УДК 531.66

Нелинейная модель удара с сухим трением

© В.В. Лапшин, Е.А. Юрин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Согласно модели абсолютно упругого удара Герца, контактная сила взаимодействия тел зависит от деформации так же, как и в статике. К.Х. Хант и Ф. Кроссли предположили, что при ударе возникает не только упругая сила, но и вязкое трение между частицами соударяющихся тел, при этом коэффициент восстановления монотонно убывает с ростом скорости соударения. Рассмотрена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие, построенная на основе моделей удара Герца и Ханта — Кроссли, в которой предполагается, что трение между частицами соударяющихся тел является не вязким, а сухим. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформации и восстановления. Определен коэффициент восстановления и его зависимость от постоянной трения. Получено решение уравнения движение тела в квадратурах. Приведены результаты математического моделирования. В рассматриваемой модели возможен абсолютно неупругий удар, а при упругом ударе коэффициент восстановления не зависит от скорости соударения.

Ключевые слова: *коллинеарный удар, коэффициент восстановления, нелинейная динамика.*

Введение. В настоящей работе рассмотрен наиболее простой случай задачи об ударе тела о неподвижную поверхность (препятствие) при предположении, что до удара и после него тело движется поступательно вдоль одной и той же оси. Форма тела и препятствия могут быть различными, но при этом ударные силы их взаимодействия сводятся к равнодействующей, направленной вдоль этой оси, линия действия которой проходит через центр масс тела. Предполагается, что ударные силы взаимодействия существенно больше остальных сил, действием которых можно пренебречь [1–10]. Задача о коллинеарном соударении двух тел решается аналогично [1, 3].

Коэффициентом восстановления при ударе называется отношение модулей скоростей тела после V^+ и до V^- удара [1–9]:

$$k = \left|\frac{V^+}{V^-}\right| = -\frac{V^+}{V^-}. \qquad (1)$$

Наиболее точная модель удара связана с исследованием динамики движения вязкоупругопластичных деформируемых тел [1–3], достаточно сложна и требует большого объема численных расчетов [1–3].

В волновой теории удара [1–3] тела являются упругими, остаточная деформация тел отсутствует. Потеря энергии при ударе обусловлена возникающими при ударе упругими звуковыми волнами распространения деформации. Скорость распространения этих волн равна скорости звука и зависит от свойств материала. В инженерной практике волновая теория используется для расчета удара стержней о препятствие.

Если время прохождения упругих волн через все тело меньше продолжительности удара и происходит несколько отражений волн за время удара, то влиянием упругих волн можно пренебречь [1–4]. На таких предположениях строится контактная теория удара Герца, согласно которой упругая сила контактного взаимодействия тел при ударе зависит от деформации x так же, как и в случае статического равновесия [1–5]. Г. Герц показал, что если тело и препятствие в окрестности точки соприкосновения имеют сферическую поверхность и их деформации малы по сравнению с их радиусами, то с учетом увеличения пятна контакта с ростом деформации x сила упругого взаимодействия

$$F(x) = -cx^{3/2},$$

где c — константа, значение которой определяется радиусами этих сферических поверхностей и материалом, из которого изготовлены тела. Г. Герц рассмотрел абсолютно упругий удар [4–5]. Уравнение движение тела в этом случае имеет интеграл энергии и интегрируется в квадратурах, т. е. его решение сводится к вычислению определенного интеграла. Полученные при этом результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [1].

К. Хант и Ф. Кроссли [6] обобщили модель удара Герца, ввели в нее силу вязкого трения между частицами соударяющихся тел. Предположим, что при увеличении пятна контакта сила вязкого трения растет пропорционально упругой силе взаимодействия тел. Тогда контактная сила взаимодействия тела и препятствия определяется соотношением

$$F = F(x, \dot{x}) = -cx^n - bcx^n \dot{x}.$$

Здесь c — коэффициент упругости; b — постоянная сопротивления; n — постоянная, которая определяется формами поверхности тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения; x — перемещение тела (деформация), $x \geq 0.$ В частности, для сферической поверхности тел $n = 3/2,$ для плоской поверхности $n = 1.$ В работе [6] показано, что коэффициент восстановления является монотонно убывающей функцией скорости соударения. При малых скоростях соударения V^- коэффициент восстановления линейно зависит от V^-:

$$k = 1 - \frac{2}{3} bV^-.$$

При исследовании этой модели удара проводилось численное интегрирование нелинейного уравнения движения тела в процессе удара.

Модель удара Ханта — Кроссли является развитием модели Герца в случае, когда тело и препятствие подчиняются законам вязкоупругого деформирования. Модель построена при предположении, что деформации при ударе малы, можно пренебречь волновыми процессами и остаточной деформацией. Эти предположения обусловливают ограничения на скорость соударения, используемые материалы, форму и размеры тела. Рассматриваемая модель справедлива для компактных тел, изготовленных из достаточно жесткого материала, при относительно небольших (до нескольких метров в секунду) скоростях соударения. К недостаткам этой модели можно отнести невозможность абсолютно неупругого удара и стремление коэффициента восстановления к единице при стремлении скорости соударения к нулю независимо от материала, из которого изготовлены тела.

Эту модель можно обобщить [8–9], приняв

$$F = F(x, \dot{x}) = -f(x) - bf(x)\dot{x},$$

где $f(x)$ — упругая сила взаимодействия тел при ударе, причем $f(0) = 0$ и $f(x)$ является возрастающей функцией при $x \geq 0$.

В работах [8–9] получен первый интеграл уравнений движения тела при ударе. Аналитически построена зависимость коэффициента восстановления и потерянной при ударе кинетической энергии от скорости соударения. Приведено решение уравнения движения тела в квадратурах.

В настоящей работе рассмотрена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие, построенная на основе моделей удара Герца и Ханта — Кроссли. Предполагается, что трение между частицами деформируемых в процессе удара тел является сухим. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформации и восстановления. Определены коэффициент восстановления и потерянная при ударе кинетическая энергия и их зависимость от постоянной сухого трения. Получено решение уравнения движения тела в квадратурах. Приведены результаты математического моделирования.

В предлагаемой модели удара возможен абсолютно неупругий удар, коэффициент восстановления меньше единицы и не зависит от скорости соударения. Последний результат не согласуется с экспериментальными данными. В связи с этим в дальнейшем предполагается рассмотреть вязкоупругопластическую модель удара.

Нелинейная упругопластическая модель удара. Рассмотрим модель удара, аналогичную модели Ханта — Кроссли [3, 6, 8, 9], но предположим, что трение между частицами тела, деформируемого при ударе, является сухим. Контактная сила взаимодействия тела и препятствия определяется соотношением

$$F = F(x,\, \dot{x}) = -f(x) - d\, f(x)\operatorname{sgn}\dot{x}, \tag{2}$$

где x — перемещение тела в процессе удара (деформации); $f(x)$ — упругая сила взаимодействия тел при ударе; d — постоянная сухого трения.

В процессе удара деформация $x \geq 0$, в начале и в конце удара $x = 0$. Упругая сила взаимодействия тел при ударе равна нулю в начале и в конце удара: $f(0) = 0$ и является возрастающей функцией деформации x.

С учетом уравнения (2) уравнение движения тела в фазе деформации (при $V = \dot{x} > 0$) имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x,\, \dot{x}) = -f(x)(1+d), \tag{3}$$

где m — масса тела.

В конце фазы деформации скорость движения $V = \dot{x} = 0$. Если постоянная сухого трения $d \geq 1$, то в конце фазы деформации тело останавливается. Контактная сила взаимодействия равна нулю. Удар является абсолютно неупругим.

Если $d < 1$, то удар является упругим и в фазе восстановления (при $V = \dot{x} > 0$) уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x,\, \dot{x}) = -f(x)(1-d). \tag{4}$$

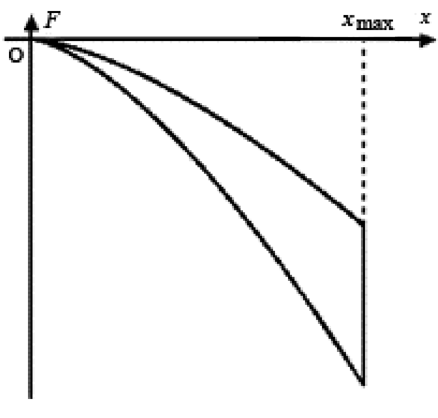


Рис. 1. Зависимость контактной силы от деформации при упругом ударе

Зависимость контактной силы от деформации в случае упругого удара приведена на рис. 1.

Обозначим через $\Pi(x)$ — потенциальную энергию упругой деформации, тогда

$$\Pi(x) = \int_0^x f(x)dx,$$

в частности $\Pi(x) = \dfrac{cx^{n+1}}{n+1}$ при $f(x) = cx^n$.

Уравнения движения (3)–(4) имеют первые интегралы — интегралы энергии. В фазе деформации

$$V^2 = (V^-)^2 - \frac{2(1+d)\Pi(x)}{m}, \tag{5}$$

в фазе восстановления

$$V^2 = \frac{2(1-d)\left(\Pi(x_{\max}) - \Pi(x)\right)}{m}, \tag{6}$$

где $x_{\max}$ — максимальное перемещение тела при ударе или значение x в конце фазы деформации. Значение $x_{\max}$ определяется как решение уравнения $V(x_{\max}) = 0$ и вследствие соотношения (5) является решением уравнения

$$\Pi(x_{\max}) = \frac{m(V^-)^2}{2(1+d)}. \tag{7}$$

При $f(x) = cx^n$ потенциальная энергия упругой деформации $\Pi(x) = \dfrac{cx^{n+1}}{n+1}$, а решением является

$$x_{\max} = \left[\frac{(n+1)m(V^-)^2}{2c(1+d)}\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Первые интегралы уравнений движения (5)–(6) позволяют получить решение уравнений движения (3)–(4) в квадратурах, как решение уравнений с разделяющимися переменными $\dot{x} = V(x)$. В фазе деформации

$$\int_0^x \sqrt{\frac{m}{m(V^-)^2 - 2(1+d)\Pi(x)}}\,dx = t,$$

в фазе восстановления

$$\int_0^{x_{\max}} \sqrt{\frac{m}{m(V^-)^2 - 2(1+d)\Pi(x)}}\,dx - \int_{x_{\max}}^x \sqrt{\frac{m}{2(1-d)\left(\Pi(x_{\max}) - \Pi(x)\right)}}\,dx = t,$$

где $x_{\max}$ — является решением уравнения (7).

Эти уравнения определяют в неявном виде закон движения тела при ударе.

Коэффициент восстановления и потерянная кинетическая энергия. Из первых интегралов уравнений движения (5)–(6) вследствие того, что и в начале и конце удара $x = 0$, следует, что начальная и конечная безразмерные скорости при ударе связаны соотношением

$$\frac{(V^+)^2}{1+d} = \frac{(V^-)^2}{1-d} = \frac{2\Pi(x_{\max})}{m}.$$

С учетом формулы (1) коэффициент восстановления

$$k = \sqrt{\frac{1-d}{1+d}}\ . \tag{12}$$

График зависимости коэффициента восстановления от постоянной сухого трения d приведен на рис. 2. С ростом d коэффициент восстановления монотонно убывает и становится равным нулю при $d = 1$ (т. е. удар становится абсолютно неупругим). При этом коэффициент восстановления не зависит от скорости соударения, что противоречит экспериментальным данным [1, 10].

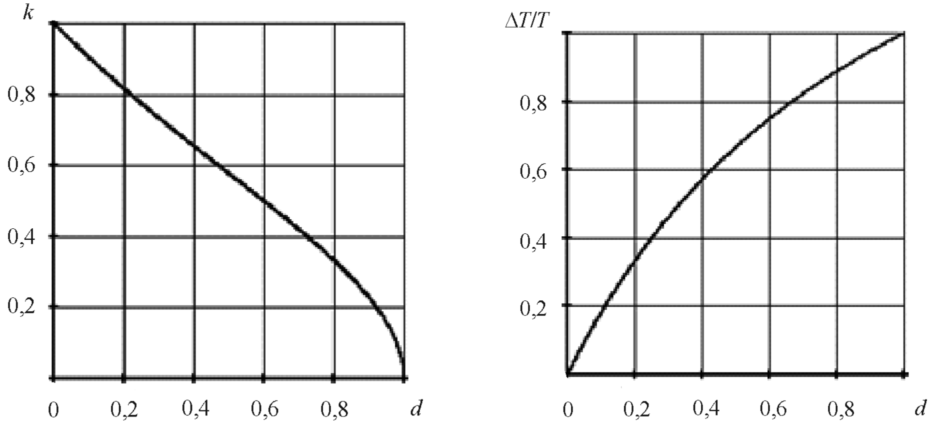


Рис. 2. Зависимость коэффициента восстановления k и отношения $\Delta T / T^-$ от постоянной сухого трения d

Кинетическая энергия, потерянная при ударе ΔT, определяется соотношением (2). Обозначим через T^- кинетическую энергию тела до удара, тогда

$$\frac{\Delta T}{T^-} = 1 - k^2 = \frac{2d}{1+d}$$

и зависит только от постоянной сухого трения (см. рис. 2).

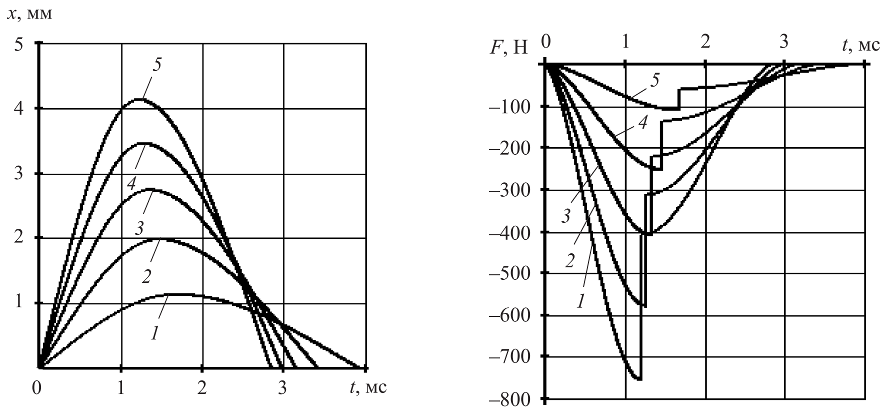
Результаты математического моделирования. Если поверхности тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения сферические, то сила упругой деформации в соответствии с результатами [4, 5] имеет вид $f(x) = cx^{3/2}$. Здесь

$$\frac{1}{c} = \frac{3}{4}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)\sqrt{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}},$$

где $E_{1,2}$ — модули упругости; $\mu_{1,2}$ — коэффициенты Пуассона; $R_{1,2}$ — радиусы поверхности тела и препятствия.

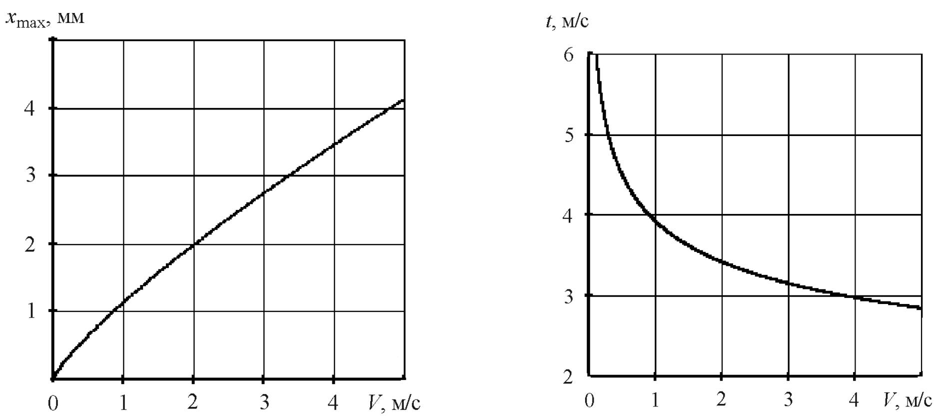
В качестве примера рассмотрим удар резинового шарика массой $m = 0{,}1$ кг о массивную бетонную плиту. Для резины плотность $\rho_1 = 1\,800$ кг/м^3, $E_1 = 0{,}8 \cdot 10^7$ Н/м^2, $\mu_1 = 0{,}5$; для бетона $E_2 = 2750 \cdot 10^7$ Н/м^2, $\mu_2 = 0{,}15$, тогда радиус шарика $R_1 = 2{,}367$ см, коэффициент упругости $c = 2{,}1873 \cdot 10^6$ Н/м$^{3/2}$. В расчетах примем, что постоянная сухого трения $d = 0{,}3$, тогда коэффициент восстановления $k = 0{,}73$.

На рис. 3 приведена зависимость перемещения тела (деформации) и контактной силы взаимодействия тела и препятствия от времени при $V^- = 0{,}5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ и 5 м/с, на рис. 4 — зависимость максимального перемещения тела (максимальной деформации) и продолжительности удара от скорости соударения V^-.



а *б*

Рис. 3. Зависимость деформации (*а*) и контактной силы (*б*) от времени: *1–5* — V^- равна 0,5, 1, 2, 3, 4 и 5 м/с соответственно



а *б*

Рис. 4. Зависимость максимальной деформации и продолжительности удара от скорости соударения

Заключение. На основе моделей удара Герца и Ханта — Кроссли построена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие. Предполагается, что трение между частицами деформируемых в процессе удара тел является сухим. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформации и восстановления, а также решение уравнения движения тела в процессе удара в квадратурах. В модели Герца удар является абсолютно упругим. В вязкоупругой модели Ханта — Кроссли удар является упругим, коэффициент восстановления уменьшается с ростом скорости и стремится к единице при уменьшении скорости соударения. В рамках построенной упругопластической модели удара возможны абсолютно неупругий и упругий удары. При упругом ударе коэффициент восстановления уменьшается при увеличении постоянной трения и не зависит от скорости соударения. Последнее противоречит экспериментальным данным. Этот недостаток позволит устранить переход к более сложной вязкоупругопластичной модели удара, учитывающей и вязкое и сухое трение между частицами соударяющихся тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13–01–00655а) и гранта президента РФ для ведущих научных школ (НШ–4748.2012.8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гольдсмит В. *Удар. Теоретические и физические свойства соударяемых тел.* Москва, Стройиздат, 1965, 448 с.

[2] Пановко Я.Г. *Введение в теорию механического удара*. Москва, Наука, 1977, 232 с.

[3] Иванов А.П. *Динамика систем с механическими соударениями*. Москва, Международная программа образования, 1997, 336 с.

[4] Herts H. Über die Berührung Fester Elastischer Körper. *Journal Reine und Angewandte Mathematik*, 1882, b. 92, ss. 156–171.

[5] Герц Г. *Принципы механики, изложенные в новой связи*. Москва, АН СССР, 1959, 387 с.

[6] Hunt K.H., Crossley F.R.E. Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1975, no. 6, pp. 440–445.

[7] Лапшин В.В. Удар тела о препятствие. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/articles/1134/ 1134.pdf (дата обращения 23.10.2014).

[8] Дягель Р.В., Лапшин В.В. О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта — Кроссли. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2011, № 5, с. 164–173.

[9] Dyagel R.V., Lapshin V.V. On a Nonlinear Viscoelastic Model of Hunt — Crossley Impact. *Mechanics of Solides*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 798–806.

[10] Кочетков А.В., Федотов П.В. Некоторые вопросы теории удара. *Интернет-журнал «Науковедение»,* 2013, № 5.
URL: http://naukovedenie.ru/110tnv513.pdf (дата обращения 23.10.2014).

Статья поступила в редакцию 29.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Лапшин В.В., Юрин Е.А. Нелинейная модель удара с сухим трением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12.
URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/1348.html

Лапшин Владимир Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 120 научных работ. Область научных интересов: механика и управление движением шагающих машин, теоретическая механика. e-mail: vladimir@lapshin.net

Юрин Евгений Александрович — студент МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: yurin-bob@mail.ru

Nonlinear model of blow with dry friction

© V.V. Lapshin, E.A. Yurin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

According to the Hertz model of absolutely elastic impact, the contact force of interaction of the bodies depends on deformation as well as it is in statics. K.H. Hunt and F.R.E. Crossley suggested that at collision there arises not only an elastic force, but also viscous friction between particles of the colliding bodies. Thus the restoration coefficient monotonously decreases with increasing impact velocity. A nonlinear elastic-plastic model of collinear impact of a body about a fixed obstacle is based on the Hertz and Hunt — Crossley models of impact, in which it is assumed that the friction between the particles of colliding bodies is not viscous, but dry. We obtained the first integrals of the equations of the movement in phases of deformation and restoration. The coefficient of restoration and its dependence on a friction constant was defined. We obtained a solution of equations of motion of the body in quadrature; presented the results of mathematical modeling. In the paper we show that absolutely inelastic impact is possible in this model, while elastic collision restitution coefficient does not depend on the speed of the collision.

Keywords: *collinear impact, the coefficient of restitution, nonlinear dynamics.*

REFERANCES

[1] Goldsmit V. *Udar. Teoreticheskie i fizicheskie svoistva soudaryaemyh tel* [Collision. Theoretical and Physical Properties of the Colliding Bodies]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1965, 448 p.

[2] Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskogo udara* [Introduction to the Theory of Mechanical Impact]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 232 p.

[3] Ivanov A.P. *Dinamika system s mekhanicheskimi soudareniyami* [Dynamics of the Systems with Mechanical Collisions]. Moscow, Mezhdunarodnaya Programma Obrazovania, 1997, 336 p.

[4] Herts H. Über die Berührung Fester Elastischer Körper. *Journal Reine und Angewandte Mathematik*, 1882, b. 92, ss. 156–171.

[5] Herts H. *Printsypy mehaniki, izlogenye v novoy sviazi* [Principles of Mechanics, as Set out in a New Relationship]. Moscow, AN SSSR, 1959, 387 p. [in Russian].

[6] Hunt K.H., Crossley F.R.E. Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1975, no. 6, pp. 440–445.

[7] Lapshin V.V. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, issue 12. Available at: http://engjournal.ru/articles/1134/1134.pdf (accessed 23 October 2014).

[8] Dyagel R.V., Lapshin V.V. O nelineinoi viazkouprugoi modeli collinearnogo udara Hanta–Krossli [On a Nonlinear Viscoelastic Model of Hunt–Crossley Impact]. *Izvestiya RAN. Mehanika Tverdogo Tela — Mechanics of Solids,* 2011, no. 5, pp. 164–173.

[9] Dyagel R.V., Lapshin V.V. On a Nonlinear Viscoelastic Model of Hunt–Crossley Impact. *Mechanics of Solides*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 798–806.

[10] Kochetkov A.V., Fedotov P.V. Nekotorye voprosy teorii udara [Some problems of the theory of impact]. *Internet–Jurnal "Naukovedenie"*, 2013, no. 5. Available at: http://naukovedenie.ru/110tnv513.pdf (accessed 23 October 2014).

Lapshin V.V., Dr. Sci. (Phys.&Math.), professor of the Bauman Moscow State Technical University. He is the author of over 120 scientific papers. Scientific interests: mechanics and motion control of walking machines, theoretical mechanics.
e-mail: vladimir@lapshin.net

Yurin E.A., a student of the Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: yurin-bob@mail.ru