УДК 526.24

Моделирование конвективного теплообмена в призматических каналах с различной геометрией сечения

© Н.В. Кирюхина[1], А.К. Горбунов[2], Н.А. Силаева[2]

[1]Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, Калуга, 248023, Россия
[2]Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

Описана математическая модель теплообмена при развитом ламинарном течении в призматических каналах прямоугольного и треугольного сечений, включающая уравнение движения жидкости и уравнение энергии с граничными условиями второго рода на стенках канала. Приведены аналитические решения для поля скоростей, полученные из уравнения движения жидкости. Решение уравнения энергии получено численным методом конечных разностей. В основу алгоритма расчета была положена разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу, построенная на пятиточечном шаблоне. Указанный алгоритм реализуют программы, позволяющие рассчитать поля скоростей и температур в каналах, определить локальные и средние характеристики теплоотдачи. В перспективе предполагается построение алгоритма и разработка программы для численного решения задачи о конвективном теплообмене в канале более сложной геометрии с выступами на стенках.

Ключевые слова: *конвективный теплообмен, математическое моделирование, метод конечных разностей.*

Исследование процессов движения жидкости и теплоотдачи в трубах и каналах имеет большое практическое значение для проектирования и эксплуатации различных элементов энергетического оборудования.

Одним из методов повышения эффективности работы теплообменных установок является увеличение поверхности теплообмена путем оребрения. Существует большое количество геометрических разновидностей таких поверхностей. В частности, поверхности пластинчато-ребристых теплообменников могут иметь каналы прямоугольного, треугольного и трапециевидного сечений.

В настоящее время лучше всего изучены процессы теплоотдачи при движении теплоносителя в круглых трубах. Если канал имеет некруглое поперечное сечение, то расчет теплоотдачи в нем производится, как правило, на основе соотношений, установленных для круглых труб, с учетом эквивалентного или гидравлического диаметра [1]:

$$d_{\text{экв}} = \frac{4S}{P}, \tag{1}$$

где S — площадь поперечного сечения; P — полный (смоченный) периметр канала.

Метод расчета теплоотдачи с помощью эквивалентного диаметра является приближенным, точные границы применимости его не установлены [2]. Поэтому остается актуальной задача моделирования гидродинамики и теплообмена в призматических каналах с учетом геометрии поперечного сечения.

Целью данной работы является численное моделирование процессов движения жидкости и теплоотдачи в каналах прямоугольного и треугольного сечений. На первом этапе была решена задача о теплообмене при развитом ламинарном течении в прямоугольном канале.

Считая канал бесконечно длинным, а плотность и коэффициент вязкости постоянными, можно свести систему уравнений Навье–Стокса к уравнению Пуассона, которое в безразмерной форме принимает вид

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = -1, \tag{2}$$

где ω — безразмерная скорость; ξ и η — безразмерные координаты. Для каналов прямоугольного сечения с отношением сторон κ (рис. 1) это уравнение с граничным условием $\omega = 0$ на стенках имеет аналитическое решение в виде ряда [3]:

$$\omega = \frac{16\kappa}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\kappa} \eta \right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\kappa} \right)} \right] \cos\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\kappa} \xi \right). \tag{3}$$

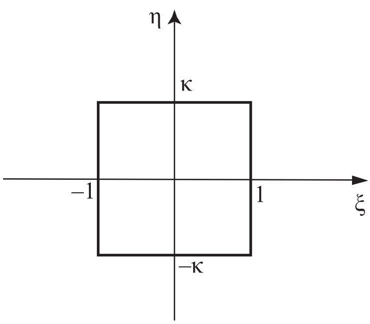

Рис. 1. Поперечное сечение прямоугольного канала

Для канала треугольного сечения (рис. 2) поле скоростей можно получить аналитически, решая уравнение (2). Если сечение представляет собой равнобедренный треугольник, боковые стороны которого заданы уравнениями $\eta = \kappa(1 \pm \xi)$, а основание $\eta = 0$, то решение имеет вид

$$\omega = \eta(\eta - \kappa\xi - \kappa)(\eta + \kappa\xi - \kappa), \tag{4}$$

где κ — отношение высоты к половине основания.

Уравнение энергии для развитого течения в области, достаточно удаленной от входа в канал, будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\frac{\partial\theta}{\partial\chi}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}, \qquad (5)$$

где θ — безразмерная температура; χ, ξ, η — координаты; Re и Pr — числа Рейнольдса и Прандтля соответственно.

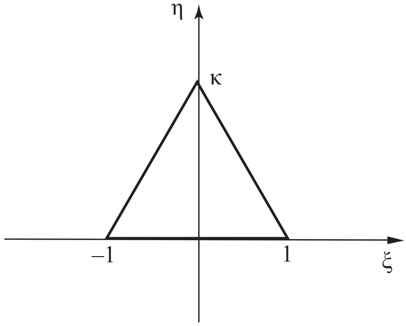

Рис. 2. Поперечное сечение треугольного канала

В качестве граничных условий для прямоугольного канала задавалась температура на входе в канал, постоянный поток тепла на горизонтальных стенках и отсутствие теплообмена на вертикальных стенках:

$$\theta=0 \text{ при } \chi=0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=0 \text{ при } \chi>0,\ \xi=\pm1,\ |\eta|\le\kappa,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\pm\frac{1}{2} \text{ при } \chi>0,\ \eta=\pm\kappa,\ |\xi|\le1.$$

Краевая задача для уравнения энергии в треугольном канале решалась в предположении, что боковые стенки адиабатны при заданном тепловом потоке на основании того, что

$$\theta=0 \text{ при } \chi=0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=0 \text{ при } \chi>0,\ |\xi|\le1,\ \eta=\kappa(1\pm\xi),$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=1, \text{ при } \chi>0,\ \eta=0,\ |\xi|\le1.$$

Будем считать, что при достаточном удалении от входа профиль температуры меняется по длине канала линейно:

$$\theta=A\chi+f(\xi,\eta), \qquad (6)$$

где A — постоянная; $f(\xi,\eta)$ — неизвестная функция. Подставляя это выражение в уравнение энергии, получим

$$\frac{1}{2}A\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}. \qquad (7)$$

Используя определение среднемассовой температуры

$$\overline{\theta} = \int_{-\kappa}^{\kappa} \int_{-1}^{1} \frac{\omega(\xi,\eta)}{\overline{\omega}} d\xi d\eta, \tag{8}$$

можно найти значение константы A:

$$A = \frac{1}{\kappa \overline{\mathrm{Re}} \, \mathrm{Pr}}, \tag{9}$$

где $\overline{\mathrm{Re}}$ — число Рейнольдса, построенное на среднемассовой скорости.

С учетом этого получим уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2\kappa} \frac{\omega}{\overline{\omega}} \tag{10}$$

с граничными условиями для прямоугольного канала:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \ \text{ при } \ \chi > 0, \ \ \xi = \pm 1, \ \ |\eta| \le \kappa, \tag{11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \pm \frac{1}{2} \ \text{ при } \ \chi > 0, \ \ \eta = \pm \kappa, \ \ |\xi| \le 1. \tag{12}$$

Эти условия определяют функцию $f(\xi,\eta)$ с точностью до константы C, которую можно найти из условия

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \int_{-1}^{1} \mathrm{Re}(\xi,\eta) f\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta = 0,$$

вытекающего из определения среднемассовой температуры (7):

$$C = -\frac{1}{4\kappa} \int_{-\kappa}^{\kappa} \int_{-1}^{1} \frac{\omega(\xi,\eta)}{\overline{\omega}} f\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta, \tag{13}$$

где $f(\xi,\eta)$ — произвольное решение уравнения, в качестве которого можно выбрать решение, обладающее свойством

$$f(0,0) = 0. \tag{14}$$

Таким образом, задача сводится к уравнению (9) с граничными условиями (10), (11) и условием (14) для центральной точки сечения. Температурное поле в канале будет определяться функцией

$$\theta = A\chi + f(\xi,\eta) + C. \tag{15}$$

Для численного решения описанной выше краевой задачи была построена разностная схема на прямоугольной сетке с пятиточечным шаблоном и шагом h, аппроксимирующая задачу с погрешностью порядка $O(h^2)$. Алгоритм решения в самом общем виде был следующим.

1. По формуле (3) определялись поле скоростей в канале и средняя скорость по сечению канала.

2. Производилась нормировка поля скоростей делением каждого элемента результирующего массива скоростей на значение средней скорости.

3. По разностным формулам с использованием итерационного алгоритма последовательной верхней релаксации [4] решалось уравнение (9) с условиями (10), (11) и (14).

4. Вычислялась константа C по формуле (13).

5. Определялось температурное поле в канале по формуле (15).

6. По известному температурному полю определялись локальные числа Нуссельта на верхней и нижней границах канала:

$$\mathrm{Nu} = \frac{1}{f(\xi, \pm\kappa)},$$

а также средние числа Нуссельта по длине границы.

Указанный алгоритм реализуют программы VELOSITY и NUSSELT, выполненные в интегрированной среде TurboPascal. Результатом работы программы VELOSITY является распределение скорости в канале и средняя по сечению скорость при заданном отношении сторон. Программа NUSSELT рассчитывает температурное поле по известному полю скоростей. Предусмотрена визуализация результатов в виде трехмерного изображения температурной поверхности и ее сечений различными плоскостями. По рассчитанным локальным значениям чисел Нуссельта строятся графики распределения локальной теплоотдачи по длине адиабатной стенки при различном отношении сторон поперечного сечения. Влияние характера течения жидкости на теплообмен в канале иллюстрируется зависимостью среднего числа Нуссельта от средней скорости.

В перспективе предполагается построение алгоритма и разработка программы для численного решения задачи о конвективном теплообмене в канале более сложной геометрии — с выступами на стенках. Такого рода задача возникает при анализе гидродинамики и теплообмена в профилированном диффузорном канале, предельным случаем которого является прямоугольный призматический канал.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* 5-е изд., Москва, Наука, 1978, 736 с.

[2] Михеев М.А., Михеева И.М. *Основы теплопередачи.* 2-е изд., Москва, Энергия, 1977, 344 с.

[3] Дульнев Г.Н. *Теория тепло- и массообмена.* Санкт-Петербург, НИУ ИТМО, 2012, 194 с.

[4] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1: Основные положения и общие методы.* Москва, Мир, 1991, 504 с.

Статья поступила в редакцию 27.11.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Кирюхина Н.В., Горбунов А.К., Силаева Н.А. Моделирование конвективного теплообмена в призматических каналах с различной геометрией сечения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 1.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1354.html

Кирюхина Наталия Владимировна окончила физико-математический факультет Калужского государственного педагогического института им. К.Э. Циолковского по специальности «Физика и математика», окончила аспирантуру по специальности «Теплофизика и теоретическая теплотехника» при кафедре общей физики. Канд. пед. наук, доцент кафедры общей физики Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского. Область научных интересов: теплофизика, теория и методика обучения физике. e-mail: natakir21@gmail.com

Горбунов Александр Константинович родился в 1947 г., окончил МФТИ. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда статей по физике конденсированного состояния. e-mail: kf_mgtu_fiz@mail.ru

Силаева Наталья Альбертовна родилась в 1968 г., окончила Калужский государственный педагогический институт им. К.Э. Циолковского. Старший преподаватель кафедры физики Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда статей в областях исследований прочностных характеристик свойств материалов. e-mail: silseva1968@list.ru

Modeling of convective heat transfer in prismatic channels of different cross section geometry

© N.V. Kiryukhina[1], A.K. Gorbunov[2], N.A. Silaeva[2]

[1] Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky, Kaluga, 248023, Russia
[2]Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

The article describes a mathematical model of heat transfer in developed laminar flow in prismatic channels of rectangular and triangular cross-sections, including the equation of fluid motion and the energy equation with boundary conditions of the second kind on the channel walls. The analytical solutions for the velocity field have been derived from the equations of liquid motion. Solution of the energy equation has been obtained by numerical method of finite differences. The computational algorithm was based on the difference scheme approximating the boundary value problem, based on five-point pattern. This algorithm implements programs allowing calculation of the velocity and temperature fields in the channels and determination of the local and average heat transfer characteristics. In future we plan to build an algorithm and to develop a program for the numerical solution of the problem of convective heat transfer in channel of more complex geometry with projections on the walls.

Keywords: *convective heat transfer, mathematical modeling, finite difference method.*

REFERENCES

[1] Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Mechanics]. 5th ed. Moscow, Nauka Publ., 1978, 736 p.
[2] Mikheev M.A., Mikheeva I.M. *Osnovy teploperedachi* [Fundamentals of Heat Transfer]. 2nd ed. Moscow, Energiya Publ., 1977, 344 p.
[3] Dulnev G.N. *Teoriya teplo- i massoobmena* [Theory of Heat and Mass Transfer]. St. Petersburg, Reseach University ITMO Publ., 2012, 194 p.
[4] Fletcher C.A.J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. London, et al., 1988. [Russian edition: Fletcher C. *Vychislitelnye metody v dinamike zhidkostey. Tom 1: Osnovnye polozheniya i obschie metody* (Computational methods in fluid dynamics. Vol. 1: Fundamentals and general methods) Moscow, Mir Publ., 1991, 504 p.].

Kiryukhina N.V. graduated from Kaluga Pedagogical Institute named after K.E. Tsiolkovsky. Ph.D., assoc. professor of the General Physics Department at Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. Research interests: Thermal physics, physics teaching theory and methods. e-mail: natakir21@gmail.com

Gorbunov A.K. (b. 1947) graduated from Moscow Institute of Physics and Technology. Dr. Sci. (Phys.&Math.), head of the Physics Department at Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University. The author of several articles on condensed matter physics. e-mail: kf_mgtu_fiz@mail.ru

Silaeva N.A. (b. 1968) graduated from the Kaluga Pedagogical Institute named after K.E. Tsiolkovsky. The senior lecturer of the Physics Department at Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University. The author of several articles on strength characteristics of the material properties. e-mail: silseva1968@list.ru