УДК 531.352

Характеристические показатели периодических решений гамильтоновых систем и необходимые условия устойчивости

© А.А. Панкратов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена гамильтонова система с малым параметром специального вида (основная задача динамики по терминологии А. Пуанкаре). Исследована структура разложения характеристических показателей периодических решений в ряды по целым и дробным степеням малого параметра. Получены основные члены в этих разложениях, найдены необходимые условия устойчивости периодических решений.

Ключевые слова: *гамильтонова система, метод Пуанкаре, периодические и условно-периодические движения, характеристические показатели, устойчивость.*

Рассмотрим гамильтонову систему с малым параметром μ:

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi^{\text{т}}};\quad \frac{d\varphi}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial I^{\text{т}}};$$
$$\frac{dJ}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \psi^{\text{т}}};\quad \frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial J^{\text{т}}}. \tag{1}$$

В системе уравнений (1)

$$I=(p_1, ..., p_l)^{\text{т}},\ J=(p_{l+1}, ..., p_N)^{\text{т}},\ p^{\text{т}}=(p_1, ..., p_N)=(I^{\text{т}}, J^{\text{т}}),$$
$$\varphi=(q_1, ..., q_l)^{\text{т}},\ \psi=(q_{l+1}, ..., q_N)^{\text{т}},\ q^{\text{т}}=(q_1, ..., q_N)=(\varphi^{\text{т}}, \psi^{\text{т}}), \tag{2}$$
$$F(p, q, t, \mu)=F_0(I)+\mu F_1(p, q, t)+\mu^2 F_2(p, q, t)+..., \ \mu\ll 1.$$

Пусть F — аналитическая функция позиционных переменных p, угловых канонических переменных q и времени t в области $D\times T^N\times T^1$, где D — связная ограниченная область R^N $\{p_1, ..., p_N\}$ N-мерной плоскости; $T^N\{q_1, ..., q_N \bmod 2\pi\}$ — N-мерный тор; $T^1\{t, \bmod T_0\}$. Тогда функции $F_i(p, q, t)$ можно разложить в сходящиеся ряды Фурье по кратным угловых переменных q и Ωt, где $\Omega=2\pi/T_0$ — основная частота; T_0 — период:

$$F_i(p, q, t)=\sum_{\|k\|+|k_{N+1}|} F_i^{(k,k_{N+1})}(I,J)\cos\left(k^{(1)}\varphi+k^{(2)}\psi+k_{N+1}\Omega t\right)+$$
$$+F_i^{*(k,\, k_{N+1})}(I,J)\sin\left(k^{(1)}\varphi+k^{(2)}\psi+k_{N+1}\Omega t\right).$$

Здесь

$$k^{(1)} = (k_1, ..., k_l),\; k^{(2)} = (k_{l+1}, ..., k_N),\; k = \left(k^{(1)}, k^{(2)}\right),$$

$$k_i \in Z\,(i = 1, ..., N+1),\;\; \|k\| = \left\|k^{(1)}\right\| + \left\|k^{(2)}\right\| = \sum_{i=1}^{N}|k_i|. \tag{3}$$

Уравнения (1)–(3) представляют собой важный пример систем дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым, и широко применяются в небесной механике. Правые части уравнений (1)–(3) — периодические функции времени с периодом T_0. При исследовании такой системы возникает вопрос об условиях существования периодических решений уравнений (1)–(3) с периодом T, равным или кратным T_0, хотя бы для достаточно малых значений параметра μ, а также об условиях устойчивости этих периодических решений.

А. Пуанкаре получил достаточные условия существования периодических решений уравнений (1)–(3) и необходимые условия их устойчивости в форме, удобной для приложения [1]. Однако во многих практических задачах классические условия Пуанкаре нарушаются [2–4]. Вопрос о существовании периодических решений в подобных случаях (в дальнейшем будем называть их особыми или вырожденными) остается открытым. В работах [3, 4] для одного особого, важного для приложений случая найдены новые достаточные условия существования периодических решений, изучена структура разложения характеристических показателей в ряды по целым и дробным степеням малого параметра μ и получены алгебраические формулы для нахождения основных коэффициентов в разложениях соответствующих характеристических показателей. Сформулируем эти результаты в виде теорем.

Теорема 1. Дифференциальные уравнения (1)–(3) допускают при малых $\mu \neq 0$ периодические решения, близкие к порождающему решению:

$$I = a_1;\;\; J = a_2;\;\; \varphi = n^{(0)}t + \omega_1;\;\; \psi = \omega_2, \tag{4}$$

где $a_1,\ a_2,\ \omega_1,\ \omega_2$ — некоторые постоянные; $n^{(0)} = -\dfrac{\partial F_0}{\partial a_1^{\text{т}}} = -\dfrac{\partial F_0}{\partial I_1^{\text{т}}}\bigg|_{I_1=a_1}$, если параметры $a_1,\ a_2,\ \omega_1,\ \omega_2$ порождающего решения удовлетворяют следующим условиям:

$$\left((n^{(0)})^{\text{т}}, \Omega\right) = c\left(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_l, \bar{k}_{N+1}\right),$$

$$\left(c \neq 0,\;\; \bar{k}_i \in Z,\;\;\; \text{НОД}\left(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_l, \bar{k}_{N+1}\right) = 1\right); \tag{5}$$

$$\frac{\partial\langle F_1\rangle}{\partial\omega_1^{\mathrm{т}}}=0;\ \ \frac{\partial\langle F_1\rangle}{\partial\omega_2^{\mathrm{т}}}=0;\ \ \frac{\partial\langle F_1\rangle}{\partial a_2^{\mathrm{т}}}=0; \tag{6}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1\partial a_1^{\mathrm{т}}}\right)\neq 0; \tag{7}$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_2\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} \\ \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_2\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} \\ \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_1\partial a_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_2\partial a_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_2\partial a_2^{\mathrm{т}}} \end{pmatrix}\neq 0. \tag{8}$$

Характеристические показатели этих периодических решений будут двух типов (считаем, что уравнения, определяющие основные коэффициенты в разложениях характеристических показателей, имеют простые корни).

Первый тип характеристических показателей ($2l$ значений) раскладывается в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$:

$$\varepsilon_i=\varepsilon_i^{(0)}\sqrt{\mu}+\varepsilon_i^{(1)}\mu+\varepsilon_i^{(2)}\mu^{3/2}+\ldots,\ \ i=1,\ \ldots,\ l. \tag{9}$$

Второй тип характеристических показателей ($2(N-l)$ значений) раскладывается в ряды по степеням μ:

$$\eta_i=\eta_i^{(0)}\mu+\eta_i^{(1)}\mu^2+\eta_i^{(2)}\mu^3+\ldots,\ \ i=1,\ \ldots,\ N-l. \tag{10}$$

Основные коэффициенты в соответствующих разложениях находятся из выражений

$$\det\left\|\varepsilon^2\mathrm{E}_l+\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1\partial a_1^{\mathrm{т}}}\right)\left(\frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_1^{\mathrm{т}}}\right)\right\|=0; \tag{11}$$

$$\det\begin{Vmatrix} \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_2\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} \\ \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_2\partial\omega_2^{\mathrm{т}}}-\eta E_{N-l} \\ \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_1\partial a_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_2\partial a_2^{\mathrm{т}}}+\eta E_{N-l} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_2\partial a_2^{\mathrm{т}}} \end{Vmatrix}=0. \tag{12}$$

В выражениях (11), (12) и далее в тексте E_{N1} — единичная матрица соответствующего размера; $\langle F_1 \rangle$ — функция F_1, усредненная по периоду $T = 2\pi \bar{k}_{N+1} / \Omega$, вдоль семейства

$$I = I_0, \; J = J_0, \; \varphi = n^{(0)} t + \varphi_0, \; \psi = \psi_0, \tag{13}$$

где I_0, J_0, φ_0, ψ_0 – произвольные постоянные; $I_0, J_0 \in D$.

Тогда

$$\langle F_1 \rangle = \frac{1}{T} \int F_1 \left(I_0, J_0, n^{(0)} t + \varphi_0, \psi_0, \Omega t \right) dt;$$

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1^{\mathrm{T}}} \equiv \left. \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_0 \partial I_0^{\mathrm{T}}} \right|_{I_0 = a_1}; \quad \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_1^{\mathrm{T}}} = \left. \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial \varphi_0^{\mathrm{T}}} \right|_{\substack{I_0 = a_1, \quad J_0 = a_2, \\ \varphi_9 = \omega_1, \quad \psi_0 = \omega_2}}; \tag{14}$$

$$\frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_2^{\mathrm{T}}} = \left. \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial \psi_0^{\mathrm{T}}} \right|_{\substack{I_0 = a_1, \quad J_0 = a_2, \\ \varphi_9 = \omega_1, \quad \psi_0 = \omega_2}}; \quad \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial a_1^{\mathrm{T}}} = \left. \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial J_0^{\mathrm{T}}} \right|_{\substack{I_0 = a_1, \quad J_0 = a_2, \\ \varphi_9 = \omega_1, \quad \psi_0 = \omega_2}}.$$

Совокупность условий (5)–(8) определяет достаточное условие существования голоморфных по μ изолированных периодических решений системы (1)–(3), близких к порождающему решению (4).

При исследовании периодических решений в ряде прикладных задач возникает следующая особенность [5] для определенных соизмеримостей невозмущенных значений частот (5), функция $\langle F_1 \rangle$ не зависит от порождающих значений угловых переменных φ, ψ и медленных позиционных переменных J, или зависит лишь от части этих переменных, т. е.

$$\langle F_1 \rangle = f\left(I_0\right), \tag{15}$$

или

$$\langle F_1 \rangle = f\left(I_0, \overset{*}{J}_0, \overset{*}{\varphi}_0, \overset{*}{\psi}_0 \right). \tag{16}$$

В выражениях (15), (16)

$$\overset{*}{J}_0 = \left(p_{l+1}^{(0)}, \ldots, p_{l+S_1}^{(0)} \right)^{\mathrm{T}}, \; \overset{*}{\varphi}_0 = \left(q_1^{(0)}, \ldots, q_{S_2}^{(0)} \right)^{\mathrm{T}}, \; \overset{*}{\psi}_0 = \left(q_{l+1}^{(0)}, \ldots, q_{S_3}^{(0)} \right)^{\mathrm{T}},$$

$$\overset{**}{J}_0 = \left(p_{l+S_1+1}^{(0)}, \ldots, p_N^{(0)} \right)^{\mathrm{T}}, \; \overset{**}{\varphi}_0 = \left(q_{S_2+1}^{(0)}, \ldots, q_l^{(0)} \right)^{\mathrm{T}}, \; \overset{**}{\psi}_0 = \left(q_{S_3+1}^{(0)}, \ldots, q_N^{(0)} \right)^{\mathrm{T}},$$

$$J_0^{\mathrm{T}} = \left(\overset{*}{J}{}_0^{\mathrm{T}}, \; \overset{**}{J}{}_0^{\mathrm{T}} \right), \; \varphi_0^{\mathrm{T}} = \left(\overset{*}{\varphi}{}_0^{\mathrm{T}}, \; \overset{**}{\varphi}{}_0^{\mathrm{T}} \right), \; \psi_0^{\mathrm{T}} = \left(\overset{*}{\psi}{}_0^{\mathrm{T}}, \; \overset{**}{\psi}{}_0^{\mathrm{T}} \right). \tag{17}$$

Условия (8) в выражениях (15) и (16) заведомо нарушаются. В работах [3, 4] для этих случаев найдены новые достаточные условия существования периодических решений, изучена структура разложения характеристических показателей в ряды по целым и дробным степеням малого параметра μ и получены алгебраические формулы для нахождения основных коэффициентов в разложениях соответствующих характеристических показателей. Сформулируем эти результаты в виде соответствующих теорем.

Теорема 2. Дифференциальные уравнения (1)–(3) допускают при малых $\mu \neq 0$ периодические решения, близкие к порождающему решению (4), если параметры $a_1,\ a_2,\ \omega_1,\ \omega_2$ порождающего решения будут удовлетворять условиям (5) и (7), а также следующим условиям:

$$\left\langle \Phi_I \right\rangle + \frac{\partial \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_1^{\mathrm{T}}} = 0;\ \left\langle \Phi_J \right\rangle + \frac{\partial \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_2^{\mathrm{T}}} = 0;\ \left\langle \Phi_\psi \right\rangle + \frac{\partial \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial a_2^{\mathrm{T}}} = 0; \tag{18}$$

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\left\langle \Phi_I \right\rangle}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_1^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial\left\langle \Phi_I \right\rangle}{\partial \omega_2} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_2 \partial \omega_1^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial\left\langle \Phi_I \right\rangle}{\partial a_2} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial a_2 \partial \omega_1^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial\left\langle \Phi_J \right\rangle}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_2^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial\left\langle \Phi_J \right\rangle}{\partial \omega_2} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_2 \partial \omega_2^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial\left\langle \Phi_J \right\rangle}{\partial a_2} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial a_2 \partial \omega_2^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial\left\langle \Phi_\psi \right\rangle}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_1 \partial a_2^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial\left\langle \Phi_\psi \right\rangle}{\partial \omega_2} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_2 \partial a_2^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial\left\langle \Phi_\psi \right\rangle}{\partial a_2} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial a_2 \partial a_2^{\mathrm{T}}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{19}$$

Характеристические показатели исследуемых периодических решений будут раскладываться в ряды по целым степеням малого параметра μ (считаем, что уравнения, определяющие основные коэффициенты в разложениях характеристических показателей имеют простые корни) и образуют два типа показателей. Для первого типа характеристических показателей ν_i $(i = 1, ..., 2l)$ разложения в ряд начинаются с членов первого порядка, а для второго типа характеристических показателей σ_i $(i = 1, ..., 2(N - l))$ — с членов второго порядка, т. е.

$$\nu_i = \nu_i^{(0)}\mu + \nu_i^{(1)}\mu^2 + \nu_i^{(2)}\mu^3 ... ; \tag{20}$$

$$\sigma_i = \sigma_i^{(0)}\mu^2 + \sigma_i^{(1)}\mu^3 + \sigma_i^{(2)}\mu^4 ... . \tag{21}$$

Основные коэффициенты в соответствующих разложениях находят из уравнений

$$\det\left\|\nu^2 E_l + \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1^{\mathrm{T}}}\right)\left(\frac{\partial\left\langle \Phi_I \right\rangle}{\partial \omega_1} + \frac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_1^{\mathrm{T}}}\right)\right\| = 0; \tag{22}$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\langle\Phi_I\rangle}{\partial\omega_1}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_1^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_I\rangle}{\partial\omega_2}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_1^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_I\rangle}{\partial a_2}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_2\partial\omega_1^{\mathrm{T}}} \\ \frac{\partial\langle\Phi_J\rangle}{\partial\omega_1}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_2^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_J\rangle}{\partial\omega_2}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_2^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_J\rangle}{\partial a_2}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_2\partial\omega_2^{\mathrm{T}}}-\sigma E_{N-l} \\ \frac{\partial\langle\Phi_\psi\rangle}{\partial\omega_1}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_1\partial a_2^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_\psi\rangle}{\partial\omega_2}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_2\partial a_2^{\mathrm{T}}}+\sigma E_{N-l} & \frac{\partial\langle\Phi_\psi\rangle}{\partial a_2}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_2\partial a_2^{\mathrm{T}}} \end{pmatrix} = \\ = 0. \tag{23}$$

Для краткости записи введем следующие обозначения:

$$\Phi_I = \left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\varphi_0^{\mathrm{T}}}\int\tilde{\tilde{W}}dt\right)\Bigg|_{\substack{I_0=a_1,\quad J_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}}; \quad \Phi_J = \left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\psi_0^{\mathrm{T}}}\int\tilde{\tilde{W}}dt\right)\Bigg|_{\substack{I_0=a_1,\quad J_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}};$$

$$\Phi_\psi = \left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial J_0^{\mathrm{T}}}\int\tilde{\tilde{W}}dt\right)\Bigg|_{\substack{I_0=a_1,\quad J_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}}; \quad \tilde{V} = \left(\frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial I_0},\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial J_0},\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\psi_0},\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\varphi_0}\right);$$

$$\tilde{W} = \left(\frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\varphi_0^{\mathrm{T}}},\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\psi_0^{\mathrm{T}}},\ -\frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial J_0^{\mathrm{T}}},\ -\frac{\partial^2 F_0}{\partial I_0\partial I_0^{\mathrm{T}}}\int\frac{\partial\tilde{\tilde{F}}_1}{\partial\varphi_0^{\mathrm{T}}}dt\ -\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial I_0^{\mathrm{T}}}\right). \tag{24}$$

Для периодических функций $f = f\left(I_0,\ J_0,\ n^{(0)}t+\varphi_0,\ \psi_0,\ t\right)$ используем представление $f = \left\langle f\right\rangle + \tilde{f}$, где $\left\langle f \right\rangle$ — постоянная составляющая периодической функции f (см. (14)), а $\tilde{f}$ — ее чисто периодическая часть, $\int\limits_0^T \tilde{f}\ dt = 0.$

Для выражения (16) сформулируем достаточное условие существования периодических решений и соответствующие результаты по устойчивости этих решений в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть порождающее семейство периодических решений таково, что для усредненной по периоду вдоль этого семейства функции F_1 выполняется условие (16). Тогда система (1)–(3) будет допускать изолированное, голоморфное по μ, периодическое, с периодом T решение, обращающее при $\mu = 0$ в порождающее решение (4), если параметры a_1, a_2, ω_1, ω_2 порождающего решения будут удовлетворять условиям (5) и (7), а также следующим условиям:

$$\frac{\partial\langle F_1\rangle}{\partial\omega_{11}^{\mathrm{T}}}=0;\ \frac{\partial\langle F_1\rangle}{\partial\omega_{21}^{\mathrm{T}}}=0;\ \frac{\partial\langle F_1\rangle}{\partial a_{21}^{\mathrm{T}}}=0; \tag{25}$$

$$\langle\Phi_{I2}\rangle+\frac{\partial\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{12}^{\mathrm{T}}}=0;\ \langle\Phi_{J2}\rangle+\frac{\partial\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{22}^{\mathrm{T}}}=0;\ \langle\Phi_{\psi 2}\rangle+\frac{\partial\langle F_2\rangle}{\partial a_{22}^{\mathrm{T}}}=0; \tag{26}$$

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_{11}\partial\omega_{11}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_{21}\partial\omega_{11}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_{21}\partial\omega_{11}^{\mathrm{T}}}\\ \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_{11}\partial\omega_{21}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_{21}\partial\omega_{21}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_{21}\partial\omega_{21}^{\mathrm{T}}}\\ \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_{11}\partial a_{21}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial\omega_{21}\partial a_{21}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial^2\langle F_1\rangle}{\partial a_{21}\partial a_{21}^{\mathrm{T}}}\end{pmatrix}\neq 0; \tag{27}$$

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\langle\Phi_{I2}\rangle}{\partial\omega_{12}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{12}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{I2}\rangle}{\partial\omega_{22}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial\omega_{12}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{I2}\rangle}{\partial a_{22}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_{22}\partial\omega_{12}^{\mathrm{T}}}\\ \frac{\partial\langle\Phi_{J2}\rangle}{\partial\omega_{12}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{22}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{J2}\rangle}{\partial\omega_{22}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial\omega_{22}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{J2}\rangle}{\partial a_{22}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_{22}\partial\omega_{22}^{\mathrm{T}}}\\ \frac{\partial\langle\Phi_{\psi 2}\rangle}{\partial\omega_{12}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial a_{22}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{\psi 2}\rangle}{\partial\omega_{22}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial a_{22}^{\mathrm{T}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{\psi 2}\rangle}{\partial a_{22}}+\frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_{22}\partial a_{22}^{\mathrm{T}}}\end{pmatrix}\neq 0. \tag{28}$$

Характеристические показатели периодических решений, определяемых условиями существования (5), (7), (25)–(28), образуют (при $S_1=S_3$) четыре группы: $2S_2$ характеристических показателя (первая группа) раскладываются в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, а остальные (три группы) — по целым степеням малого параметра μ, причем разложения показателей четвертой группы начинаются с членов порядка μ^2, а именно:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon^{(0)}\sqrt{\mu}+\varepsilon^{(1)}\mu+\varepsilon^{(2)}\mu\sqrt{\mu}+\ldots \tag{29}$$

$2S_2$ значений,

$$\boldsymbol{\eta}=\eta^{(0)}\mu+\eta^{(1)}\mu^2+\eta^{(2)}\mu^3+\ldots \tag{30}$$

$2S_1$ значений,

$$\boldsymbol{\nu}=\nu^{(0)}\mu+\nu^{(1)}\mu^2+\nu^{(2)}\mu^3+\ldots \tag{31}$$

$2(l - S_2)$ значений,

$$\sigma = \sigma^{(0)}\mu^2 + \sigma^{(1)}\mu^3 + \sigma^{(2)}\mu^4 + \ldots \tag{32}$$

$2(N - l - S_2)$ значений.

В формулах (29)–(32) $\varepsilon, \eta, \nu, \sigma$ — векторы-столбцы соответствующей размерности, например $\varepsilon^{\mathrm{т}} = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{2S_2}\right)$, S_1, S_2, S_3 — размерности переменных J, φ, ψ, входящих в $\langle F_1 \rangle$ $\left(S_1 = S_3\right)$, а коэффициенты $\varepsilon^{(0)}$, $\eta^{(0)}$, $\nu^{(0)}$, $\sigma^{(0)}$ являются решениями следующих алгебраических уравнений:

$$\det \left\| \varepsilon^2 E_{S_2} + \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1' \partial a_1'^{\mathrm{т}}} \right) \left(\frac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{11} \partial \omega_{11}^{\mathrm{т}}} \right) \right\| = 0; \tag{33}$$

$$\det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{11} \partial \omega_{11}^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{21} \partial \omega_{11}^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial a_{21} \partial \omega_{11}^{\mathrm{т}}} \\ \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{11} \partial \omega_{21}^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{21} \partial \omega_{21}^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial a_{21} \partial \omega_{21}^{\mathrm{т}}} - \eta E_{S_1} \\ \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{11} \partial a_{21}^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{21} \partial a_{21}^{\mathrm{т}}} + \eta E_{S_1} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial a_{21} \partial a_{21}^{\mathrm{т}}} \end{Vmatrix} = 0; \tag{34}$$

$$\det \begin{Vmatrix} 0 \quad -\nu E_{l-S_2} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{I2} \rangle}{\partial \omega_{12}} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_{12} \partial \omega_{12}^{\mathrm{т}}} \\ \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1^{\mathrm{т}}} & \begin{matrix} 0 \\ \nu E_{l-S_2} \end{matrix} \end{Vmatrix} = 0; \tag{35}$$

$$\det \begin{Vmatrix} A_{11} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{I}2} \rangle}{\partial \omega_{22}} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_{22} \partial \omega_{12}^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{I}2} \rangle}{\partial a_{22}} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial a_{22} \partial \omega_{12}^{\mathrm{т}}} \\ A_{21} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{J}2} \rangle}{\partial \omega_{22}} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_{22} \partial \omega_{22}^{\mathrm{т}}} & A_{23} - \sigma \mathrm{E}_{N-l-S_1} \\ A_{31} & A_{32} + \sigma \mathrm{E}_{N-l-S_1} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\psi 2} \rangle}{\partial a_{22}} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial a_{22} \partial a_{22}^{\mathrm{т}}} \end{Vmatrix} = 0; \tag{36}$$

$$A_{11}=\frac{\partial\left\langle\Phi_{I2}\right\rangle}{\partial\omega_{12}}+\frac{\partial^2\left\langle F_2\right\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{12}^{\text{т}}};\quad A_{21}=\frac{\partial\left\langle\Phi_{J2}\right\rangle}{\partial\omega_{12}}+\frac{\partial^2\left\langle F_2\right\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{22}^{\text{т}}};$$

$$A_{31}=\frac{\partial\left\langle\Phi_{\psi2}\right\rangle}{\partial\omega_{12}}+\frac{\partial^2\left\langle F_2\right\rangle}{\partial\omega_{12}\partial a_{22}^{\text{т}}};\quad A_{32}=\frac{\partial\left\langle\Phi_{\psi2}\right\rangle}{\partial\omega_{22}}+\frac{\partial^2\left\langle F_2\right\rangle}{\partial\omega_{22}\partial a_{22}^{\text{т}}};\qquad(37)$$

$$A_{23}=\frac{\partial\left\langle\Phi_{J2}\right\rangle}{\partial a_{22}}+\frac{\partial^2\left\langle F_2\right\rangle}{\partial a_{22}\partial\omega_{22}^{\text{т}}}.$$

Здесь введены обозначения, аналогичные обозначениям (24), а именно:

$$\Phi_{I2}=\left.\left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\overset{**\text{т}}{\varphi_0}}\int\tilde{\tilde{W}}dt\right)\right|_{\substack{I_0=a_1,\quad J_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}};\quad \Phi_{J2}=\left.\left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\overset{**\text{т}}{\psi_0}}\int\tilde{\tilde{W}}dt\right)\right|_{\substack{I_0=a_1,\quad J_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}};$$

$$\Phi_{\psi2}=\left.\left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\overset{**\text{т}}{J_0}}\int\tilde{\tilde{W}}dt\right)\right|_{\substack{I_0=a_1,\quad J_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}}.\qquad(38)$$

В формулах (25)–(33) a_{21}, a_{22}, ω_{11}, ω_{12}, ω_{21}, ω_{22} — порождающие значения групп переменных $\overset{*}{J}$, $\overset{**}{J}$, $\overset{*}{\varphi}$, $\overset{**}{\varphi}$, $\overset{*}{\psi}$, $\overset{**}{\psi}$ соответственно, в формуле (29) a_1' — порождающие значения канонических переменных, сопряженных переменным $\overset{*}{\varphi}$. Отметим, что случай кратных корней уравнений (33)–(36) исключен при рассмотрении структуры разложения характеристических показателей.

Как известно [1–3, 5, 6], устойчивость периодических решений системы (1) с гамильтонианом (2) существует лишь по первому приближению. Поскольку характеристическое уравнение возвратное, то можно найти лишь неустойчивые периодические решения, а вопрос об устойчивости остается, вообще говоря, открытым. Можно дать лишь необходимые условия устойчивости: характеристические показатели не должны иметь действительную часть, т. е. характеристические показатели должны быть чисто мнимыми.

Тогда из формул (29)–(32) (а также (9), (10) и (20), (21)) получаем необходимые условия устойчивости исследуемых периодических решений:

$$\mu\left(\varepsilon_i^{(0)}\right)^2<0;\qquad(39)$$

$$\left(\eta_i^{(0)}\right)^2 < 0; \tag{40}$$

$$\left(\nu_i^{(0)}\right)^2 < 0; \tag{41}$$

$$\left(\sigma_i^{(0)}\right)^2 < 0. \tag{42}$$

Отметим, что в (40)–(42) устойчивость (по первому приближению) не зависит от знака малого параметра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пуанкаре А. *Избранные труды. Т. 1.* Москва, Наука, 1971, 574 с.

[2] Козлов В.В. *Методы качественного анализа в динамике твердого тела.* Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 1984, 324 с.

[3] Баркин Ю.В., Панкратов А.А. О характеристических показателях периодических решений гамильтоновых систем. *Известия АН СССР. МТТ*, 1987, № 2, с. 25–33.

[4] Баркин Ю.В., Панкратов А.А. Периодические решения гамильтоновых систем в некоторых случаях вырождения. Т. 51. *ПММ*, 1987, вып. 2, с. 29–41.

[5] Панкратов А.А. Периодические и условно-периодические движения спутника-гиростата под действием гравитационного момента на круговой орбите. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, № 7. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/295.html

[6] Якубович В.А., Старжинский В.М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения*. Москва, Наука, 1972, 719 с.

Статья поступила в редакцию 29.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Панкратов А.А. Характеристические показатели периодических решений гамильтоновых систем и необходимые условия устойчивости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12.

URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/hidden/1350.html

Панкратов Александр Алексеевич родился в 1952 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 работ в области динамики твердого тела, аналитической механики и прикладной небесной механики. e-mail: a.a.pankratov@gmail.com

Characteristic exponents of periodic solutions of Hamiltonian systems and the necessary conditions of stability

© A.A. Pankratov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers Hamiltonian system with a small parameter (the main task of the dynamics in the terminology of Poincare). The structure of the decomposition of the characteristic exponents of periodic solutions in series in integer and fractional powers of the small parameter was investigated. The main members in these decompositions are obtained, necessary stability conditions of periodic decisions were found.

Keywords: *Hamiltonian system, the Poincare method, periodic and quasi-periodic motions, characteristic exponents, stability.*

REFERENCES

[1] Poincare H. *Les methodes nouvelles de la mécanique céleste*. In 3 vols. Vol. 1. Paris, 1892–97.

[2] Kozlov V.V. *Metody kachestvennogo analiza v dinamike tverdogo tela* [Methods of qualitative analysis in the dynamics of a rigid body]. Moscow, MSU Publ., 1984, 324 p.

[3] Barkin Yu.V., Pankratov A.A. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela — Mechanics of Solids*, 1987, no. 2, pp. 25–33.

[4] Barkin Yu.V., Pankratov A.A. Prikladnaya Matematika i Mekhanika — *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 1987, vol. 51, issue. 2, pp. 29–41.

[5] Pankratov A.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2012, issue 7. Available at: http://engjournal.ru/articles/295/295.pdf

[6] Yakubovich V.A., Starzhinsky V.M. *Lineinye differentsialnye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear differential equations with periodic coefficients and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 719 p.

Pankratov A.A. (b. 1952) graduated from the mechanics and mathematics faculty of Lomonosov Moscow State University in 1974. Ph.D., assoc. professor of the Department of Theoretical Mechanics at Bauman Moscow State Technical University. The author of more than 60 works in the dynamics of solid body, of analytical mechanics and applied celestial mechanics. e-mail: a.a.pankratov@gmail.com