УДК 517.538.5+517.542

К. Ю. Федоровский

ОБЛАСТИ И КОМПАКТЫ КАРАТЕОДОРИ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Изучены понятия областей и компактов Каратеодори, естественно возникающие в различных задачах теории приближений.

E-mail: afky@yandex.ru

Ключевые слова: *область Каратеодори, компакт Каратеодори, равномерная аппроксимация.*

В настоящей работе изучаются понятия областей и компактов Каратеодори, естественно возникающие во многих задачах теории приближений. Для обозначения этих объектов мы будем использовать общий термин *множества Каратеодори*. Множества Каратеодори уже более 100 лет активно изучаются и используются в комплексном анализе и теории приближений. Однако ряд интересных и важных свойств таких множеств был установлен сравнительно недавно (см., в частности, теоремы 1 и 2). Еще один результат (теорема 3) анонсируется и обсуждается в настоящей работе.

Всюду в дальнейшем будут использоваться следующие обозначения. Если E — произвольное множество в $\mathbb{C}$, то $\overline{E}$ — его замыкание, ∂E — его граница, а E° — совокупность всех внутренних точек множества E. Если f — определенная на E комплекснозначная функция, то $\|f\|_E = \sup_{z\in E}|f(z)|$, причем, при $E = \mathbb{C}$ индекс E опускается. Скажем, что ограниченное множество $E \subset \mathbb{C}$ не разделяет плоскость, если множество $\mathbb{C}\setminus E$ связно. Обозначим символом $\mathbb{D}$ единичный круг $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, а символом $\mathbb{T}$ — единичную окружность.

Множества Каратеодори: определения и простые примеры. Пусть X — компактное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $\widehat{X}$ — это *объединение* X *и всех ограниченных* (*связных*) *компонент множества* $\mathbb{C} \setminus X$. В случае, когда U — ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$ положим $\widehat{U} := \widehat{\overline{U}}$, а $U^* := \widehat{U}^{\circ}$. Кроме того, для ограниченной области Ω в $\mathbb{C}$ обозначим через Ω_∞ *неограниченную* (*связную*) *компоненту* множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$.

Так как $\widehat{X} = \{z \in \mathbb{C} : \ |p(z)| \leq \|p\|_X$ для любого многочлена p комплексного переменного$\}$, то множество $\widehat{X}$ часто называют *полиномиально выпуклой оболочкой* компакта X. Легко видеть, что свойство $X = \widehat{X}$ (которое естественно назвать свойством *полиномиальной выпуклости* компакта X) эквивалентно тому, что множество $\mathbb{C}\setminus X$ связно.

Определение. Ограниченная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *областью Каратеодори*, если $\partial\Omega = \partial\Omega_\infty$. Компакт $X \subset \mathbb{C}$ называется *компактом Каратеодори*, если $\partial X = \partial\widehat{X}$.

Замечание 1. В 1912–1913 гг. К. Каратеодори опубликовал серию из трех фундаментальных работ [1–3] о свойствах конформных отображений. В этих работах, в частности, доказаны классические теоремы Каратеодори о сходимости к ядру и о продолжении (см. ниже). В последней из этих работ и возникло (сформулированное в несколько иных терминах) понятие области Каратеодори. В приведенном виде определение областей Каратеодори можно найти, например, в [4, гл. 5, раздел 4.8] или в [5, гл. 2, §8]. Понятие компакта Каратеодори можно найти в [6, гл. 1, §3] или в [8] (где для таких компактов использован термин *сбалансированное компактное множество*).

Ясно, что областью Каратеодори будет, в частности, любая жорданова область, а область $\mathbb{D} \setminus [0, 1)$ не является областью Каратеодори.

Несколько более интересный пример области Каратеодори можно получить рассмотрев так называемый *рог изобилия*, т.е. область G, ограниченную двумя спиралями $z = (1 + e^{-\theta})e^{i\theta}$ и $z = (1 + 2e^{-\theta})e^{i\theta}$, $\theta \in [0, +\infty)$, а также отрезком $[2, 3]$ вещественной оси. При этом $G^* = G \cup \mathbb{D}$, а множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ состоит из двух компонент — из единичного круга $\mathbb{D}$ и из области G_∞.

Непосредственно из определения области Каратеодори вытекает, что если Ω — область Каратеодори, то Ω — односвязная область и $\Omega = (\overline{\Omega})^\circ$.

Нетрудно также проверить, что односвязная область Ω такая, что ее замыкание $\overline{\Omega}$ не разделяет плоскость, является областью Каратеодори в том и только том случае, когда $\Omega = (\overline{\Omega})^\circ$.

В работе [8] доказано следующее свойство областей Каратеодори: если Ω — область Каратеодори, $\overline{\Omega}$ не разделяет плоскость, а $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ — непрерывное инъективное отображение, то $f(\Omega)$ — область Каратеодори, а множество $\overline{f(\Omega)}$ не разделяет плоскость. При этом условие связности множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ нельзя отбросить, так как образ рога изобилия G при отображении $z \mapsto 1/z$ (так называемая "внутренняя змейка") очевидно не является областью Каратеодори.

Множества Каратеодори в теории приближений. Обозначим через $Hol(U)$ и $Harm(U)$ — пространства всех голоморфных и гармонических на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ функций, а через $H^\infty(U)$ — пространство всех голоморфных ограниченных на U функций. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_\Delta$ — пространства всех многочленов комплексного переменного и всех гармонических многочленов соответственно, а $\mathcal{R}$ — пространство всех рациональных функций комплексного переменного. Если X — компакт в $\mathbb{C}$, то $\mathcal{R}(X) = \{g \in \mathcal{R} :$ все полюса g расположены вне $X\}$.

Через $C(X)$ обозначим пространство всех непрерывных на компакте $X \subset \mathbb{C}$ комплекснозначных функций с равномерной нормой и определим пространства $P(X)$, $R(X)$ и $P_\Delta(X)$ как $C(X)$-замыкания подпространств $\{p_{|X} : p \in \mathcal{P}\}$, $\{g_{|X} : g \in \mathcal{R}(X)\}$ и $\{p_{|X} : p \in \mathcal{P}_\Delta\}$ соответственно, таким образом, $P(X)$, $R(X)$ и $P_\Delta(X)$ — это в точности пространства функций, допускающих равномерную аппроксимацию на X многочленами комплексного переменного, рациональными функциями с полюсами вне X и гармоническими многочленами соответственно. Легко видеть, что $P(X) \subset R(X) \subset A(X) := C(X) \cap Hol(X^\circ)$ и $P_\Delta(X) \subset A_\Delta(X) := C(X) \cap Harm(X^\circ)$.

Приведем формулировки ряда классических и недавних результатов теории приближений, в которых естественно возникают понятия полиномиально выпуклой оболочки и множеств Каратеодори.

1. Теорема С. Н. Мергеляна [8] утверждает, что $P(X) = A(X)$ если и только если $X = \widehat{X}$ (т.е. множество $\mathbb{C} \setminus X$ связно).

2. Пусть $p \geq 1$, а X — компакт в $\mathbb{C}$. Положим

$$L_a^p(X) = \left\{ f : \iint\limits_X |f(z)|^p \, dxdy < \infty, \; f \in Hol(X^\circ) \right\}.$$

В работе С. О. Синаняна [9] установлено, что если X — компакт Каратеодори, то многочлены комплексного переменного плотны в $L_a^p(X)$.

3. Пусть U — ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$, а f — произвольная функция класса $H^\infty(U)$. В силу [10, гл. 6, теорема 5.1], последовательность $(p_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}$, для которой $\sup_n \|p_n\|_U < \infty$ и $p_n(z) \to f(z)$ для всех $z \in U$ существует в том и только том случае, когда функция f продолжается до функции класса $H^\infty(U^*)$. Этот результат был доказан О. Дж. Фаррелом [11] в случае, когда множество U^* связно, и Л. А. Рубелем и А. Л. Шилдсом [12] в общем случае.

4. Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Напомним, что каждая функция $g \in C(\partial\widehat{X})$ может быть единственным образом продолжена до функции $\widetilde{g}$, гармонической на $\widehat{X}^\circ$. В самом деле, каждая компонента внутренности $\widehat{X}^\circ$ компакта $\widehat{X}$ односвязна, а всякая ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ регулярна относительно задачи Дирихле (для гармонических функций). Остается заметить, что непрерывность функции $\widetilde{g}$ на $\widehat{X}$ вытекает, например, из [13, лемма 3.2].

Имеет место критерий Дж. Уолша–А. Лебега равномерной приближаемости функций гармоническими многочленами на плоских компактах [14] и [10, гл. 2, теорема 3.3]), который мы приведем в том виде, в котором он сформулирован в [13, раздел 1]:

а) функция $f \in C(X)$ принадлежит пространству $P_\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда $\left(f_{|\partial\widehat{X}}\right)^\sim = f$ на X;

б) равенство $P_\Delta(X) = A_\Delta(X)$ если и только если X является компактом Каратеодори.

5. Пусть L — произвольный сильно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами. Как показано А. Б. Зайцевым [15, следствие 2], если X — компакт Каратеодори, то для всякой функции $f \in C(X)$, удовлетворяющей уравнению $Lf = 0$ на X°, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой (комплекснозначный) многочлен p (от двух вещественных переменных), что $Lp \equiv 0$, а $\|f - p\|_X < \varepsilon$.

Таким образом, условие, возникающее в теореме Уолша–Лебега оказывается достаточным и в случае приближения функций полиномиальными решениями общих сильно эллиптических уравнений второго порядка. Необходимость этого условия в рассматриваемом случае не доказана, это составляет известную открытую проблему [16, §4]).

Области Каратеодори и конформные отображения. Для областей Каратеодори рассмотрим следующий вопрос. Пусть Ω — ограниченная односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, пусть φ — некоторое фиксированное конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на Ω, а ψ — соответствующее обратное отображение; что можно утверждать о возможности продолжения функции φ в $\overline{\mathbb{D}}$ и, соответственно, о возможности продолжения функции ψ в $\overline{\Omega}$? Здесь и далее продолжение функции φ в $\overline{\mathbb{D}}$ мы будем обозначать (если оно существует) тем же символом φ, а продолжение функции ψ в $\overline{\Omega}$ (также в случае, когда оно существует) — символом ψ.

Классическая теорема Каратеодори дает ответ на оба поставленных вопроса в случае, когда Ω — жорданова область. Согласно этой теореме φ продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\Omega}$ если и только если Ω — жорданова область. Если же нас будет интересовать только вопрос о возможности непрерывного (не обязательно гомеоморфного) продолжения, то ответ также хорошо известен: φ непрерывно продолжается в $\overline{\mathbb{D}}$ если и только если множество $\partial\Omega$ является локально связным.

В общем случае, в силу теоремы Каратеодори о простых концах, φ продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на объединение Ω и множества простых концов Ω, однако это объединение может существенно отличаться от $\overline{\Omega}$ в любом разумном геометрическом и/или топологическом смысле.

Из классической теоремы Фату вытекает, что для почти всех точек $\xi \in \mathbb{T}$ функция φ имеет конечные угловые предельные значения $\varphi(\xi)$. Множество всех точек $\xi \in \mathbb{T}$, для которых $\varphi(\xi)$ существуют, обозначим символом $\mathcal{F}(\varphi)$. Это множество называется *множеством Фату* функции φ. Известно, что множество $\mathcal{F}(\varphi)$ — это борелевское множество ([17, предложение 6.5]).

Определим множество

$$\partial_a\Omega := \{\varphi(\xi) : \ \xi \in \mathcal{F}(\varphi)\}.$$

Из [17, предложения 2.14 и 2.17] вытекает, что множество $\partial_a\Omega$ состоит из всех тех точек границы $\partial\Omega$ области Ω, которые являются достижимыми из Ω посредством некоторой кривой. Следовательно, $\partial_a\Omega$ зависит от Ω, но не от выбора конкретного конформного отображения φ. Можно также показать ([18, раздел 2]), что множество $\partial_a\Omega$ является борелевским.

Определение. Множество $\partial_a\Omega$ называется *достижимой частью* границы области Ω. Область Ω называется *областью с достижимой границей*, если $\partial\Omega = \partial_a\Omega$.

Пусть Ω — область Каратеодори в $\mathbb{C}$. Нам потребуется следующая дополнительная конструкция. Предположим, что φ выбрано так, чтобы $\varphi(0) = z_0 \in \Omega$, а $\varphi'(0) > 0$. Рассмотрим последовательность $\big(\Gamma_m\big)_{m=1}^{\infty}$ спрямляемых контуров таких, что $\Omega \subset D(\Gamma_m) \subset D(\Gamma_{m-1})$ и Γ_m стремится к $\partial\Omega$ при $m \to \infty$. Для построения такой последовательности рассмотрим конформное отображение h круга $\mathbb{D}$ на Ω_∞ с условием $h(0) = \infty$ и положим $\Gamma_m := h\big(\{t : \ |t| = 1 - (m+1)^{-1}\}\big)$. Пусть $\big(\varphi_m\big)_{m=1}^{\infty}$ — последовательность конформных отображений круга $\mathbb{D}$ на $D(\Gamma_m)$, нормированных условием $\varphi_m(0) = z_0$ и $\varphi_m'(0) > 0$. Так как области $D(\Gamma_m)$ — жордановы, то все функции φ_m продолжаются до соответствующих гомеоморфизмов $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{D(\Gamma_m)}$.

В силу теоремы Каратеодори о сходимости к ядру последовательность (φ_m) локально равномерно в $\mathbb{D}$ сходится к φ, а соответствующая последовательность (φ_m^{-1}) обратных отображений локально равномерно в Ω сходится к $\psi = \varphi^{-1}$ (под локально равномерной сходимостью в области G понимается равномерная сходимость на компактных подмножествах G). Имеет место следующий результат ([18, предложение 1, теорема 1]):

Теорема 1. *Пусть Ω — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, а функции φ, ψ и последовательности $\big(\Gamma_m\big)_{m=1}^{\infty}$ и $\big(\varphi_m\big)_{m=1}^{\infty}$ такие, как указано выше.*

1. *Для любой точки $\zeta \in \partial_a\Omega$ существует единственная точка $\xi(\zeta) \in F(\varphi) \subset \mathbb{T}$ такая, что $\zeta = \varphi(\xi)$.*
   При $\zeta \in \partial_a\Omega$ обозначим $\psi(\zeta) = \varphi^{-1}(\zeta) := \xi(\zeta)$.
2. *$\varphi_m^{-1}(\zeta) \to \varphi^{-1}(\zeta)$, $m \to \infty$, для любой точки $\zeta \in \partial_a\Omega$.*
3. *$|\varphi_m^{-1}(z)| \to 1$, $m \to \infty$, равномерно при $z \in \overline{G}$, для любой ограниченной связной компоненты G множества $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$.*

Таким образом, теорема 1 уточняет классическую теорему Каратеодори о сходимости к ядру в случае, когда предельная область является областью Каратеодори.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение, которое может рассматриваться как обобщение теоремы Каратеодори о продолжении.

Следствие 1. *Пусть Ω — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, а функции φ, ψ и последовательности $\big(\Gamma_m\big)_{m=1}^{\infty}$ и $\big(\varphi_m\big)_{m=1}^{\infty}$ такие, как указано выше.*

1. *Функции φ и ψ продолжаются до борелевских функций (обозначаемых также символами φ и ψ) на $\mathbb{D} \cup F(\varphi)$ и на $\Omega \cup \partial_a\Omega$ соответственно, причем $\psi(\varphi(\xi)) = \xi$ и $\varphi(\psi(\zeta)) = \zeta$ для любых $\xi \in F(\varphi)$ и $\zeta \in \partial_a\Omega$ соответственно.*
2. *Если Ω — область Каратеодори с достижимой границей, то функция φ^{-1} принадлежит к первому классу Бэра в $\overline{\Omega}$.*

В связи с последним утверждением заметим, что существуют области Каратеодори с достижимой границей, не являющиеся жордановыми областями. Такой областью будет, например,

$$\mathbb{D} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ z: \ (2n+1)^{-1} \leq \operatorname{Re} z \leq (2n)^{-1}, \ \operatorname{Im} z \geq 0 \Big\}.$$

Интересно отметить, что любая область Каратеодори с достижимой границей обладает тем свойством, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ является связным ([18, следствие 2]).

О мерах, ортогональных к рациональным функциям. В дальнейшем под мерой понимается конечная комплекснозначная борелевская мера в $\mathbb{C}$; мера μ называется *ортогональной* к некоторому классу функций $\mathfrak{F}$, если она ортогональна всем функциям этого класса, т.е. если $\int f(z)\, d\mu(z) = 0$ для любой функции $f \in \mathfrak{F}$. Соответствующий факт записывается как $\mu \perp \mathfrak{F}$.

Кроме того, под контуром понимается замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$ (не обязательно спрямляемая). Если Γ — контур, то $D(\Gamma)$ — область, им ограниченная.

Пусть, как и раньше, Ω — область Каратеодори в $\mathbb{C}$, пусть φ — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω такое, что $\varphi(0) = z_0 \in \Omega$, а ψ — соответствующее обратное отображение. Будем считать, что φ и ψ продолжены по теореме 1 до борелевских функций на $\mathbb{D} \cup \mathcal{F}(\varphi)$ и $\Omega \cup \partial_a\Omega$.

Пусть $v \in L^1(\mathbb{T})$ (пространство Лебега $L^1(\mathbb{T})$ рассматривается относительно нормированной меры Лебега $|d\xi|/2\pi$ на $\mathbb{T}$). Обозначим через $v\, d\xi$ меру на $\mathbb{T}$, действующую (как функционал на пространстве $C(\mathbb{T})$) по формуле $v\, d\xi(f) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi) v(\xi)\, d\xi$. Для меры $\nu := v\, d\xi$ определим меру $\varphi(\nu)$ на $\partial\Omega$ следующим образом: $\varphi(\nu)(E) := \nu(\psi(E \cap \partial_a\Omega))$ для любого борелевского множества $E \subset \partial\Omega$. Отметим, что для любой функции $g \in C(\partial\Omega)$ имеют место равенства

$$\int g(\zeta)\, d\varphi(\nu)(\zeta) = \int_{\mathcal{F}(\varphi)} g(\varphi(\xi)) v(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{T}} g(\varphi(\xi)) v(\xi)\, d\xi. \quad (1)$$

Определим теперь меру ω_0 на $\partial\Omega$ равенством $\omega_0 := \varphi(|d\xi|/2\pi)$, а меру ω — равенством $\omega := \varphi(d\xi)$. При этом меры ω_0 и ω сосредоточены на $\partial_a\Omega$ и не имеют атомов. Далее, из утверждения (3) теоремы 1 и из

(1) следует, что для любой функции $v \in L^1(\mathbb{T})$ имеют место равенства

$$\varphi(v\,d\xi) = (v \circ \psi)\,\omega = (v_0 \circ \psi)\,\omega_0,$$

где $v_0(\xi) = 2\pi i \xi v(\xi)$. Кроме того, $|\omega| = 2\pi\omega_0$.

Уточним природу меры ω_0. Во первых, как показано в [18, раздел 2], для любого борелевского множества $E \subset \partial\Omega$ имеет место равенство $\omega_0(E) = \omega(z_0, E, \Omega)$, где через $\omega(z_0, E, \Omega)$ обозначается гармоническая мера множества E, вычисленная относительно области Ω и точки z_0. Как показано в [19, раздел 3.6], мера ω_0 является представляющей мерой для функционала $g \mapsto \widetilde{g}(z_0)$ в пространстве $C(\partial\Omega)$ (где, как и раньше, $\widetilde{g}$ — это такая гармоническая в области Ω и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция, что $\widetilde{g}|_{\partial\Omega} = g$), т.е.

$$\int g(\zeta)\,d\omega_0(\zeta) = \widetilde{g}(z_0).$$

В теории приближений аналитическими функциями весьма эффективно применяются двойственные методы, основанные на изучении мер, ортогональных к многочленами или к рациональным функциям на компактах различной природы.

Пусть $\widehat{\mu}$ — это *преобразование Коши* меры μ, т.е.

$$\widehat{\mu}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}.$$

В [18, теорема 2 и предложение 3] доказано, что имеет место следующий результат (символом $\mu_{|E}$ обозначается сужение меры μ на множество E):

Теорема 2.

1. *Пусть Ω — область Каратеодори и пусть φ, ψ, ω_0 — таковы, как указано выше.*

   Пусть $K \subset \Omega$ — компакт, а μ — мера на $K \cup \partial\Omega$, ортогональная пространству $\mathcal{R}(\overline{\Omega})$. Тогда найдется функция $h \in H^1$ (класс Харди в круге $\mathbb{D}$) такая, что

   $$\mu = \mu_{|K} + \left(\widehat{\psi(\mu_{|K})} \circ \psi\right)\omega + (h \circ \psi)\,\omega. \qquad (2)$$

2. *Пусть X — компакт Каратеодори такой, что $X^\circ \neq \varnothing$. Тогда любая ортогональная к $\mathcal{R}(X)$ мера μ на ∂X представляется в виде*

   $$\mu = \sum \mu_\Omega, \qquad \mu_\Omega = \mu_{|\partial\Omega} \perp \mathcal{R}(\overline{\Omega}),$$

   где сумма берется по всем связным компонентам Ω множества X°, а ряд сходится по норме в пространстве мер на ∂X.

Замечание 2. В связи с теоремой (2) необходимо отметить важные работы Э. Бишопа [20] и [23]. Так, в [23] было доказано утверждение

(1) теоремы 2 в случае, когда μ — мера на $\partial\Omega$. В этом случае $\mu_{|K} = 0$ и равенство (2) превращается в

$$\mu = (h \circ \psi)\,\omega_0, \tag{3}$$

где h такая функция класса H^1, что $h(0) = 0$. Заметим также, что если Ω — это область Каратеодори такая, что множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно, то формула (3) дает общий вид меры на $\partial\Omega$, ортогональной к пространству $\mathcal{P}$.

Результат утверждения (2) теоремы 2 (за исключением важного обстоятельства $\mu_\Omega = \mu_{|\partial\Omega}$) был (в неявной форме) получен в работе [20]. В работе [18] приведено существенно более простое доказательство этого результата и дополнительно установлено, что $\mu_\Omega = \mu_{|\partial\Omega}$.

Равенство 3 означает, что если Ω — это область Каратеодори такая, что $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно, то любая мера на $\partial\Omega$, ортогональная всем многочленами комплексного переменного, будет абсолютно непрерывной относительно гармонической меры на $\partial\Omega$ (вычисленной относительно Ω и любой точки $z \in \Omega$). Интересно отметить, что имеет место следующее несложное обращение этого факта (см., например, [21, предложение 1]):

Предложение 1. *Пусть Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ и пусть $a \in \Omega$. Если любая мера μ на $\partial\Omega$ с условием $\mu \perp \mathcal{P}$ является абсолютно непрерывной относительно гармонической меры $\omega(a, \cdot, \Omega)$, то Ω является областью Каратеодори, а множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ связно.*

Компакты Каратеодори и теорема Вермера о максимальности. Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Напомним, что замкнутая подалгебра A алгебры $C(X)$ называется *максимальной*, если для любой замкнутой подалгебры B алгебры $C(K)$ такой, что $B \supseteq A$ выполняется одно из двух условий: $A = B$ или $B = C(X)$.

Изучение вопроса о максимальности алгебры $P(X)$ для различных компактов X в $\mathbb{C}$ восходит к Дж. Вермеру, который доказал [22], что алгебра $P(\mathbb{D})_{|\mathbb{T}}$ является максимальной в $C(\mathbb{T})$. Позже Э. Бишоп [23, теорема 6] показал, что $P(X)_{|\partial X}$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial X)$ коль скоро компакт X имеет связное дополнение и связную внутренность (см. также [24, теорема 25.12]).

Оказывается, что имеет место следующее, интересное и полезное свойство компактов Каратеодори, недавно полученное Дж. Дж. Кармоной (Автономный университет Барселоны, Испания) и автором:

Теорема 3. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Если алгебра $P(X)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(X)$, то X является компактом Каратеодори, а $X^\circ = \varnothing$. Если, более того, $X = \partial\Omega$, где Ω — это ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$, причем $\Omega \neq \varnothing$, то множества $\overline{\Omega}$ и Ω не разделяют плоскость.*

В случае, когда Ω — это область Каратеодори, а множество $\overline{\Omega}$ не разделяет плоскость, то множество Ω также не разделяет плоскость. Однако ясно, что свойства связности множеств $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ и $\mathbb{C} \setminus \Omega$ в общем случае независимы, так как все четыре возможных случая реализуются.

Из теоремы 3 и из цитированных результатов Вермера и Бишопа вытекает следующее утверждение:

Следствие 2. *Если $\Omega \neq \varnothing$ — ограниченная область, то $P(\partial\Omega)$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial\Omega)$ если и только если Ω — это область Каратеодори, а Ω не разделяет плоскость.*

Отметим, что более слабый вариант следствия 2 был получен ранее в [7, теорема 17] (область Ω там изначально предполагается односвязной).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00434-а и 10-01-00837-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carathéodory C. Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten // Mathematische Annalen. – 1912. – V. 72. – P. 107–144.
2. Carathéodory C. Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis // Mathematische Annalen. – 1913. – V. 73. – P. 305–320.
3. Carathéodory C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete // Mathematische Annalen. – 1913. – V. 73. – P. 323–370.
4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2: Дальнейшее построение теории. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
5. Conway J. B. The theory of subnormal operators. Providence, Rhode Island (USA): Amer. Math. Soc, 1991.
6. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
7. Dovgoshei O. Certain characterizations of Caratheodory domains // Computational Methods and Operator Theory. – 2005. // – V. 5, no. 2. – P. 480–503.
8. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7, № 2. – С. 31–122.
9. Синанян С. О. Аппроксимация аналитическими функциями и полиномами в среднем по площади // Математический сборник. – 1966. – Т. 69 (111), № 4. – С. 546–578.
10. Гамелин Т. Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973. – 336 с.
11. Farrell O. J. On approximation by polynomials to a function analytic in a simply connected region // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1935. – V. 41, no. 10. – P. 707–711.
12. Rubel L., Shields A. Bounded approximation by polynomials // Acta Mathematica. – 1964. – V. 112. – P. 145–162.
13. Парамонов П. В. C^m-приближения грамоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Математический сборник. – 1993. – Т. 184, № 2. – С. 105–128.

14. W a l s h J. L. The approximation of harmonic functions by polynomials and by harmonic rational functions // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1929. – V. 35, no. 4. – P. 499–544.
15. З а й ц е в А. Б. О равномерной приближаемости функций полиномами специальных классов на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 1. – С. 75–87.
16. П а р а м о н о в П. В., Ф е д о р о в с к и й К. Ю. О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Математический сборник. – 1999. – Т. 190, № 2. – С. 123–144.
17. P o m m e r e n k e C h. Boundary behavior of the conformal maps. Berlin: Springer Verlag, 1992. – 300 p.
18. C a r m o n a J. J., F e d o r o v s k i y K. Y u. Conformal Maps and Uniform Approximation by Polyanalytic Functions // Selected Topics in Complex Analysis, Operator Theory: Advances and Applications. V. 158. Basel: Birkhäuser Verlag, 2005. – P. 109–130.
19. Х е й м а н У., К е н н е д и П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
20. B i s h o p E. Boudnary measures of analytic differentials // Duke Math. J. – 1960. – V. 27, no. 3. – P. 331–340.
21. Ф е д о р о в с к и й К. Ю. О характеризации мероморфных функций в плоских областях Каратеодори в терминах слабого принципа максимума // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2011. Спецвыпуск “Прикладная математика”. – С. 185–193.
22. W e r m e r J. On algebras of continuous functions // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1953. – V. 4. – P. 866–869.
23. B i s h o p E. The structure of certain measures // Duke Mathematical Journal. – 1958. – V. 25, no. 2. – P. 283–289.
24. S t o u t E. L. The theory of uniform algebras. New-York: Bogden&Quigley, 1971.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012