

## Алгоритм формирования уравнений динамики для механической системы с конечным числом степеней свободы на основе теоремы об изменении кинетической энергии

© П.Г. Русанов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Описана процедура алгоритма, предназначенного для формирования уравнений динамики на основе теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме. Ее реализация продемонстрирована на примерах плоских механизмов с двумя степенями свободы. Предлагаемая технология вывода математической модели динамического состояния механической системы отличается от классических стратегий, в том числе от уравнений Лагранжа второго рода.*

**Ключевые слова:** кинетическая энергия, мощность, алгоритм вывода уравнений динамики, линейная комбинация независимых величин.

**Введение.** К настоящему времени известны различные способы формирования систем дифференциальных уравнений для механической системы с конечным числом степеней свободы, в том числе на основе принципов аналитической механики, применимых в задачах динамики, или в виде набора канонических дифференциальных уравнений отдельных тел и уравнений связи [1–9]. В данной работе предложен алгоритм вывода математической модели динамического состояния механической системы тел с конечным числом степеней свободы на основе теоремы об изменении кинетической энергии  $T$  в дифференциальной форме:

$$\dot{T} = W^{e,i}. \quad (1)$$

Здесь  $\dot{T}$  — производная по времени  $t$  от  $T$ ;  $W^{e,i}$  — суммарная мощность внешних и внутренних сил, причем предполагается, что обе скалярных величины  $T$ ,  $W^{e,i}$  являются некоторыми функциями параметров текущего кинематического состояния механической системы.

Процедура алгоритма основана на использовании обобщенных координат  $\bar{q} = q_1, q_2, \dots, q_s, \dots, q_{n_q}$ ,  $n_q \geq 1$ ,  $1 \leq s \leq n_q$ , и скоростей их изменения  $\dot{\bar{q}} = \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, \dots, \dot{q}_{n_q}$  во времени  $t$ , введенных для анализа движения исследуемой механической системы с  $n_q \geq 1$  степенями свободы.

Нулевую разность  $\dot{T} - W^{e,i} = 0$  в (1) можно представить в виде линейной комбинации независимых величин  $(T_s - Q_s) \dot{q}_s$ ,  $1 \leq s \leq n_q$ :

$$\dot{T} - W^{e,i} = \sum_s (T_s - Q_s) \cdot \dot{q}_s = 0, \quad (2)$$

Откуда следуют равенства нулю каждого множителя перед обобщенными скоростями:

$$T_s - Q_s = 0, 1 \leq s \leq n_q. \quad (3)$$

В выражениях (2) и (3)

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \sum_{b=1}^{n_1} (M_b \bar{a}_{Cb} \cdot \bar{V}_{Cb} + I_{Cb} \bar{\epsilon}_b \cdot \bar{\omega}_b) = \sum_s \left\{ \sum_{b=1}^{n_1} (M_b \bar{a}_{Cb} \cdot \frac{\partial \bar{L}_b}{\partial q_s} + I_{Cb} \bar{\epsilon}_b \cdot \frac{\partial \bar{H}_b}{\partial q_s}) \right\} \dot{q}_s = \sum_s T_s \dot{q}_s \\ &\quad ; \\ W^{e,i} &= \sum_b (\bar{R}_b \cdot \bar{V}_{Cb} + \bar{m}_b \cdot \bar{\omega}_b) = \sum_s \left\{ \sum_{b=1}^{n_1} (\bar{R}_b \cdot \frac{\partial \bar{L}_b}{\partial q_s} + \bar{m}_b \cdot \frac{\partial \bar{H}_b}{\partial q_s}) \right\} \dot{q}_s = \sum_s Q_s \dot{q}_s ; \\ T_s &= \sum_{b=1}^{n_1} (M_b \bar{a}_{Cb} \cdot \frac{\partial \bar{L}_b}{\partial q_s} + I_{Cb} \bar{\epsilon}_b \cdot \frac{\partial \bar{H}_b}{\partial q_s}), \quad Q_s = \sum_{b=1}^{n_1} (\bar{R}_b \cdot \frac{\partial \bar{L}_b}{\partial q_s} + \bar{m}_b \cdot \frac{\partial \bar{H}_b}{\partial q_s}) \quad (4) \end{aligned}$$

скалярные функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей, подлежащие аналитическому расчету;  $M_b, \bar{V}_{Cb}, \bar{a}_{Cb} = \dot{\bar{V}}_{Cb}, I_{Cb}, \bar{\omega}_b, \bar{\epsilon}_b = \dot{\bar{\omega}}_b$ , — масса, вектор скорости и вектор ускорения центра масс, центральный момент инерции, угловая скорость и угловое ускорение  $b$ -го тела ( $1 \leq b \leq n_1$ );  $\bar{V}_{Cb} = \dot{\bar{r}}_{Cb} = \sum_s \frac{\partial \bar{L}_b}{\partial q_s} \dot{q}_s$

и  $\bar{\omega}_b = \dot{\bar{H}}_b = \sum_s \frac{\partial \bar{H}_b}{\partial q_s} \dot{q}_s$  — линейные зависимости  $\bar{V}_{Cb}$  и  $\bar{\omega}_b$  от обобщенных скоростей;

$$\bar{r}_{Cb} = \bar{L}_b(\bar{q}) = \sum_j l_j(\bar{q}) \bar{e}_j(\bar{q}), \quad \bar{H}_b = \sum_k \varphi_k(\bar{q}) \bar{e}_k(\bar{q}) \quad (5)$$

зависимости вектора положения центра масс  $\bar{r}_{Cb}$  и вектора конечных угловых поворотов  $\bar{H}_b$   $b$ -го тела от обобщенных координат в инерциальной системе отсчета;  $\bar{e}_j(\bar{q}), \bar{e}_k(\bar{q})$  — единичные векторы направлений;  $\bar{R}_b, \bar{m}_b$  — главный вектор и главный момент внешних сил для  $b$ -го тела, приведенных к его центру масс.

Из полученной связи скалярных функций  $Q_s$  с функцией мощности приложенных сил следует, что функции  $Q_s$  имеют тот же смысл, что и соответствующие обобщенные силы в уравнениях Лагранжа второго рода. В таком случае очевидно, что и функции  $T_s$  данного алгоритма будут совпадать с инерционными членами уравнений Ла-

гранжа второго рода, т. е.  $T_s = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s}$ . Таким образом, по

сравнению с методом Лагранжа предлагаемый алгоритм имеет более низкий уровень математической сложности вычислительных операций в отношении функций  $T_s$ .

При введенных обобщенных координатах процедуру выделения независимых множителей  $T_s$ ,  $Q_s$  в выражении (1) можно реализовать компьютерными средствами, производя расчет в символьном виде аналитических выражений частных производных от функций (5) или методом поочередного присвоения всем обобщенным скоростям нулевых значений, кроме одной, равной единице. Причем в данных операциях выражения для ускорений и функций сил следует оставлять не раскрытыми. Раскрывать эти выражения можно только после выделения независимых множителей в уравнении  $\dot{T} - W^{e,i} = 0$ .

Ниже приведен примерный порядок получения конечного продукта в виде математической модели динамики исследуемой системы тел с  $n_q$  степенями свободы по соотношениям (3)–(5).

Шаг 1. Ввести обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Шаг 2. Для каждого подвижного тела с неизвестной кинематикой движения составить аналитические выражения (5).

Шаг 3. Составить аналитические функции  $T_s$  и  $Q_s$  по формулам (4), предварительно выразив векторы ускорений и априорные аналитические функции векторов  $\bar{R}_b$ ,  $\bar{m}_b$  через обобщенные координаты и время  $t$ .

Шаг 4. Составить систему (3) из  $n_q$  аналитических уравнений.

Приведенные шаги алгоритма можно выполнять как вручную, так и с помощью компьютерной техники в символьном виде. Последующий этап анализа движения механической системы связан с решением полученной системы уравнений (3).

Способ формирования математической модели по теореме (1) продемонстрируем на двух несложных примерах, не выделяя шагов алгоритма.

**Пример 1.** В плоском механизме  $M$  и  $m$  — массы поступательно движущегося ползуна и материальной точки  $B$  на конце невесомого прямолинейного стержня  $AB$ , движущегося в вертикальной плоскости (рис. 1). Точки  $B$ ,  $D$  соединены невесомой эластичной нитью, коэффициент жесткости которой на растяжение  $c_0$ ,  $AB = AD = l$ . Ползун, его прямолинейную направляющую и стержень считаем недеформируемыми телами. В данной постановке задачи пренебрежем длиной нити в недеформированном состоянии, трением в местах контактов тел, силами Архимеда и силами сопротивления воздуха.

Для вывода уравнений динамики рассматриваемой механической системы относительно инерциальной системы отсчета  $Oxyz$  (рис. 2), жестко связанной с основанием, применим алгоритм (3), основанный на теореме (1).

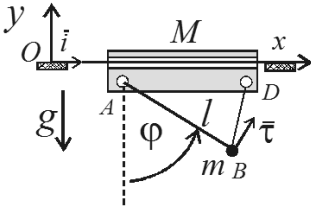


Рис. 1. Схема механизма, совершающего плоскопараллельное движение

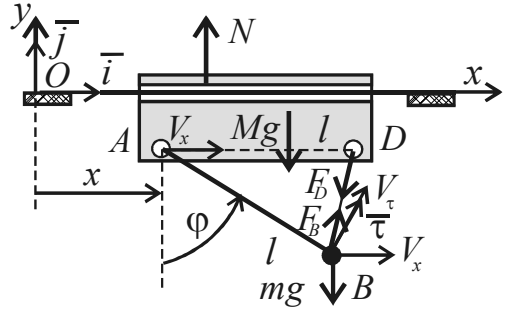


Рис. 2. Силовое кинематическое состояние механической системы

Для рассматриваемой консервативной системы тел

$$T = [M(\bar{V}_A \bar{V}_A) + m(\bar{V}_B \bar{V}_B)]/2; \quad (6)$$

$$W^{e,i} = (M\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_D)\bar{V}_A + (m\bar{g} + \bar{F}_B)\bar{V}_B,$$

где  $\bar{V}_A, \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$  — векторы скоростей точек  $A$  и  $B$  относительно системы  $Oxyz$ ;  $M\bar{g}, m\bar{g}$  — векторы сил тяжести ползуна и материальной точки  $B$ ;  $\bar{N}$  — сила воздействия основания на ползун;  $\bar{F}_B, \bar{F}_D, (\bar{F}_D = -\bar{F}_B)$  — силы воздействия нити на ползун и материальную точку  $B$ , причем произведения  $M\bar{g}\bar{V}_A, m\bar{g}\bar{V}_A = 0$  и  $\bar{N}\bar{V}_A = 0$  тождественно равны нулю.

Представим скорость точки  $B$  в виде

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA} = V_x \bar{i} + V_\tau \bar{\tau}, \quad (7)$$

где  $V_x = \dot{x}, V_\tau = \dot{s}$  априори являются независимыми проекциями векторов переносной и относительной скоростей для точки  $B$  на соответствующие касательные направления  $\bar{i}, \bar{\tau}; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — орты декартовой систем координат  $Oxyz$ ;  $\bar{\tau} = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}$  — орт естественной системы координат в точке  $B$ , касательный к дуге окружности с центром в точке  $A$  и радиусом  $AB = l$ , лежащей в плоскости  $Oxy$ ;  $s$  — криволинейная координата положения точки  $B$ , причем угол  $\varphi = s/l$  представляет собой угол отклонения стержня  $AB$  от вертикали.

Тогда

$$\dot{T} - W^{e,i} = M(\bar{a}_A V_x \bar{i}) + m\bar{a}_B (V_x \bar{i} + V_\tau \bar{\tau}) - (m\bar{g} + \bar{F}_B) V_\tau \bar{\tau} = 0.$$

В этом уравнении сгруппируем слагаемые, чтобы представить его в виде линейной комбинации независимых скоростей  $V_x$ ,  $V_\tau$ :

$$\left\{ (M\bar{a}_A + m\bar{a}_B) \bar{i} \right\} V_x + \left\{ (m\bar{a}_B + m\bar{g} - \bar{F}_B) \bar{\tau} \right\} V_\tau = 0. \quad (8)$$

Из взаимной независимости проекций скоростей  $V_x$  и  $V_\tau$  вывод о том, что каждый множитель при них в уравнении (8) необходимо должен тождественно равняться нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{i} (M\bar{a}_A + m\bar{a}_B) &= 0; \\ \bar{\tau} (-m\bar{a}_B + m\bar{g} + \bar{F}_B) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда после вычисления скалярных произведений векторов имеем

$$\begin{aligned} Ma_A^x + ma_B^x &= 0; \\ ma_B^\tau &= -mg_\tau + F_{B\tau}. \end{aligned} \quad (9)$$

Применив в качестве обобщенных координат параметры  $x$  и  $\varphi$ , на основании (9) получим искомую математическую модель относительно двух функций  $x(t)$  и  $\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= 0; \\ m(\ddot{x} \cos \varphi + l\ddot{\varphi}) &= -mg \sin \varphi + c_0 l \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

В выводе (10) учитывали следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}; \quad a_B^x = a_A^x + a_{BA}^x = \ddot{x} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \\ a_B^\tau &= a_A^\tau + a_{BA}^\tau = \ddot{x} \cos \varphi + l\ddot{\varphi}, \quad \bar{g} = -g \bar{j}, \quad \bar{N} = N_y \bar{j}; \\ \bar{F}_B &= -\bar{F}_D = c_0 \overline{BD} = c_0 (\overline{BA} + \overline{AD}) = c_0 l [(1 - \sin \varphi) \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}]. \end{aligned}$$

Справедливость системы уравнений (10) подтверждается тем, что первое уравнение в ней соответствует, например, проекции на неподвижную ось  $Ox$  формулы теоремы о движении центра масс, примененной к рассматриваемой системе подвижных тел, а второе — проекции на подвижную ось  $\bar{\tau}$  формулы динамической теоремы Кориолиса, примененной к материальной точке  $B$ , для анализа динамики ее относительного движения по отношению к ползуну.

**Пример 2.** Изменим конструктивные параметры в примере 1. На этот раз в плоском механизме (рис. 1) пренебрежем массой точки  $B$ , но будем учитывать массу  $m$  тонкого стержня  $AB$ , однородно распределенную по его длине.

Сформируем математическую модель аналогично примеру 1:

$$\begin{aligned} T &= [M(\bar{V}_A \bullet \bar{A}) + m(\bar{V}_C \bullet \bar{V}_C) + J_{Cz}(\bar{\omega} \bullet \bar{\omega})] / 2; \\ W^{e,i} &= (M\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_D) \bar{V}_A + m\bar{g} \bullet \bar{V}_C + \bar{F}_B \bullet \bar{V}_B. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\bar{V}_C$  — вектор скорости точки  $C$  — центра масс стержня;  $\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}$  — угловая скорость вращения стержня относительно ползуна.

Выразив только векторы скоростей через единичные орты

$$\bar{V}_A = V_x \bar{i}, \bar{V}_B = V_x \bar{i} + l\omega_z \bar{\tau}, \bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{CA} = V_x \bar{i} + 0,5l\omega_z \bar{\tau}, \bar{\omega} = \omega_z \bar{k}$$

и отбросив нулевые мощности ряда сил, представим (7) в виде

$$\begin{aligned} \dot{T} &= M(\bar{a}_A \cdot V_x \bar{i}) + m(\bar{a}_C \cdot V_x \bar{i}) + m(\bar{a}_C \cdot 0,5\omega_z l \bar{\tau}) + J_{Cz} \varepsilon_z \omega_z; \\ W^{e,i} &= \omega_z [m\bar{g}(\bar{k} \times \overline{AC}) + \bar{F}_B(\bar{k} \times \overline{AB})] = \omega_z [M_{Az}(m\bar{g}) + \bar{M}_{Az}(\bar{F}_B)] \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом (12) сгруппируем в уравнении  $\dot{T} - W^{e,i} = 0$  слагаемые и представим его в виде линейной комбинации независимых проекций скоростей  $V_x, \omega_z$   $PV_x + Q\omega_z = 0$ :

$$\begin{aligned} P &= (M\bar{a}_A + m\bar{a}_C) \cdot \bar{i} = 0; \\ Q &= J_{Cz} \varepsilon_z + M_{Az}(m\bar{a}_C) - M_{Az}(m\bar{g}) - M_{Az}(\bar{F}_B) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Перед вычислением скалярных произведений в (13) выразим векторы ускорений точек  $A$  и  $C$  и векторы сил  $m\bar{g}$ ,  $\bar{F}_B$  через единичные орты  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ :

$$\begin{aligned} \bar{a}_A &= \ddot{x} \bar{i}; \quad \bar{a}_C = \ddot{x} \bar{i} + 0,5l\ddot{\varphi} \bar{\tau} + 0,5l\dot{\varphi}^2 \bar{n}; \quad \bar{\tau} = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}; \\ \bar{n} &= -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}; \quad m\bar{g} = -mg \bar{j}; \quad \bar{F}_B = c_0 l [(1 - \sin \varphi) \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}]. \end{aligned}$$

После вычисления скалярных произведений и моментов векторов вокруг оси  $Az$  получим искомую математическую модель относительно функций  $x(t)$ ,  $\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + m(\ddot{x} + 0,5l\ddot{\varphi} \cos \varphi - 0,5l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= 0; \\ 0,5ml \cos \varphi \ddot{x} + J_{Az} \ddot{\varphi} &= -0,5mgl \sin \varphi + c_0 l^2 \cos \varphi, \end{aligned}$$

где  $J_{Az} = J_{Cz} + 0,25ml^2 = ml^2/3$  — момент инерции массы стержня вокруг оси  $Az$ .

Справедливость первого уравнения полученной математической модели подтверждается тем, что оно соответствует принципу Даламбера, примененного для системы подвижных тел в виде нулевой проекции главного вектора физических сил и сил инерции на ось  $Ox$ . Аналогично второе уравнение с позиции принципа Даламбера представляет нулевую сумму моментов внешних физических сил и сил инерции для стержня  $AB$ .

### Выводы.

1. С помощью обобщенных координат теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, примененной для

частного случая механической системы с конечным числом степеней свободы, можно представить в виде замкнутой системы дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат.

2. На основании предложенного алгоритма процедура получения математической модели в символьном или численном виде для произвольной системы абсолютно твердых тел с конечным числом степеней свободы может быть автоматизирована и реализована с использованием компьютерной техники.

3. Данный метод составления системы уравнений движения для случая механической системы с несколькими степенями свободы может в достаточной степени скомпенсировать отсутствие традиционного раздела «Принципы аналитической механики» в учебной программе курса «Теоретическая механика».

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Величенко В. В. *Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники*. Москва, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988, 280 с.
- [2] Виттенбург Й. *Динамика систем твердых тел*. Москва, Мир, 1980, 295 с.
- [3] Елисеев С. В., Свинин М. М. *Математическое и программное обеспечение в исследованиях манипуляционных систем*. Новосибирск, Наука. Сиб. отделение, 1992, 296 с.
- [4] Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. *Некоторые алгоритмы автоматизированного синтеза уравнений движения системы твердых тел*. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Препринт. Москва, 1993, № 84.
- [5] Лилов Л. Структура, кинематика и динамика систем твердых тел. *Успехи механики*, 1983, т. 6, № ½, с. 46—90.
- [6] Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. *Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы*. Москва, Наука, 1978, 378 с.
- [7] Раус Э.Дж. *Динамика системы твердых тел*. Т. 1, 2. Москва, Наука, 1983.
- [8] Фу К., Гонсалес Р., Ли К. *Робототехника*. Москва, Мир, 1989, 621 с.
- [9] Шахинпур М. *Курс робототехники*. Москва, Мир, 1990, 527 с.

Статья поступила в редакцию 29.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Русанов П.Г. Алгоритм формирования уравнений динамики для механической системы с конечным числом степеней свободы на основе теоремы об изменении кинематической энергии. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/hidden/1351.html>

**Русанов Павел Григорьевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: pa4rus@gmail.com

# The algorithm for generating dynamics equations for a mechanical system with a finite number of degrees of freedom based on the theorem of change of kinetic energy

© P.G. Rusanov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*By the example of planar mechanisms with two degrees of freedom the article demonstrates principles of organization of the algorithm to represent dynamics equations based on the theorem of change of kinetic energy in differential form. The offered technology of displaying mathematical model of a dynamic condition of mechanical system differs from classical methods, including Lagrange equations of the second kind.*

**Keywords:** kinetic energy, algorithm to derive the equations, equations of dynamics, linear combination of variables, independent variables.

## REFERENCES

- [1] Velichenko V.V. *Matrichno-geometricheskie metody v mekhanike s prilozheniyami k zadacham robototekhniki* [Matrix-geometric methods in mechanics with applications to problems of robotics]. Moscow, Nauka Publ., Head editorial board of phys.-math. Literature, 1988, 280 p.
- [2] Wittenburg J. *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1977.
- [3] Eliseev S.V., Svinin M.M. *Matematicheskoe i programnoe obespechenie v issledovaniyakh manipulyatsionnykh sistem* [Mathematical and software in manipulation systems research]. Novosibirsk, Nauka Publ., Siberian branch, 1992, 296 p.
- [4] Efimov G.B., Pogorelov D.Yu. *Nekotorye algoritmy avtomatizirovannogo sinteza uravneniy dvizheniya sistemy tverdykh tel* [Some algorithms for the automated synthesis of the equations of motion of solids]. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences. Preprint. Moscow, 1993, no. 84.
- [5] Lilov L. *Uspekhi mekhaniki — Advances in Mechanics*, 1983, vol. 6, no. 1–2, pp. 46–90.
- [6] Popov E.P., Vereschagin A.F., Zenkevich S.L. *Manipulyatsionnye roboty. Dinamika i algoritmy* [Manipulation robots. Dynamics and Algorithms]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 378 p.
- [7] Routh E.J. *Dynamics of a system of rigid bodies*. In two parts. Dover Publ., Inc., New York.
- [8] Fu K., Gonzalez R., Lee C. *Robotics: Control, sensing, vision and intelligence*, McGraw–Hill, 1987.
- [9] Shahinpoor M. *A Robot Engineering Textbook*. Harper & Raw Publ., 1987.

**Rusanov P.G.**, Ph.D., Assoc. Professor of the Department of Theoretical Mechanics at Bauman Moscow State Technical University. e-mail: pa4rus@gmail.com