае наблюдаемое на испытаниях суммарное число отказов элементов  $D = \sum_{i=1}^n d_i$  имеет пуас-

соновское распределение с параметром  $\Lambda = \lambda \sum_{i=1}^n T_i$ . Тогда верхняя

$\gamma$ -доверительная граница для параметра  $\lambda$

$$\bar{\lambda} = \bar{\Lambda}_\gamma(D) / \sum_{i=1}^n T_i,$$

а для вероятности отказа системы

$$\bar{Q}_{\text{инд}} = \bar{Q}_{\text{инд}}(t) = (1 - e^{-\bar{\lambda}t})^n = \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{\bar{\Lambda}_\gamma(D)t}{\sum_{i=1}^n T_i} \right] \right\}^n.$$

Отсюда нетрудно получить соответствующее асимптотическое выражение при  $t \rightarrow 0$ :

$$\bar{Q}_{\text{инд}}(t) = \left( \frac{At}{nT_c} \right)^n \left[ 1 - \frac{At}{2T_c} + o(t) \right], \quad (13)$$

где  $T_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$  — среднее время испытаний по элементам системы.

Из выражений (12), (13) следует, что

$$\frac{\bar{Q}(t)}{\bar{Q}_{\text{инд}}(t)} = \frac{T_c^n}{\prod_{i=1}^n T_i} (1 + o(1)).$$

Другими словами, при  $t \rightarrow 0$

$$\frac{\bar{Q}(t)}{\bar{Q}_{\text{инд}}(t)} \rightarrow \frac{T_c}{T_\Gamma} \geq 1, \quad (14)$$

где  $T_\Gamma = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n T_i}$  — среднее геометрическое значение по объемам испытаний элементов.

В частном случае, когда объемы испытаний элементов равны, т. е.  $T_1 = T_2 = \dots = T_n = T$ , из выражения (14) следует, что

$$\frac{\bar{Q}(t)}{\bar{Q}_{\text{инд}}(t)} \rightarrow 1. \quad (15)$$

Из формулы (15) видно, что дополнительная априорная информация об идентичности элементов системы вида  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$  в случае, когда все элементы системы испытывают одинаковое время

$T$ , не дает выигрыша при доверительном оценивании функции надежности системы снизу, что является достаточно неочевидным выводом.

**Заключение.** Таким образом, получены асимптотические (в естественной с точки зрения приложений асимптотике, а именно для случая высокой надежности) выражения для доверительных оценок функции надежности системы с параллельной структурой. Для этой же системы получены также асимптотические выражения для выигрыша, который дает априорная информация об идентичности резервных элементов (при нагруженном режиме резервирования) в системе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. *Математические методы в теории надежности: основные характеристики надежности и их статистический анализ*. 2-е изд. Москва, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013, 584 с.
- [2] Барлоу Р., Прошан Ф. *Математическая теория надежности*. Москва, Советское радио, 1969, 488 с.
- [3] Asadi M., Bayramoglu I. The mean residual life function of a k-out-of-n structure at the system level. *IEEE Transactions on Reliability*, 2006, vol. 55, no. 2, pp. 314–318.
- [4] Chang G., Lirong C., Hwang F.K. *Reliabilities of consecutive-k systems*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000, 217 p.
- [5] Лёвин П.А., Павлов И.В. Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009, № 2, с. 28–37.
- [6] Лёвин П.А., Павлов И.В. Оценка надежности системы с нагруженным резервированием по результатам испытаний ее элементов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № 3, с. 59–70.
- [7] Eryilmaz S. On the lifetime Distribution of Consecutive k-out-of-n: F System. *IEEE Transactions on Reliability*, 2007, vol. 56, pp. 35–39.

Статья поступила в редакцию 10.12.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Павлов И.В., Разгуляев С.В. Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/arse/gcle/1365.html>

**Павлов Игорь Валерианович** родился в 1945 г., окончил МФТИ в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 публикаций. Область научных интересов: теория вероятностей, математическая статистика и теория надежности. e-mail: [ipavlov@bmsu.ru](mailto:ipavlov@bmsu.ru)

**Разгуляев Сергей Васильевич** родился в 1991 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2014 г. Аспирант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: теория вероятностей, математическая статистика и теория надежности. e-mail: [sergach\\_91@mail.ru](mailto:sergach_91@mail.ru)

# Reliability asymptotic estimates of a system with redundant heterogeneous elements

© I. V. Pavlov, S.V. Razgulyaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*Authors reviewed the problem of confidence estimation of reliability indices of the system with a loaded reservation within the various subsystems by the results of tests of its components (sub-elements). Were Obtained asymptotic (for the case of high reliability) expressions for confidence bounds for the reliability function of the system.*

**Keywords:** reliability, complex systems, reservation.

## REFERENCES

- [1] Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyov A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti: osnovnye kharakteristiki nadezhnosti i ikh statisticheskiy analiz* [Mathematical methods in reliability theory: the main characteristics of reliability and statistical analysis]. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Librokom Publ., 2013, 584 p.
- [2] Barlow R.E., Proschan F. *Mathematical Theory of Reliability*. Wiley, New York 1965. [in Russian: Barlow R.E., Proschan F. *Matematicheskaya teoriya nadezhnosti*. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969, 488 p.].
- [3] Asadi M., Bayramoglu I. The mean residual life function of a k-out-of-n structure at the system level. *IEEE Transactions on Reliability*, 2006, vol. 55, no. 2, pp. 314–318.
- [4] Chang G., Lirong C., Hwang F.K. *Reliabilities of consecutive-k systems*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000, 217 p.
- [5] Lyovin P.A., Pavlov I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences*, 2009, no. 2, pp. 28–37.
- [6] Lyovin P.A., Pavlov I.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences*, 2011, no. 3, pp. 59–70.
- [7] Eryilmaz S. On the lifetime Distribution of Consecutive k-out-of-n: F System. *IEEE Transactions on Reliability*, 2007, vol. 56, pp. 35–39.

**Pavlov I.V.** (b. 1945) graduated from the Moscow Physics and Technology Institute in 1968. Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of the Higher Mathematics Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 80 publications in the field of probability theory, mathematical statistics and reliability theory. e-mail: ipavlov@bmstu.ru

**Razgulyaev S.V.** (b. 1991), graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2014. Postgraduate at the Аспирант Higher Mathematics Department of BMSTU. Sphere of research interests: probability theory, mathematical statistics, reliability theory. e-mail: sergach\_91@mail.ru