

Некоторые соотношения дискретного и волнового в динамических системах

© В.Ф. Смирнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Приведен анализ корпускулярных и волновых свойств дискретных динамических систем, и обоснована ограниченность корпускулярного подхода при оценке бегущих волн. Показано, что форма собственных колебаний стоячая волна позволяет получить действительную нагруженность динамической системы во всех точках только в момент максимального отклонения масс, а в любой момент времени — только в некоторых точках системы (в узловых точках формы колебаний). В остальные моменты времени нагрузки в системе могут быть найдены при учете синуса угла сдвига фаз между бегущей и стоячей волнами.

Ключевые слова: волна, корпускула, дуализм, частота, фазовая скорость, импеданс, коэффициент демпфирования, собственная форма.

Корпускулярно-волновой дуализм — принцип, согласно которому любой объект может проявлять как волновые, так и корпускулярные свойства. Академик В.А. Фок дал следующую трактовку корпускулярно-волнового дуализма: «Можно сказать, что для атомного объекта существует потенциальная возможность проявлять себя в зависимости от внешних условий либо как волна, либо как частица, либо промежуточным образом. Именно в этой потенциальной возможности различных проявлений свойств, присущих микрообъекту, и состоит дуализм волна – частица» [1]. Однако волновыми свойствами обладают и различные по структуре макротела. Это могут быть однородные и неоднородные, непрерывные и дискретные распределенные механические системы. Как в однородных непрерывных, так и в однородных дискретных динамических системах могут существовать бегущие и стоячие волны, которые можно рассматривать в качестве единого изолированного осциллятора и анализировать их совместное проявление. Дуализм корпускулярных и волновых свойств присущ не только механическим, но и биологическим структурам.

В биологии примером дуализма может служить дискретная динамическая система руки человека. С одной стороны, составив дифференциальные уравнения движения звеньев руки, можно рассчитать бросок ядра спортсменом и получить реальные значения силовых взаимодействий, а с другой — можно обнаружить волновые особенности строения руки человека. В руке человека находятся две квази-однородные системы. Первую образуют предплечье, плечо и часть

туловища, вторую — три фаланги пальцев. Эти системы составляют шарнирно-соединенные стержни, характеризующиеся длиной l и находящиеся в потенциальном силовом поле, поэтому фазовая скорость и импеданс участков системы руки будут определяться формулами

$$V_{\phi} = a\sqrt{g/l}; \quad Z = b\sqrt{gl}.$$

Чтобы импульс динамического воздействия при движении проходил по руке от туловища до пальцев без отражения и не искажался (что необходимо для точного позиционирования пальцев при движении), две эти квазиоднородные системы должны соединяться системой, а именно ладонью, имеющей импеданс, равный среднему геометрическому импедансов соединяемых систем.

Тогда

$$Z_{л} = \sqrt{Z_{п}Z_{\phi}} \quad \text{или} \quad l_{л} = \sqrt{l_{п}l_{\phi}},$$

где Z и l — соответственно импеданс и средняя длина ладони (л), плеча, предплечья (п), фаланги пальца (ф).

Пусть, например, $l_{п} = 27$ см, $l_{л} = 9$ см, $l_{\phi} = 3$ см. Подставляя эти значения в формулу, получаем равенство $9 = \sqrt{27 \cdot 3}$. Это свидетельствует о том, что в процессе эволюционного развития человека из всех возможных вариантов соотношений размеров отдельных частей руки был оставлен вариант без отражения, обеспечивающий наиболее точное воспроизведение требуемых манипуляций.

Колебания как в открытых, так и в замкнутых системах тесно связаны с процессом распространения энергии. Различают два способа переноса энергии из одной точки пространства в другую: конвективный и волновой. При конвективном способе распространения энергия переносится вместе с движущейся материальной точкой. Получив в каком-либо месте пространства импульс, материальная точка совершает движение и отдает свою энергию в другом месте, взаимодействуя с другими материальными телами или точками. Кинематика процесса переноса энергии определяется аксиомой инерции: материальная точка сохраняет энергию и состояние равномерного прямолинейного движения, пока на пути следования не испытает некоторого взаимодействия.

При волновом способе перенос энергии и импульса из одной точки пространства в другую осуществляется бегущей волной, в которой материальные точки, определяющие эту волну, совершают движения только около своего равновесного положения. Уместно предположить, что в случае как конвективного распространения энергии, так и волнового этот процесс можно связать с некоторым аксиоматическим положением, а именно: волновой процесс распространяется неизменно по среде и переносит энергию, пока параметры среды остаются постоянными.

Следовательно, возникает вопрос о взаимосвязи между коллективным движением материальных точек и движением каждой отдельной частицы в волне. Нобелевский лауреат М. Борн пишет: «Волна представляет собой состояние движения частиц, а не движение частиц самих по себе» [2]. Академик Л.И. Седов, рассматривая распространение синусоидальных волн, пишет: «Если параметры волны постоянные, то волна распространяется вдоль направления движения как твердое тело» [3]. С.Э. Хайкин отождествляет бегущую волну с движением точек струны, находящейся в абсолютно твердой трубке, изогнутой и виде синусоиды и движущейся с постоянной скоростью вдоль струны [4]. Движение тех точек струны, которые находятся внутри трубки, будет точно таким же, как и при распространении по струне бегущей волны. Л.Д. Ландау проводит аналогию между волновым процессом и механикой материальных частиц, полагая, что волновой вектор волны в распространении волн играет роль импульса частицы в механике, а частота — роль энергии частицы [5].

Особенности поведения отдельной точки и коллективного движения точек в волне можно проиллюстрировать на известном примере движения двух волн, бегущих в противоположные стороны. На рис. 1, *a* показаны несколько фаз распространения начального отклонения, заданного в виде равнобедренного треугольника. Эту форму получают, если оттянуть струну в середине отрезка длиной l на высоту h , придерживая ее в концах отрезка.

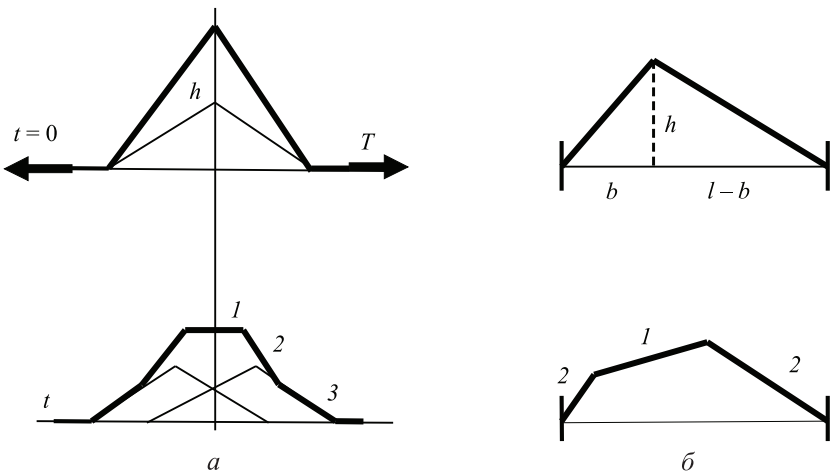


Рис. 1. Формы струны в различные моменты времени

При отпуске верхней точки образуются две бегущие волны с максимальным отклонением $h/2$, распространяющиеся в противоположных направлениях со скоростью v . Создающаяся при этом стоячая

волна имеет три характерных участка. Горизонтальный участок 1 движется вертикально вниз с постоянной скоростью $\frac{h}{l/2}v_{\phi}$. Наклонный участок 2 , параллельный первоначальному положению струны, от начала движения до определенного момента времени остается неподвижным. Наклонный участок 3 , соответствующий форме бегущей волны, движется горизонтально с постоянной скоростью v . Таким образом, движение точек струны определяется не силами ее деформации, а состоянием движения самой волны, которое для точек участка 2 , контактирующих с точками участков 1 и 3 , обуславливает мгновенное начало движения с постоянной скоростью из неподвижного положения.

Для струны с закрепленными концами на рис. 1, б показаны два положения: 1) струна длиной l первоначально оттянута в сторону на расстояние h в точке, делящей струну на отрезки b и $l - b$ так, что образуются два прямолинейных отрезка; 2) струна в момент времени t занимает произвольное положение. В этом варианте образующаяся стоячая волна, являющаяся суммой двух бегущих со скоростью v волн, также состоит из нескольких участков. Два крайних участка 2 параллельны двум участкам струны в их начальном положении и находятся в покое. Средний участок 1 движется в поперечном направлении с постоянной скоростью $\pm \frac{h}{2b(l-b)}v_{\phi}$ и всегда или уве-

личивается, или уменьшается на каждом конце со скоростью v . Для струны, закрепленной с двух концов, точки на стыке участков 1 и 2 мгновенно получают из состояния покоя постоянную скорость. Этот случай подробно рассмотрен в [6]. Следовательно, если рассматривать приоритеты обоснования движения материальных точек струны, нужно отметить, что состояние движения точек, т. е. движение волны, является определяющим по отношению к динамике самой материальной точки струны.

Рассмотрим дискретную динамическую систему, состоящую из 24 инерционных масс, разделенных на три части по восемь масс в каждой. При этом восемь первых масс имеют момент инерции $J = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, а следующие — 10 и 0,1 $\text{кг}\cdot\text{м}^2$, и все они соединены между собой податливостью $c = 0,000\ 000\ 92 \text{ Н}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$.

Дифференциальные уравнения запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\phi}_1 + 2c\phi_1 - c\phi_2 &= 0; \\ J_2\ddot{\phi}_9 - c\phi_8 + 2c\phi_9 - c\phi_{10} &= 0; \\ J_3\ddot{\phi}_{17} - c\phi_{16} + 2c\phi_{17} - c\phi_{18} &= 0; \\ J_3\ddot{\phi}_{24} - c\phi_{23} + 2c\phi_{24} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

На рис. 2 представлена пятая форма собственных колебаний с частотой 459 с^{-1} и периодом $0,0137 \text{ с}$, являющаяся результатом интегрирования системы дифференциальных уравнений (1).

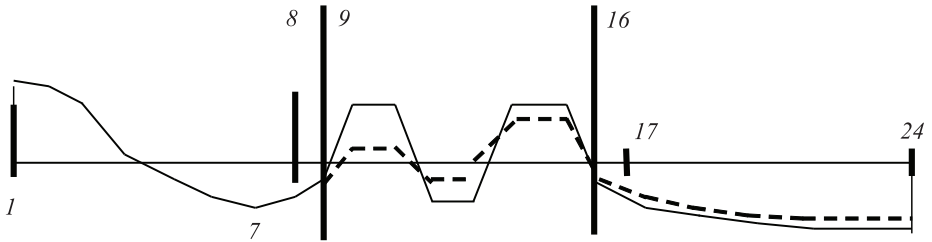


Рис. 2. Собственная форма 24-массовой динамической системы

Однако если источник энергии расположен в первой массе, а потери энергии сосредоточены на последней массе, то будут преобладать волновые свойства системы и, следовательно, дифференциальные уравнения (1) станут некоторым аналогом волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= \frac{c}{J_1} (2\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_9 &= \frac{c}{J_2} (-\varphi_8 + 2\varphi_9 - \varphi_{10}); \\ &\dots \\ \ddot{\varphi}_{17} &= \frac{c}{J_3} (-\varphi_{16} + 2\varphi_{17} - \varphi_{18}); \\ \ddot{\varphi}_{24} &= \frac{c}{J_3} (-\varphi_{23} + 2\varphi_{24}). \end{aligned} \tag{2}$$

В уравнениях (2) отношение c/J представляет собой аналог фазовой скорости, а выражение в скобках — разностный аналог второй производной.

Анализируя эту динамическую систему как волновую, получаем, что в первой части рассматриваемой системы за половину периода при фазовой скорости $v_1 = \sqrt{c/J_1} = 1042 \text{ уч./с}$ бегущая волна проходит семь масс, во второй части системы с фазовой скоростью $v_2 = \sqrt{c/J_2} = 328 \text{ уч./с}$ за период волна проходит 4,5 массы. Таким образом, используя волновые характеристики, можно получить собственные частоты и формы колебаний.

Волновые особенности дискретных динамических систем вносят в форму бегущей волны существенные изменения. Так, на стыке

первой и второй частей системы, имеющих разные импедансы $Z_1 = (cJ_1)^{1/2} = 1042 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$ и $Z_2 = (cJ_2)^{1/2} = 3297 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$, коэффициент отражения будет иметь значение $R_{12} = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2) = -0,519$. Коэффициент прохождения T_{12} для амплитуды и скорости из первой части во вторую становится равным $T_{12} = 1 + R_{12} = 0,481$. Соответственно на стыке второй и третьей частей системы $R_{23} = 0,82$ и $T_{23} = 1,82$. То есть амплитуда формы колебаний в второй части системы будет почти в 2 раза меньше (0,481), а в третьей части, учитывая уменьшение амплитуды во второй, получим меньшее значение амплитуды (0,875), чем это могло быть при бесконечно большой скорости распространения взаимодействия.

Отражения могут происходить и от отдельных масс, существенно отличающихся по значению от остальных масс динамической системы. В этом случае коэффициент прохождения волны от группы одинаковых масс с моментом инерции J_k через массу с моментом инерции $J = (1 + a) J_k$ может быть вычислен по формуле

$$T = \frac{1}{1 + ia \operatorname{tg} \frac{K}{2}},$$

где K — волновое число.

Рассмотрим коэффициент прохождения волны в шестицилиндровом двигателе внутреннего сгорания для низшей частоты с узлом формы колебаний, расположенным у маховика. В четверти длины волны содержится шесть характерных участков, а следовательно, во всей длине волны λ укладывается 24 участка и волновое число $K = 2\pi/\lambda = 0,2618$. Принимая момент инерции поршневых групп двигателя $J_k = 0,347 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, а момент инерции маховика с главным фрикционом $J = 1,77 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, находим коэффициент $a = 4,1$; следовательно, коэффициент прохождения волны

$$T_{\text{дв}} = \operatorname{Re}T = \frac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{K}{2}} = \frac{1}{1 + 4,1^2 \operatorname{tg}^2 0,131} = 0,773.$$

Таким образом, только 77 % волновой энергии проходит в следующую за маховиком часть дискретной динамической системы. Если значение K мало, что соответствует длинным волнам, то значение T практически равно единице и наблюдается почти полное прохождение волн. Но если значение K близко к π , что соответствует коротким волнам, то происходит почти полное отражение даже при малом значении a . Эта нерегулярность структуры практически полностью искажает хвост волны. Если возмущение возникает между двумя по-

добными неоднородностями, то существенная доля энергии отразится многократно, прежде чем пройти через какую-либо из них; большее число неоднородностей вызовет хаотическое движение, напоминающее теплопроводность [7].

Если неоднородность инерционных масс и податливостей незначительна, сопротивления распределены по дискретной динамической системе равномерно, а возмущающее воздействие обладает достаточной энергией, то прямая бегущая волна, отразившись от конца системы, переходит в обратную бегущую волну, которая, достигнув начала, вместе с прямой образует стоячую волну, т. е. собственную форму колебаний. Временным моментом образования формы колебаний является момент совпадения фаз прямой и обратной волн, и, следовательно, не существенно, с какой фазовой скоростью (она может быть и бесконечно большой) достигнут этот момент. Таким образом, для нахождения собственных частот и форм колебаний данных механических систем оправданно применение принципа Даламбера или уравнений Лагранжа второго рода, основанных на мгновенном распространении взаимодействия.

Ранее было установлено, что изменения собственной формы и силовые взаимодействия ведут себя несколько обособленно, поэтому естественно предположить, что и при резонансных колебаниях динамических систем моменты, нагружающие систему от бегущих волн, и моменты, определяемые формой колебаний, в некоторых случаях могут не совпадать [8]. Причина в том, что бегущие и стоячие волны существенно различаются по своей природе. Так, колебания кинетической и потенциальной энергии в стоячей волне сдвинуты по времени относительно друг друга на четверть периода. В бегущей волне эти виды энергии изменяются в одной фазе.

Проведены экспериментальные исследования цепной трехмассовой механической установки, состоящей из соединенных валами инерционного вибратора, маховой массы и одноступенчатого редуктора с главным фрикционом, присоединенным к неподвижной опоре — заделке [9]. Исследованию подвергали первую четвертьволновую форму колебаний, поэтому дисперсное соотношение могло быть удовлетворено, поскольку выраженная числом участков длина волны $\lambda = 12$, волновое число $K = 2\pi/12 = 0,52$ и, следовательно, $\sin K \approx K$. По участку стенда редуктор — заделка (числовые характеристики $J = 1,44 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $c = 77000 \text{ Н}\cdot\text{м}$) определена фазовая скорость $v_\phi = \sqrt{c/J} = 231 \text{ уч./с}$ и первая собственная частота $p_k = 2v_\phi \sin K / 2 = 119,7 \text{ с}^{-1}$, значение которой хорошо согласуется с расчетным значением $122,7 \text{ с}^{-1}$, полученным из решения дифференциальных уравнений.

В результате экспериментальных исследований показано, что сдвиг фазы между возмущающим моментом и кривыми угловых пере-

мещений (формой колебаний) составляет $\pi/2$. Это значение согласуется с принятым в теории колебаний сдвигом фазы $\pi/2$ между возмущением и отклонением в резонансе для одноступенного гармонического осциллятора, который можно рассматривать как четвертьволновой вибратор, каким и является динамическая схема стенда.

Таким образом, максимальные моменты на участках между массами, полученные тензометрированием, вследствие присутствия бегущей волны не совпадают со значениями моментов, подсчитанными по форме колебаний, и имеют угловые сдвиги фаз относительного возмущающего момента от 0 около вибратора до $\pi/2$ в заделке в соответствии с фазовой скоростью. С увеличением угла сдвига фаз значения максимальных моментов все более приближаются к значениям моментов, рассчитанных по форме колебаний, и почти не отличаются в заделке при фазе $\pi/2$, так как на участке, примыкающем к ней, прямая и отраженная волны находятся практически в одной фазе в течение всего времени колебаний.

Расчетные моменты, полученные по форме колебаний с использованием корпускулярного подхода к анализу дискретной квазиоднородной динамической системы, совпадают с полученными экспериментально значениями для любого момента времени только на некоторых участках системы (в узле около заделки), а для одного момента времени (соответствующего максимальному отклонению инерционных масс) — на всех участках динамической системы при волновом распространении энергии колебаний от инерционного вибратора до заделки.

Очевидно, что для определения максимальных моментов, действующих на участках в дискретной квазиоднородной динамической системе, где энергия возбуждения от источника распространяется волновым способом и крутящие моменты являются гармоническими функциями, необходимо учитывать сдвиги фаз, зависящие от размеров системы и фазовой скорости бегущих волн. Момент M_m на каком-либо участке системы прямо пропорционален моменту $M_{m \text{ ф.к.}}$, подсчитанному по форме колебаний, и обратно пропорционален синусу угла сдвига фаз δ_m бегущей волны от места возбуждения до данного участка:

$$M_m = M_{m \text{ ф.к.}} / \sin \delta_m.$$

Угол сдвига фаз может быть определен по формуле

$$\delta_m = p_k N_{m-1} / v_\phi,$$

где p_k — круговая частота k -й формы колебаний; N_{m-1} — номер соответствующего участка; v_ϕ — фазовая скорость.

Чтобы сравнить характер нагружения при вынужденных колебаниях, рассмотренных выше и имеющих волновую природу, и при свободных колебаниях с данными начальными условиями в отсутствие волновых явлений, инерционные массы стэнда с помощью нагружающего устройства выставляли в соответствии с первой формой колебаний, и после освобождения от связей они совершали свободные колебания. В результате экспериментальных исследований получено, что низкочастотные гармоники крутящих моментов на участках системы совпадают по фазе и их значения соответствуют моментам, определяемым по форме колебаний, т. е. корпускулярный подход в данном случае полностью обуславливает нагрузку системы.

Выводы.

1. Плотность и сила натяжения струны, моменты инерции и жесткости участков механической системы, плотность и давление в жидкости или воздухе определяют фазовую скорость бегущей волны; силы сопротивления придают экспоненциальный характер амплитуде бегущей волны; возмущающее воздействие определяет возможность прямого и обратного прохождения бегущей волной в системе и возникновение стоячей волны т. е. силовую характеристику системы.

2. Форма собственных колебаний позволяет получить действительное решение лишь в момент максимального отклонения масс, а в каждый момент времени — только в некоторых точках системы, а именно в узловых точках формы колебаний.

3. В остальные моменты времени действительные нагрузки от колебаний могут быть найдены во всех точках квазиоднородной дискретной динамической системы по форме колебаний с учетом сдвига фаз бегущих волн как отношение момента на участке, определенного по форме колебаний, к синусу угла сдвига фазы, определяемой положением данного участка в форме колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фок В.А. *Теория пространства, времени и тяготения*. Москва, Наука, 1972.
- [2] Борн М. *Эйнштейновская теория относительности*. Москва, Мир, 1972, 368 с.
- [3] Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. Москва, Наука, 1973, 536 с.
- [4] Хайкин С.Э. *Физические основы механики*. Москва, Наука, 1971, 752 с.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. Москва, Наука, 1973, 504 с.
- [6] Джеффрис Г., Свирлс Б., *Методы математической физики*. Вып. 3. Москва, Мир, 1970, 314 с.
- [7] Смирнов В.Ф., Назаренко Б.П., Зябликов В.М. Некоторые вопросы волновой динамики квазиоднородных систем. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2000, № 1(4), с. 23–31.
- [8] Зябликов В.М., Смирнов В.Ф. Два подхода к анализу динамики механических систем и одно решение. *Справочник. Инженерный журнал*, 2012, № 9, с. 9–13.

- [9] Смирнов В.Ф., Зябликов В. М. Особенности поведения динамических систем при волновом распространении энергии колебаний. *Вестник машиностроения*, 1994, № 10, с. 7–11.

Статья поступила в редакцию 03.12.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Смирнов В.Ф. Некоторые соотношения дискретного и волнового в динамических системах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12.
URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/hidden/1352.html>

Смирнов Валерий Федорович — канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: smirnov.fn-3.bmstu@yandex.ru

Some relations of discrete and wave in dynamical systems

© V.F. Smirnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents analysis of the corpuscular and wave properties of discrete dynamical systems, and gives proof of limitations of corpuscular approach in assessing the traveling waves. It is shown that such form of natural vibrations as standing wave allows to obtain a real loading of the dynamic system in all points only at the moment of maximum deflection of the masses. As for any given time it works only in some points of the system (node points of waveforms). On other times the load in the system can be found in accounting of sine of phase angle between the traveling and standing waves.

Keywords: wave, corpuscular, dualism, frequency, phase velocity, impedance, damping coefficient, natural mode.

REFERENCES

- [1] Fok V.A. *Teoriya prostranstva, vremeni i tyagoteniya* [Theory of Space, Time and Gravitation]. Moscow, Nauka Publ., 1972.
- [2] Born M. *Einsteins Theory of Relativity*. Dover Publications, Inc, New York, 1962.
- [3] Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics]. Vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1973, 536 p.
- [4] Khaikin S.E. *Fizicheskie osnovy mekhaniki* [Physical Principles of Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 752 p.
- [5] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya polya* [Field Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 504 p.
- [6] Jeffreys H., Swirles B. *Methods of Mathematical Physics*. 3rd revised ed. Cambridge University Press, 1956.
- [7] Smirnov V.F., Nazarenko B.P., Zyablikov V.M. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Seriya Estesvennyye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2000, no. 1(4), pp. 23–31.
- [8] Zyablikov V.M., Smirnov V.F. *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal — Handbook. Engineering Journal*, 2012, no. 9, pp. 9–13.
- [9] Smirnov V.F., Zyablikov V.M. *Vestnik mashinostroeniya — Mashinostroenie Bulletin*, 1994, no. 10, pp. 7–11.

Smirnov V.F., Ph.D., assoc professor of the Theoretical Mechanics Department at Bauman Moscow State Technical University. e-mail: smirnov.fn-3.bmstu@yandex.ru