

## Особенности колебаний жидкости в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна

© В.А. Калиниченко<sup>1</sup>, Л.И. Коровина<sup>2</sup>, С.В. Нестеров<sup>1</sup>, А.Н. Со<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ИПМех им. А.Ю. Ишлинского, Москва, 119526, Россия

<sup>2</sup> РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, 117997, Россия

<sup>3</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Представлены результаты лабораторных экспериментов по оценке влияния топографии дна на частоты и формы стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде, совершающих колебания в вертикальном направлении. Детально рассмотрен эффект одного и двух возвышений на горизонтальном дне и линейной отмели. Экспериментально исследовано смещение резонансной зависимости при изменении положения препятствия на линейном наклонном дне. С целью интерпретации данных эксперимента использована математическая модель сейш для случая резкого возвышения, основанная на методе ускоренной сходимости.*

**Ключевые слова:** *стоячие поверхностные волны, топография дна, метод ускоренной сходимости, резонансная зависимость, частотный сдвиг, сейши.*

Изучение собственных колебаний жидкости в форме длинных стоячих поверхностных волн — сейш — в озерах, внутренних морях и заливах имеет большое значение для решения ряда фундаментальных гидродинамических и многих прикладных задач [1–4]. Основными характеристиками сейш являются собственные частоты и формы низших мод колебаний, оценки которых затруднены из-за нерегулярности береговой линии и сложной топографии дна естественных водоемов.

В обзоре [4] указаны немногие геометрические формы водоемов, для которых в рамках классической теории волновых движений жидкости ограниченного объема получены решения для сейшевых колебаний. При оценке периода двумерных сейш в водоеме прямоугольной формы и постоянной глубины часто используется формула Мериана [2, 5]:

$$T_n = 2\pi / \omega_n = 2l / (n\sqrt{gh_0}),$$

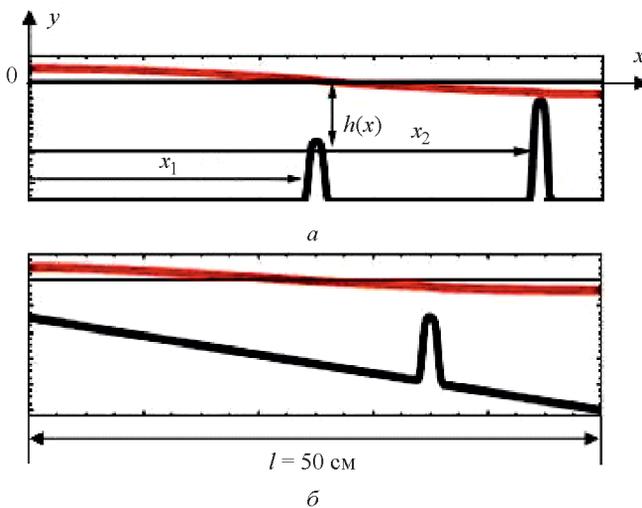
где  $T_n$ ,  $\omega_n$  — период и частота волновой моды номера  $n$ ;  $n$  — число узлов стоячей поверхностной волны (сейши);  $l$ ,  $h_0$  — длина и глубина бассейна;  $g$  — ускорение силы тяжести. Однако ошибки в расчетах становятся достаточно большими (~25 %) при резком нарушении условия постоянства ширины  $d = d_0$  и (или) площади поперечного сечения бассейна:  $S = S_0$  [2, 3, 6].

Вследствие сложной геометрии прибрежной линии и дна реальных водоемов отсутствуют теоретические оценки периодов и положения узловых линий сейш. Для их определения в лимнологии используются различные расчетные методы и схемы [2]. Наиболее продуктивным из них является метод Дефанта [7], с помощью которого проведен анализ первых четырех продольных сейшевых мод озера Байкал [8].

Настоящая статья является логическим продолжением опубликованных ранее результатов исследований авторов [9]. Тема исследований также связана с решением практических задач авиационно-космической техники, транспортировки нефтепродуктов морским и наземным транспортом [10–12].

**Постановка задачи и методы.** Взаимодействие длинных поверхностных волн в прямоугольном сосуде с различной топографией дна исследовалось посредством лабораторного эксперимента, для интерпретации результатов которого использовалась численно-аналитическая модель сейш.

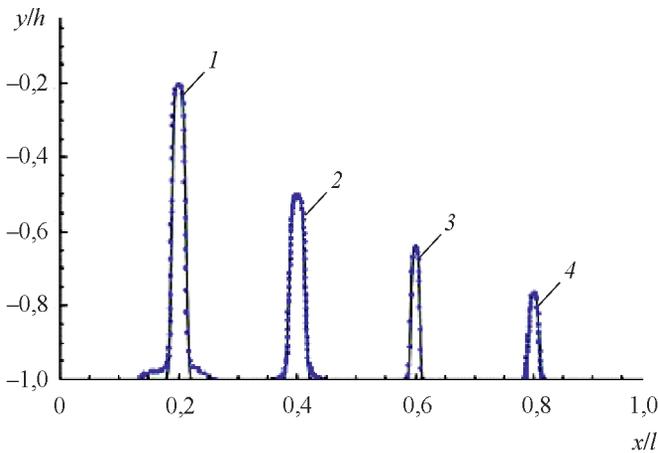
В приближении длинных волн рассмотрена задача о собственных колебаниях тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в протяженном канале переменного прямоугольного сечения. Дно канала содержит участки изменения глубины жидкости  $h(x)$  различного вида (рис. 1).



**Рис. 1.** Стоячие волны в канале с различной топографией дна:  
 а — два возвышения; б — возвышение на линейной отмели

*Эксперимент.* Для моделирования сейшевых колебаний воды над локальными нерегулярностями дна исследовали первую и вторую моды ( $n = 1, 2$ ) гравитационных стоячих волн на свободной поверхности жидкости в прямоугольном сосуде размером  $50 \times 4 \times 40$ , см), со-

вершающем гармонические колебания в вертикальном направлении [9, 13]. Возбуждение волн осуществлялось при основном резонансе Фарадея, когда частота возбуждаемых волн в 2 раза меньше частоты колебаний сосуда:  $\omega \sim \Omega / 2$ . При фиксированной амплитуде колебаний сосуда  $s = 2,5$  см вариации  $\Omega$  обеспечивали изменения высоты волны  $H$  от 0,5 до 2,0 см. Во всех экспериментах глубина жидкости  $h = 7$  см. При длине волны  $\lambda$ , равной 50 и 100 см, отношение  $h/\lambda$  составляло 0,14 и 0,07 соответственно. Для регистрации волновых движений жидкости применяли видеосъемку со скоростью 15 и 30 колебаний/с в системе отсчета, связанной с сосудом. Измерения периода колебаний сосуда проводили с точностью до 2 мс.



**Рис. 2.** Форма четырех возвышений (результаты оцифровки их профиля) и графики аппроксимирующих их функций:

1–4 при  $h_1$  равно 5,6; 3,6; 2,6; 1,6 см соответственно

Для определения влияния рельефа дна на волны использовали возвышения различных размеров и форм (рис. 2), изготовленные из толщиной 1 мм листовой меди (1, 2) и технического пластилина (3, 4). Поскольку исследовались двумерные колебания жидкости, то все препятствия имели фиксированный поперечный размер, равный 3,9 см, и по ширине перекрывали сосуд. Их относительная высота  $h_1/h$  составляла 0,8, 0,5, 0,37 и 0,23 соответственно. На рис. 2 представлены использованные в экспериментах возвышения и графики аппроксимирующих их функций  $h_1(x-x_0)/h = -1 + A^*e^{-B^*(x-x_0)^4}$ , где  $A^*$ ,  $B^*$  — коэффициенты.

Для выявления влияния резкого изменения донного рельефа на свойства длинных стоячих волн оценивали их частоту и строили ре-

зонансные зависимости  $H = H(\Omega)$  при изменении положения препятствия. Для минимизации нелинейных эффектов измерения проводили при малой крутизне возбуждаемых волн.

*Численно-аналитический метод.* При формулировке задачи о собственных колебаниях тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в протяженном водоеме (канале) [1] предполагается, что его переменное прямоугольное сечение ортогонально оси  $x$  (см. рис. 1) является прямоугольным и имеет площадь

$$S = S(x) = d h(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где  $d = \text{const}$  — постоянная ширина канала;  $h$  — глубина, отсчитываемая от верхнего уровня жидкости, находящейся в состоянии покоя.

Дно канала может содержать участки резкого подъема или опускания (возвышения или углубления), которые должны быть адекватно описаны соответствующими зависимостями  $h(x)$ . Канал (водоем) предполагается достаточно мелким, что в реальных условиях при определении давления  $p$  внутри жидкости позволяет использовать гидростатическое приближение:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0 + g\rho(\eta - y), \quad \eta \geq y \geq -h(x); \\ p(x, t) &= p_0, \quad \eta \leq y. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\eta = \eta(x, t)$  — возвышение жидкости;  $\rho$  — ее плотность;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $y$  — вертикальная координата;  $p_0$  — постоянное атмосферное давление.

Из соотношения (1) находим выражение для градиента давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= g\rho \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta \geq y; \\ \frac{\partial p}{\partial x} &\equiv 0, \quad y > \eta. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда следует, что частицы жидкости в каждый момент времени  $t$  остаются в сечении  $x$ . Горизонтальная компонента вектора скорости  $\mathbf{U}(x, t)$ .

Из уравнений Эйлера в линейном приближении следует [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (3)$$

Отметим, что при выводе уравнения (3) использовано выражение (2) для  $\partial p / \partial x$ .

Соответствующее уравнение неразрывности принимает вид [1]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(h(x)u)}{\partial x}, \quad t \geq t_0, 0 \leq x \leq l. \quad (4)$$

Исключив стандартным образом неизвестную  $u$  из (3) и (4), запишем уравнение волновых движений жидкости в виде

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Для решения уравнения (5) представляет интерес задача на собственные значения (частоты колебаний жидкости) и собственные функции (профили свободной поверхности) [1–4]. Для волн типа сейш торцы канала  $x = 0, l$  ограничиваются жесткими вертикальными стенками, на которых выполняются краевые условия непротекания:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \text{ при } t \geq t_0. \quad (6)$$

Найдем периодические решения краевой задачи в виде  $\eta(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$ . После подстановки в (5) и (6) получим

$$\frac{d}{dx} \left( h(x) \frac{dW}{dx} \right) + \frac{\omega^2}{g} W = 0; \quad (7)$$

$$W'(0) = W'(l) = 0.$$

Если  $h(x) = h_0$ , то (7) имеет аналитическое решение, отвечающее соответствующим модам стоячих волн:

$$\lambda_n = \frac{\omega^2}{gh_0} = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2; \quad W_n(x) = A \cos \frac{\pi n}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Для решения задачи в случае локальной нерегулярности ( $h(x) \neq h_0$ ) на дне воспользуемся высокоточным численно-аналитическим методом ускоренной сходимости [14].

Рассматриваемая краевая задача на собственные значения и функции может быть приведена к следующему виду:

$$\frac{d}{dx} \left( h(x) \frac{dW}{dx} \right) + \lambda_n W = 0; \quad (8)$$

$$W'(0) = W'(l) = 0.$$

Здесь  $x, h$  — нормированные на  $l$  и  $h_0$  горизонтальная координата и глубина соответственно. Искомый параметр  $\lambda_n$  связан с частотой  $\omega$  соотношением

$$\lambda_n = \frac{\omega^2 l^2}{gh_0} = (\pi n)^2.$$

Для определения собственных значений  $\lambda_n$  и функций  $W_n(x)$  задачи (8) с граничными условиями типа Неймана (второго рода) при-

меним теорию Штурма — Лиувилля и алгоритм ускоренной сходимости [14].

Решению нулевой моды отвечают  $\lambda_0 = 0$ ,  $W_0(x) \equiv \text{const}$ , в частности  $W_0(x) \equiv 0$ . Последующие моды колебаний  $n = 1, 2, \dots$  требуют высокоточного решения краевой задачи на собственные значения  $\lambda_n$  и функции  $W_n$  и формы  $W_n^* = W_n \|W_n\|^{-1}$ , которые строят ниже для используемых в эксперименте  $h(x) = -1 + f(x - x_0)$ .

Алгоритм метода заключается в последовательном уточнении значения  $\lambda_n$  на основе невязки  $\varepsilon = 1 - \xi$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ) по абсциссе для соответствующего  $n$  узла  $\xi$  функции  $W_n'(x)$  и известной производной  $\lambda_n'(\xi)$ .

Расчету собственных значений  $\lambda_n$  или частот  $\omega_n$  сопутствует построение функций  $W_n(x)$ . Эти функции удовлетворяют граничным условиям с требуемой точностью для заданной функции  $h(x) = -1 + f(x - x_0)$  и номера моды  $n$  [14].

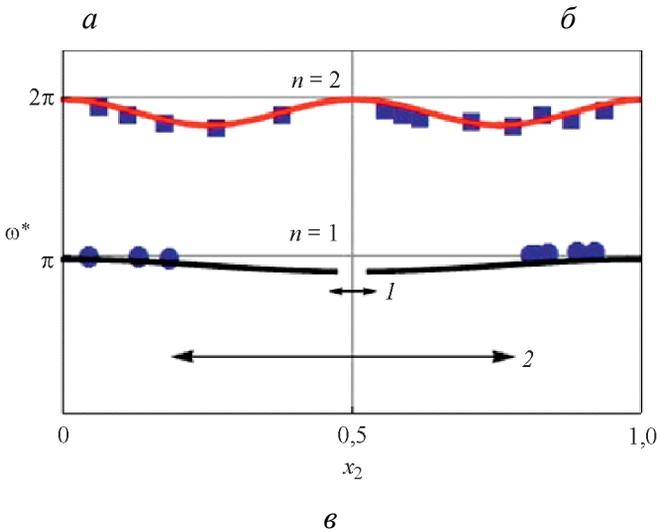
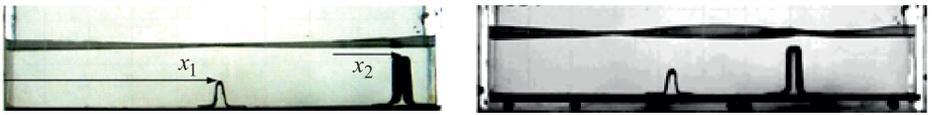
**Результаты и обсуждение.** Рассмотрим влияние двух возвышений на волновое движение жидкости.

Возвышение 2 (см. рис. 2) располагалось в центре сосуда, тогда как возвышение 1 перемещалось по горизонтальному дну сосуда. Данные эксперимента и результаты расчетов частот первой и второй волновых мод в зависимости от горизонтальной координаты одного из двух возвышений приведены на рис. 3. Обнаружен широкий диапазон значений  $x_2$ , для которых первая волновая мода не возбуждалась.

В случае второй моды перемещение возвышения 1 от боковой стенки сосуда к его центру приводит сначала к уменьшению частоты, причем минимум достигается под узлами волны. Затем частота увеличивается и достигает максимума при расположении возвышений вблизи центра сосуда. Аналогичный результат дает и численно-аналитическая модель. Анализ огибающих свободной поверхности свидетельствует о существенном искажении волнового профиля над большим возвышением (рис. 3, б).

Влияние положения возвышения 1 на частоту первой волной моды проявляется значительно интенсивнее. Так, в эксперименте выявлен диапазон 2 (рис. 3, в) значений  $x_0$  этого возвышения, в котором волновое движение жидкости полностью подавляется. Данный результат свидетельствует о существенном влиянии большого возвышения на геометрию сосуда и связанные с этим условия генерации волны. Результаты численной модели подтверждают выявленный

экспериментально эффект, хотя рассчитанный диапазон  $I$  подавления волн несколько уже наблюдаемого в экспериментах.



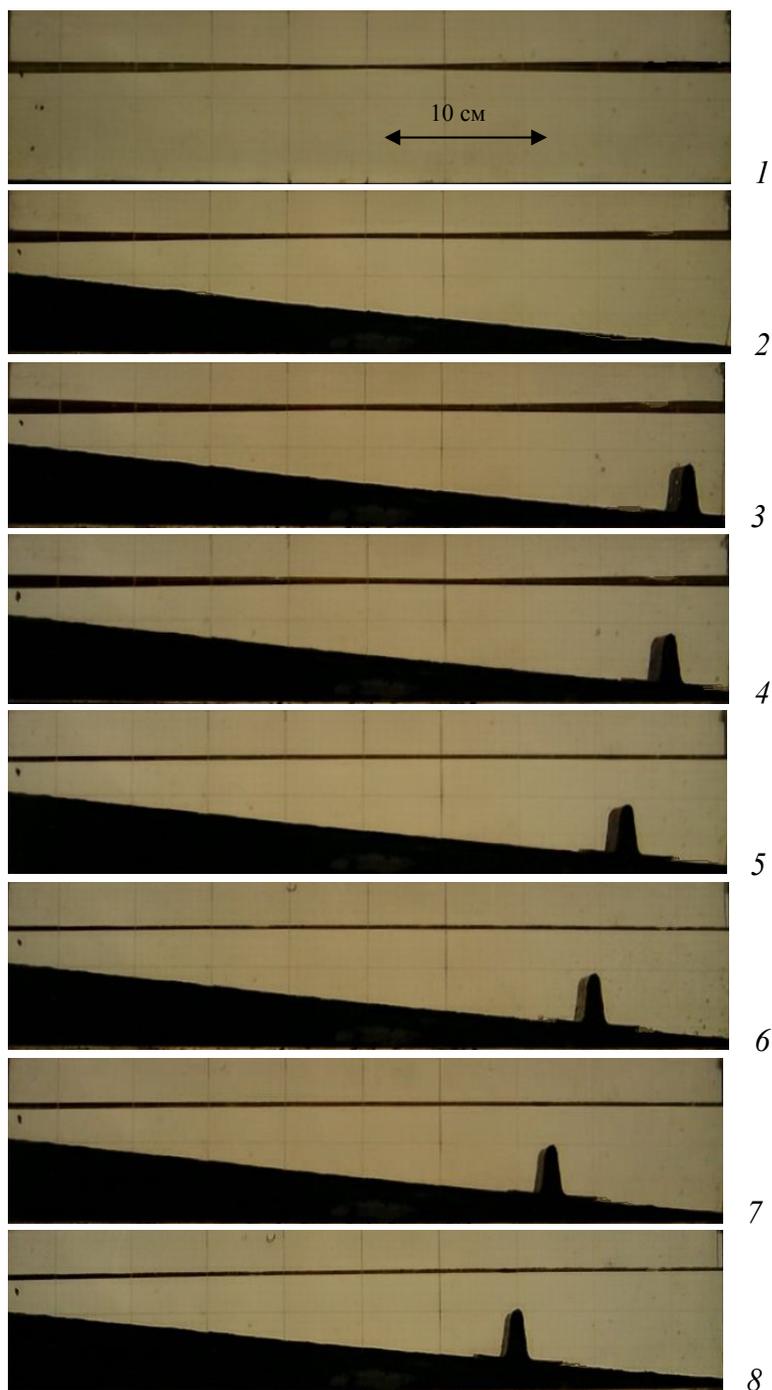
**Рис. 3.** Первая (*a*) и вторая (*б*) волновые моды над двумя возвышениями. Зависимость частоты волн от горизонтальной координаты  $x_2$  возвышения (*б*): 1, 2 — зоны отсутствия возбуждения волн (модель и эксперимент соответственно)

Проведена серия экспериментов по изучению влияния линейной отмели и расположенного на ней отдельного возвышения (см. рис. 1, *б*).

На рис. 4 приведены профили волны для случая  $h_1 / h = 0,5$  (см. рис. 2, возвышение 2). При гладком горизонтальном дне (1) возбуждаемая волна частотой  $\omega = 4,73 \text{ с}^{-1}$  относится к регулярной первой моде малой крутизны  $H / \lambda \sim 0,086$ . В случае линейной отмели (2) частота возбуждаемой волны  $\omega = 3,92 \text{ с}^{-1}$  при  $H / \lambda \sim 0,09$ . Если пучности волны располагаются на торцевых стенках сосуда, то в центре четко локализуется ее узел.

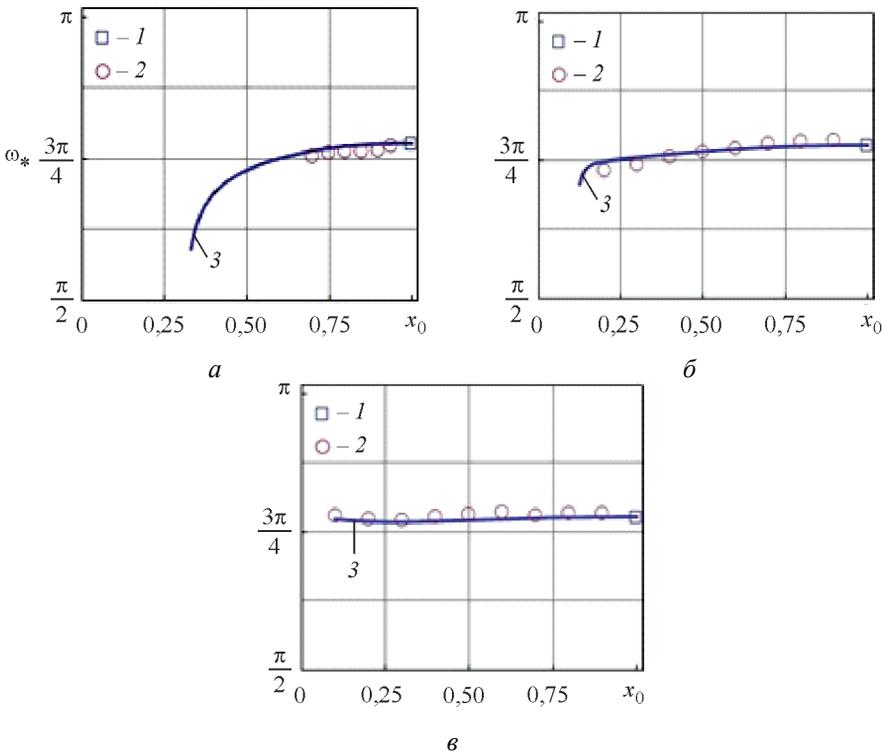
При наличии возвышения на наклонном дне, расположенного на расстоянии  $x_0$ , равном 47, 45, 42,5, 40, 37,5 и 35 см от левой торцевой стенки, волновая картина практически не изменяется (3–8). Аналогично (1, 2) наблюдаемые волны классифицируются как регулярные стоячие волны крутизны 0,086, 0,05, 0,043, 0,05, 0,049 и 0,039. Однако их частота  $\omega$  снижается и равна соответственно 3,9, 3,86, 3,85, 3,84, 3,81 и 3,8  $\text{с}^{-1}$  при уменьшении  $x_0$ . Эксперименты показы-

вают, что волна не возбуждается при дальнейшем смещении возвышения к левой боковой стенке сосуда (при уменьшении  $x_0$ ).



**Рис. 4.** Огибающие свободной поверхности в случае горизонтального дна (1), линейной отмели (2) и возвышения на наклонном дне (3–8)

На рис. 5 приведены зависимости 2 безразмерной частоты  $\omega_*$  описанной выше первой волновой моды от относительного положения  $x_0$  трех возвышений разной высоты. Нормировка проведена на частоту волны в случае гладкого горизонтального дна (см. рис. 4, 1) и на длину сосуда соответственно. Экспериментальные данные (см. рис. 5, 1) отвечают безразмерной частоте возбуждаемой волны для линейной отмели. Видно, что при смещении возвышения от правой торцевой стенки к левой стенке частота уменьшается. Этот результат полностью подтверждает основной вывод рассмотренной выше теоретической модели. Для количественного сравнения на рис. 5 приведена рассчитанная зависимость 3.

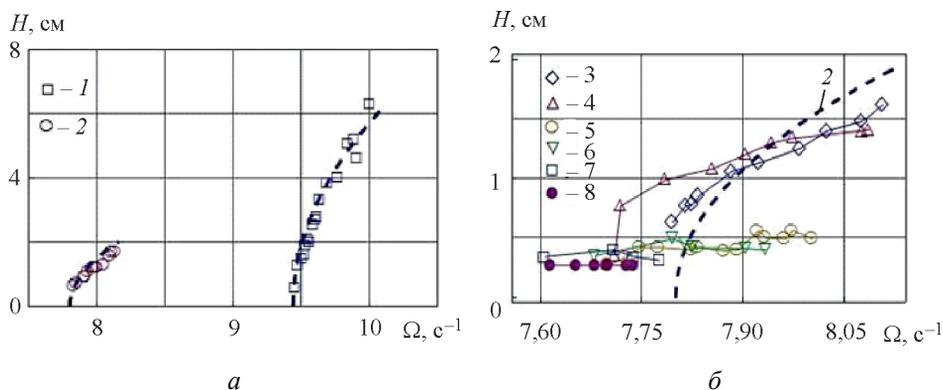


**Рис. 5.** Зависимость частоты  $\omega_*$  первой волновой моды от локализации неоднородности дна:

$a - в - h_1 / h$  равно 0,5, 0,37, 0,23 соответственно; 1 — линейное наклонное дно; 2 — эксперимент; 3 — расчет

Наибольшее влияние положения возвышения на частоту первой моды наблюдается при  $h_1 / h = 0,5$ . Так, изменение положения  $x_0$  от 47 к 35 см приводит к уменьшению частоты  $\omega$ , равной  $3,9 \text{ с}^{-1}$ , до  $3,8 \text{ с}^{-1}$  при сохранении формы сточей волны и соответствующих ма-

лых крутизнах  $H/\lambda$ , равных 0,086 и 0,039. Однако в интервале значений  $35,0 < x_0 < 15,6$  см волну возбудить не удалось. Данный результат свидетельствует о существенном влиянии большого возвышения на геометрию сосуда и связанные с этим условия генерации волны.



**Рис. 6.** Резонансные зависимости для первой волновой моды при отсутствии возвышения на наклонном дне (а) и различном положении возвышения высотой

$h_1 = 3,6$  см на линейной отмели (б):

1 — горизонтальное дно; 2 — линейная отмель; 3–8 —  $x_0$  равно 47, 45, 42,5, 40, 37,5 и 35 см соответственно при возвышении на наклонном дне

Сравнение резонансных зависимостей  $H = H(\Omega)$  первой моды стоячих волн в сосуде с горизонтальным дном и линейной отмелью (рис. 6, а) показывает значительный относительный сдвиг (15...20 %) в низкочастотную область. Следует отметить также трехкратное уменьшение высоты волн в случае наклонного дна. Наличие одиночного возвышения на отмели приводит к дополнительному подавлению (на 60...70 %) волнового движения жидкости с одновременным уменьшением собственной частоты (рис. 6, б).

**Заключение.** На основании экспериментальных исследований смещения резонансной зависимости при изменении положения препятствия на линейном наклонном дне установлено, что использованный для интерпретации опытных данных метод ускоренной сходимости адекватно описывает частотные характеристики длинных стоячих поверхностных волн и их формы в случаях резкого и плавного возвышений дна.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№14-01-00282) и Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ по поддержке научных исследований ведущих научных школ РФ, код НШ-4058.2014.8).*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва-Ленинград, ОНТИ НКТП СССР, 1936, 303 с.
- [2] Defant A. *Physical Oceanography*. Vol. 2. Oxford, Pergamon Press, 1961, 598 p.
- [3] Арсеньева Н.М., Давыдов Л.К., Дубровина Л.Н., Конкина Н.Г. *Сейши на озерах СССР*. Л., Изд-во ЛГУ, 1963, 183 с.
- [4] Rabinovich A.B. Seiches and harbor oscillations. Handbook of Coastal and Ocean Engineering. Kim Y.C., ed. Singapore. *World Scientific Publ.*, 2009, vol. 9, pp. 193–236.
- [5] Праудмэн Д. *Динамическая океанография*. Москва, ИЛ, 1957, 418 с.
- [6] Miles J. W. Harbor seiching. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1974, vol. 6, pp. 17–33.
- [7] Prigo R.B., Manley T.O., Connell B.S.H. Linear, one-dimensional models of the surface and internal standing waves for a long and narrow lake. *Am. J. Phys.*, 1996, vol. 64, no. 3, pp. 288–300.
- [8] Смирнов С.В., Кучер К.М., Гранин Н.Г., Стурова И.В. Сейшевые колебания Байкала. *Изв. РАН. ФАО*, 2014, т. 506, № 1, с. 105–116.
- [9] Акуленко Л.Д., Калиниченко В.А., Нестеров С.В. Сейши в канале с резким изменением рельефа дна. *Изв. РАН. МЖГ*, 2012, № 3, с. 103–111.
- [10] Ibrahim R. A. *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*. Cambridge Univ. Press, 2005, 948 p.
- [11] Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 2003, 520 с.
- [12] Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. *Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость*. Москва, Машиностроение, 1971, 563 с.
- [13] Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея. *Изв. РАН. МЖГ*, 1995, № 1, с. 122–129.
- [14] Akulenko L.D., Nesterov S.V. *High-precision methods in eigenvalue problems and their applications*. Boca Raton, CRC Press, 2005, 255 p.

Статья поступила в редакцию 4; 2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Калиниченко В.А., Коровина Л.И., Нестеров С.В., Со А.Н. Особенности колебаний жидкости в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1345.html>

**Калиниченко Владимир Анатольевич** окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1977 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. Автор более 40 статей в области гидродинамики. e-mail: [kalin@ipmnet.ru](mailto:kalin@ipmnet.ru)

**Коровина Лариса Ильинична** окончила физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1962 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических методов в экономике Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова. Автор более 20 статей в области математической физики. e-mail: [gavrikov@ipmnet.ru](mailto:gavrikov@ipmnet.ru)

**Нестеров Сергей Владимирович** окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1958 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. Автор более 180 статей в области гидродинамики и теории нелинейных колебаний.  
e-mail: gavrnikov@ipmnet.ru

**Со Аунг Наинг** окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Аспирант кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: гидродинамика. e-mail: kalarlay@mail.ru

## The features of fluid oscillations in a rectangular vessel with local bottom irregularities

© V.A. Kalinichenko<sup>1</sup>, L.I. Korovina<sup>2</sup>, S.V. Nesterov<sup>1</sup>, A.N. Soe<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia

<sup>2</sup> Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, 117997, Russia

<sup>3</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article describes the results of laboratory experiments devoted to the estimation of bottom topography influence on the stationary surface waves' frequencies and forms in a rectangular vessel which oscillates in vertical direction. The effect of one or two elevations at a horizontal bottom and at a linear shoal is considered properly. The resonance deviation with respect to the obstruction position changing is investigated in the experiment at a linear inclined bottom. The mathematical model of seiches based on the accelerated convergence was used to explain the results of experiment in case of abrupt elevation.*

**Key words:** stationary surface waves, bottom topography, accelerated convergence, resonance dependence, frequency deviation, seiches.

### REFERENCES

- [1] Sretensky L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions of fluid]. Moscow–Leningrad, ONTI NKTP USSR, 1936, 303 p.
- [2] Defant A. *Physical Oceanography*. Vol. 2. Oxford, Pergamon Press, 1961, 598 p.
- [3] Arsenyeva N.M., Davydov L.K., Dubrovina L.N., Konkina N.G. *Seishi na ozerakh SSSR* [Seiches on the lakes of the USSR]. Leningrad, LSU Publ., 1963, 183 p.
- [4] Rabinovich A.B. *Seiches and harbor oscillations. Handbook of Coastal and Ocean Engineering*. Y.C. Kim, ed. Singapoure. World Scientific Publ., 2009, vol. 9, pp. 193–236.
- [5] Praudman J. *Dinamicheskaya okeanografiya* [Dynamic Oceanography]. Moscow, Inostrannaya literature Publ., 1957, 418 p. [in Russian].
- [6] Miles J. W. Harbor seiching. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1974, vol. 6, pp. 17–33.
- [7] Prigo R.B., Manley T.O., Connell B.S.H. Linear, one-dimensional models of the surface and internal standing waves for a long and narrow lake. *Am. J. Phys.*, 1996, vol. 64, no. 3, pp. 288–300.
- [8] Smirnov S.V., Kucher K.M., Granin N.G., Sturova I.V. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana — Izvestiya RAS. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2014, vol. 50b, no. 1, pp. 105–116.
- [9] Akulenko L.D., Kalinichenko V.A., Nesterov S.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics*, 2012, no. 3, pp. 103–111.
- [10] Ibrahim R. A. *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*. Cambridge Univ. Press, 2005, 948 p.
- [11] Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Dynamics of Missiles]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003, 520 p.
- [12] Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dinamika tonkostennykh konstruksiy s otsekami, soderzhaschimi zhidkost* [Dynamics of thing-walled structures with sections containing liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1971, 563 p.

- [13] Kalinichenko V.A., Nesterov S.V., Sekerzh-Zenkovich S.Ya., Chaikovsky A.A. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics*, 1995, no. 1, pp. 122–129.
- [14] Akulenko L.D., Nesterov S.V. *High-precision methods in eigenvalue problems and their applications*. Boca Raton, CRC Press, 2005, 255 p.

**Kalinichenko V.A.** graduated from the Physics Department of Lomonosov Moscow State University in 1977. Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of the Theoretical Mechanics Department at Bauman Moscow State Technical University, Leading Researcher at the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS. Author of more than 40 publications on hydrodynamics. e-mail: kalin@ipmnet.ru

**Korovina L.I.** graduated from the Physics Department of Lomonosov Moscow State University in 1962. Ph.D., assoc. professor of the Department of Mathematical Methods in Economics of the Plekhanov Russian University of Economics. Author of more than 20 publications on mathematical physics. e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

**Nesterov S.V.** graduated from the Physics Department of Lomonosov Moscow State University in 1958. Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, senior researcher at the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS. Author of more than 180 publications on hydrodynamics and theory of nonlinear oscillations. e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

**Soe A.N.** graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2012. Graduate Student of Theoretical Mechanics Department of the Bauman Moscow State Technical University. Research interests: hydrodynamics. e-mail: kalarlay@mail.ru