УДК 519.217

О. В. Пугачёв

О ПРОБЛЕМАХ ФУКУСИМЫ И РЁКНЕРА

Рассматриваются проблемы, связанные с замыкаемостью форм Дирихле. Основной результат данной работы — решение долго стоявшей проблемы существования такой замыкаемой градиентной формы Дирихле на плоскости, что частные формы не являются замыкаемыми.

E-mail: opugachev@yandex.ru

Ключевые слова: *форма Дирихле, диффузионный процесс, мера, замыкаемость, проблема Рёкнера.*

1. Диффузионные процессы. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^d$ диффузионный процесс [1]

$$\big\{\Omega,\ \{X_t\}_{t\geqslant 0},\ \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},\ \{P_x\}_{x\in X}\big\}, \tag{1}$$

где $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ — возрастающее семейство σ-алгебр в Ω, такое, что X_t измеримы относительно $\mathcal{F}_t$; вероятностная мера P_x на Ω есть распределение траекторий, стартующих из точки x. Предположим, что процесс (1) имеет на $\mathbb{R}^d$ вероятностную или неотрицательную локально-конечную стационарную меру μ. Данный диффузионный процесс порождает полугруппу

$$\{T_t\}_{t\geqslant 0}: \quad f \ \mapsto\ T_t f(x) = \int f(X_t)\, dP_x$$

на $L^2(\mu)$. Физический смысл ее таков: если в начальный момент частицы распределялись с плотностью f, то через время t они распределятся с плотностью $T_t f$. Генератором полугруппы называется (неограниченный) неположительный линейный оператор L с областью определения D, такой, что $T_t = e^{tL}$ для $f \in D$. С генератором полугруппы ассоциирована неотрицательно определенная квадратичная форма $\mathcal{E}$ на D, заданная соотношением $\mathcal{E}(f,g) = -(f, Lg)_{L^2(\mu)}\quad \forall f,g \in D$. В случае, когда вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^d$ задана дифференцируемой (в соболевском смысле) плотностью ϱ, существует диффузионный процесс ξ_t, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi_t = \sqrt{2}\, dw_t + \frac{\nabla\varrho(\xi_t)}{\varrho(\xi_t)}\, dt \tag{2}$$

и имеющий стационарное распределение $\mu = \varrho\, dx$. Здесь w_t — стандартный d-мерный винеровский процесс. Генератор L переходной полугруппы диффузии (2) имеет вид $Lf = \Delta f + \Big\langle \dfrac{\nabla\varrho}{\varrho}, \nabla f\Big\rangle$. Квадратичная форма этого оператора на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mu)$ есть форма Дирихле

$$\mathcal{E}(f) = \int \left|\nabla f\right|^2 d\mu. \tag{3}$$

В общем случае, чтобы форма Дирихле вида (3) могла быть ассоциирована с некоторым диффузионным процессом, необходима ее замыкаемость [2]. Оказывается, что форма Дирихле (3) может быть замыкаемой и для мер с недифференцируемыми плотностями. Таким способом строятся диффузии с сингулярными коэффициентами сноса.

2. Замыкаемость квадратичных форм. Определение 1. Пусть $\mathcal{E}$ — квадратичная форма, определенная на множестве $\mathcal{D} \subset L^2(X, \mu)$. Говорят, что $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ замыкаема, если для всякой последовательности функций $f_n \in \mathcal{D}$, такой, что $\|f_n\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\mathcal{E}(f_n - f_m) \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, выполнено $\mathcal{E}(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

В случае $\mathbb{R}$ проблема замыкаемости формы (3) полностью решена [3]:

Теорема 1. *Форма $\mathcal{E}$, заданная на $C = C_0^\infty(\mathbb{R})$ формулой*

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 \mu(dx),$$

замыкаема в том и только том случае, если мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, и соответствующая плотность ϱ такова, что для почти всех x выполнено условие

$$\varrho(x) = 0 \quad \textit{или} \quad \exists \varepsilon > 0 : \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1}{\varrho(t)} dt < \infty. \tag{4}$$

Этот результат был обобщен в работе [4]:

Теорема 2. *Пусть X — линейное пространство, $k \in X$. Обозначим через P проекцию X на подпространство $Y = k^\perp$; пусть $\nu = \mu \circ P^{-1}$. Пусть μ_y, $y \in Y$ — условные меры, порожденные μ на прямых $\{y + tk \mid t \in \mathbb{R}\}$. Тогда форма $\mathcal{E}$, заданная на C_o^∞ формулой $\mathcal{E}(f) = \int \left|\partial_k f(x)\right|^2 \mu(dx)$, замыкаема в том и только том случае, если для ν-почти всех $y \in Y$ условные меры μ_y удовлетворяют условию* (4).

Однако уже в случае форм Дирихле с градиентами вдоль двумерного (под)пространства возникают трудности. Для $\mathbb{R}^2$ М.Фукусима высказал следующую гипотезу: *Если форма (3) замыкаема, то мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на* $\mathbb{R}^2$. Эта гипотеза до сих пор остается не доказанной и не опровергнутой.

Пример 1. Рассмотрим на плоскости салфетку Серпиньского S (рис. 1) — компакт, полученный из треугольника $\{y \geqslant 0, y + |x|\sqrt{3} \leqslant 1\}$ таким путем: сначала вырежем область, ограниченную средними линиям исходного треугольника; затем применим эту процедуру к трем

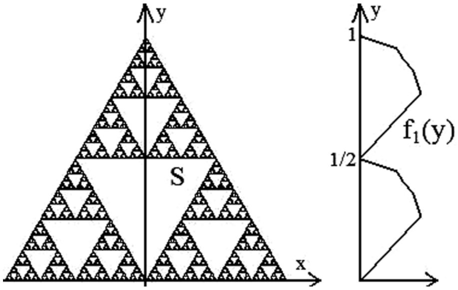

Рис. 1. Салфетка Серпиньского

оставшимся треугольникам; затем — к девяти оставшимся и т.д. На S рассмотрим меру Хаусдорфа χ_α размерности $\alpha = \ln 3 / \ln 2$, т.е. $\chi_\alpha(A) = \underline{\lim}_{\delta \to 0} N(\delta)\delta^\alpha$, где $N(\delta)$ — число кругов радиуса δ, покрывающих множество A. Тогда $0 < \chi_\alpha(S) < +\infty$.

Незамыкаемость градиентной формы Дирихле, соответствующей мере χ_α на S, можно доказать, построив последовательность функций $f_n(x, y) = f_n(y)$ со свойствами: $f_n(k \cdot 2^{-n}) = 0$;

$$f'(y) = 1 \text{ на } U_n := \bigcup_k \{k \cdot 2^{-n} < y < (k+1)2^{-n} - 2^{-2n}\};$$

$$\int\limits_{S \setminus U_n} (f')^2 d\chi_\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

(добиться последнего можно, делая $|f'(y)|$ меньше в более широких „слоях” S и больше — в узких). Тогда в $L^2(S, \chi_\alpha)$ $f_n \to 0$, но $\nabla f_n \to (0; 1)$.

Долгое время оставалась открытой также проблема, поставленная М. Рёкнером [2]: *существует ли мера μ на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$, такая, что форма (3) замыкаема, а форма*

$$\mathcal{E}_x(f) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\mu \tag{5}$$

не замыкаема? Положительное решение этой проблемы приведено в п. 4.

4. Продолжения соболевских функций. Пусть μ — неотрицательная мера на пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть $p \geqslant 1$. Напомним, что соболевский класс 1 порядка по мере μ определяется как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|f\|_{1,p} = \left(\int |f|^p + |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Обозначим через λ^n меру Лебега на $\mathbb{R}^n$. В случае, когда мера μ является сужением меры Лебега на множество $U \subset \mathbb{R}^n$, используется также обозначение $W^{1,p}(U) = W^{1,p}(\lambda^n \mid_U)$. Известна следующая теорема о продолжении соболевских функций [5]:

Теорема 3. *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, граница которого кусочно липшицева. Тогда для каждого $p \geqslant 1$ существует линейный оператор продолжения $E_1\colon\ W^{1,p}(G) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами*: $E_1 f \mid_G = f$ *почти всюду*; $\|E_1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_p \cdot \|f\|_{L^p(G)}$; $\|\nabla(E_1 f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leqslant c_p \cdot \|\nabla f\|_{L^p(G,\mathbb{R}^n)}$.

Следствие 1. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, а G_0 — такое открытое множество, что $[G_0] \subset G$, и граница множества $G \backslash [G_0]$ кусочно липшицева. Обозначим через T преобразование подобия в пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е. преобразование вида

$$T\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(x) = y + r \cdot J(x), \tag{6}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$ — фиксированный вектор, $r > 0$, J — ортогональный линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякого $p \geqslant 1$ существует линейный оператор E_T продолжения функций из $W^{1,p}(T(G\backslash[G_0]))$ в $W^{1,p}(T(G))$, такой, что $E_T f \mid_{T(G\backslash[G_0])} = f$, $\|E_T f\|_{L^p(T(G))} \leqslant c_p \cdot \|f\|_{L^p(T(G\backslash[G_0]))}$,

$$\|\nabla(E_T f)\|_{L^p(T(G),\mathbb{R}^n)} \leqslant c_p \cdot \|\nabla f\|_{L^p(T(G\backslash[G_0]),\mathbb{R}^n)},$$

причем константа c_p зависит только от G и G_0 и не зависит от y, r и J.

Теорема 4. *Пусть Q — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с кусочно липшицевой границей. Пусть открытые множества G и G_0, $G_0 \subset G$, удовлетворяют условиям следствия (1). Возьмем счетное семейство преобразований $\{T_k\}$ вида (6), таких, что $T_k(G) \subset Q$ и $T_k(G) \cap T_j(G) = \emptyset$ при $k \neq j$. Положим $S = Q \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k([G_0])$. Тогда* (i) *квадратичная форма $\mathcal{E}'(f)\Big|_{f \in C} = \int_S |\nabla f|^2 \, d\lambda^n$ замыкаема в $L^2(\lambda^n \mid_S)$,* (ii) *соболевские классы $W^{1,p}(S)$, $p \geqslant 1$, корректно определены.*

Доказательство 1. Корректная определенность класса $W^{1,p}(\mu)$ означает, что градиент функции $f \in W^{1,p}(\mu)$, определяемый как L^p-предел градиентов функций $f_n \in C_0^\infty$ с $\|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \to 0$ и $\|f_n - f_m\|_{1,p} \to 0$, не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.

Зафиксируем $p \in [1; +\infty)$. Обозначим через $E(k)$ оператор продолжения из $W^{1,p}(T_k(G\backslash[G_0]))$ в $W^{1,p}(T_k(G))$, описанный в следствии (1). Пусть f — функция из класса $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$E_0 f = \begin{cases} f(x), & x \in S, \\ \big(E_{T_k}(f \mid_{T_k(G\backslash[G_0])})\big)(x), & x \in T_k([G_0]),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда функция $E_0 f$ входит в соболевский класс $W^{1,p}(Q)$. Затем применим оператор продолжения E_1 из $W^{1,p}(Q)$ в $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (который увеличивает $W^{1,p}$-нормы не более чем в C_p раз). Получаем

$$\big\|E_1\circ E_0 f\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p\cdot(1+c_p)\cdot\|f\|_{L^p(S)};$$
$$\big\|\nabla(E_1\circ E_0 f)\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p\cdot(1+c_p)\cdot\|\nabla f\|_{L^p(S,\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть задано векторное поле $V\in L^p(S,\mathbb{R}^n)$ и последовательность гладких функций $f_k\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$\|f_k\|_{L^p(S)}\to 0,\quad \|\nabla f_k - V\|_{L^p(S,\mathbb{R}^n)}\to 0\quad \text{при } k\to\infty.$$

Чтобы доказать, что соболевский класс $W^{1,p}(S)$ корректно определен, нам надо показать, что $V=0$ почти всюду на S. Пусть

$$g_k := E_1\circ E_0 f_k\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n);$$

пусть $h_k\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|h_k-g_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}<\frac{1}{k}$. Тогда мы получаем

$$\|h_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < C_p(1+c_p)\|f_k\|_{L^p(S)}+\frac{1}{k}\quad \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\quad 0;$$

$$\|\nabla(h_k-h_m)\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} < C_p(1+c_p)\|\nabla(f_k-f_m)\|_{L^p(S,\mathbb{R}^n)}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}\underset{m,k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В силу замыкаемости соболевских градиентов в $\mathbb{R}^n$ отсюда следует, что $\|\nabla h_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\to 0$. Поскольку $f_k=g_k$ на S, мы получаем

$$\|\nabla f_k\|_{L^p(S,\mathbb{R}^n)}\leqslant\|\nabla g_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}<\|\nabla h_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}+\frac{1}{k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда $V=0$ почти всюду на S. Следовательно, соболевский градиент первого порядка корректно определен для функций из $W^{1,p}(S)$ с $p\geqslant 1$. В частности, если взять $p=2$, это означает замыкаемость формы $\mathcal{E}'$. Теорема доказана.

4. Решение проблемы Рёкнера. Применим теорему (4) к плоскости $\mathbb{R}^2$ и открытым квадратам

$$G=(-3;3)\times(-3;3),\qquad G_0=(-2;2)\times(-2;2).$$

Нам понадобится следующая лемма технического характера.

Лемма 1. *Пусть дан прямоугольник* $\Pi=[a;b]\times(0;1)$, $0<b-a<1$ (*рис. 2*). *Тогда существует множество квадратов*

$$\mathcal{M}_{a,b}=\Big\{(x_k-2\varepsilon;x_k+2\varepsilon)\times(y_k-2\varepsilon;y_k+2\varepsilon)\Big\}_{k=0}^{m},\tag{7}$$

лежащих в Π, *таких, что*

1) *квадраты* $(x_k-3\varepsilon;x_k+3\varepsilon)\times(y_k-3\varepsilon;y_k+3\varepsilon)$ *также лежат в* Π;
2) *квадраты* $(x_k-3\varepsilon;x_k+3\varepsilon)\times(y_k-3\varepsilon;y_k+3\varepsilon)$ *не пересекаются*;
3) *при всяком* $h\in[1/4;3/4]$ *прямая* $\{y=h\}$ *пересекает хотя бы один квадрат из* $\mathcal{M}_{a,b}$.

Сформулируем основной результат этого раздела. В этом примере используется канторово множество положительной меры, напомним

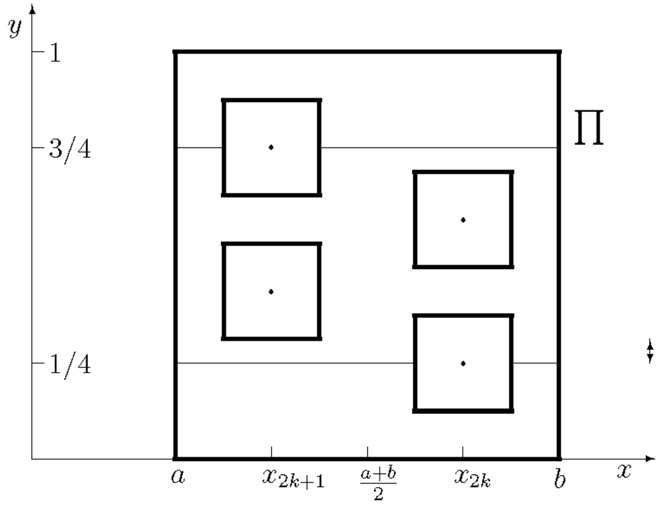

Рис. 2. Иллюстрация к Лемме 1

его конструкцию. Берем отрезок $I := [0; 1]$. Из середины I изымаем интервал $(a; b)$ длины 4^{-1}, т.е. $a = 3/8$, $b = 5/8$. Тогда $I \backslash (a; b)$ распадается на два отрезка $I_0 = [0; 3/8]$ и $I_1 = [5/8; 1]$. Затем из середины отрезка I_0 изымаем интервал $(a_0; b_0)$ длины 4^{-2} (в результате $I_0 \backslash (a_0; b_0)$ распадается на I_{00} и I_{01}), а из середины I_1 — интервал $(a_1; b_1)$ длины 4^{-2} ($I_1 \backslash (a_1; b_1)$ распадается на I_{10} и I_{11}). Потом из середин отрезков I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11} выбрасываем, соответственно, интервалы $(a_{00}; b_{00})$, $(a_{01}; b_{01})$, $(a_{10}; b_{10})$, $(a_{11}; b_{11})$, каждый — длины 4^{-3} и т.д. В пределе получается компакт

$$\mathbf{K} = I \backslash (a; b) \backslash (a_0; b_0) \backslash (a_1; b_1) \backslash (a_{00}; b_{00}) \backslash (a_{01}; b_{01}) \backslash (a_{10}; b_{10}) \backslash \ldots \qquad (8)$$

с мерой Лебега 1/2.

Пример 2. Пусть $Q = (0; 1) \times (0; 1)$. Пользуясь результатами леммы (1) и обозначениями (7), (8), построим счетное множество квадратов

$$\mathcal{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{i_1=0}^{1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{1} \mathcal{M}_{a_{i_1 \ldots i_n}, b_{i_1 \ldots i_n}} \Big) \cup \mathcal{M}_{a,b}.$$

Положим

$$F := Q \backslash \bigcup_{K \in \mathcal{M}} [K].$$

Пусть мера μ есть сужение меры Лебега на F. Тогда квадратичная форма (3) замыкаема, а форма (5) не замыкаема.

Доказательство 2. По построению интервалов (a_*, b_*) и квадратов из наборов $\mathcal{M}_{a_*, b_*}$ видно, что семейство квадратов $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям теоремы (4), из которой следует, что форма (3) замыкаема в $L^2(\lambda^2 |_F)$.

Тот факт, что частная форма (5) не замыкаема, вытекает из того, что условие теоремы (2) не выполнено, а именно, условные меры μ_{y_0} на прямых $\{y = y_0\}$ не удовлетворяют условию Хамзы (4) при $1/4 \leqslant y_0 \leqslant 3/4$ (в то время как $\mu\{1/4 \leqslant y \leqslant 3/4\} > 0$). Действительно, множество $F \cap \{y = y_0\}$ является нигде не плотным, т.е. в окрестности любой его точки $(x; y_0)$ найдется пустой интервал, а из этого следует, что минус первая степень плотности условной меры на прямой не интегрируема ни в какой окрестности точки x.

Мера, построенная в примере 2, имеет носитель с “дырами”. Однако, можно улучшить эту меру так, чтобы ее носитель совпадал со всей плоскостью $\mathbb{R}^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1996. – 400 с.
2. Ma Z. M., Röckner M. Introduction to the Theory of (non-symmetric) Dirichlet Forms. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. – 209 p.
3. Hamza M. Détermination des formes de Dirichlet sur $\mathbb{R}^n$: Thèse 3e cycle. – Orsay, 1975.
4. Albeverio S., Röckner M. Classical Dirichlet forms on topological vector spaces. Closability and a Cameron–Martin formula // Journal of Functional Analysis. – 1990. – V. 88. – P. 395–436.
5. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012