УДК 519.119

Н. М. Меженная

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛА $(a,d)$-СЕРИЙ ЗАДАННОГО ВЕСА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

*В работе получены пуассоновская и нормальная предельные теоремы для числа $(a,d)$-серий заданного веса в последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в конечном алфавите с оценками скорости сближения с сопровождающими распределениями.*

**E-mail: natalia.mezhennaya@gmail.com**

***Ключевые слова***: *плотные серии, пуассоновская аппроксимация, центральная предельная теорема, метод Чена-Стейна, оценки скорости в предельных теоремах.*

Согласно [1] отрезок последовательности $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ плотно заполнен знаком $a$, если $a \in \{x_i, x_{i+1}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Плотно заполненный знаком $a$ отрезок называется плотной $a$-серией, если он не содержится ни в каком плотно заполненном знаком $a$ отрезке большей длины. Весом плотной $a$-серии будем называть число входящих в нее знаков $a$. В работе [1] была поставлена задача об изучении вероятностных свойств статистик, связанных с числом плотных серий в последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин над конечным алфавитом. Известно (см. [2, 3]), что такие статистики могут использоваться для оценки качества датчиков случайных чисел специального вида.

В работе [1] получена многомерная предельная теорема Пуассона для числа плотных серий заданного веса без оценки скорости сходимости в этой теореме, а также исследовано предельное поведение числа плотных серий заданной длины. В работе [4] получена оценка расстояния по вариации между распределением чисел плотных серий заданной длины и веса и многомерным пуассоновским сопровождающим распределением.

В настоящей работе рассматривается естественное обобщение этой задачи на случай, когда знаки $a$, образующие плотную серию, могут быть разделены более чем одним знаком, отличным от $a$.

Будем говорить, что отрезок последовательности $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *заполнен знаком* $a$ *с допуском* $d$, если $a \in \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+d}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k-2$. (Далее такие отрезки будем называть $(a,d)$-*цепочками.*) $(a,d)$-цепочку будем называть $(a,d)$-*серией*, если она не вкладывается в $(a,d)$-цепочку большей длины. *Длиной* $(a,d)$-серии будем называть число знаков в наименьшем отрезке последовательности, содержащем все знаки $a$ $(a, d)$-серии. Число знаков $a$ в $(a, d)$-серии будем называть ее *весом*. *Началом* $(a, d)$-серии будем называть место появления первого входящего в нее знака $a$.

Настоящая работа посвящена выводу пуассоновской и центральной предельных теорем для числа $(a, d)$-серий заданного веса.

Заметим, что если изучать свойства $(a, d)$-серий в последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин над конечным алфавитом, то вместо этой последовательности можно рассматривать последовательность Бернулли, заменив все знаки, отличные от $a$, на $\bar{a}$. Поэтому далее будем рассматривать только последовательности Бернулли.

Пусть $\{\ldots, X_1, X_2, \ldots, X_T, \ldots\}$ — последовательность Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$. Зафиксируем натуральные числа $d$ и $w$. Пусть $E_t$ — случайное событие, состоящее в том, что в момент $t$ началась $(1, d)$-серия веса $w$. Определим случайную величину

$$\xi_w = \sum_{t=1}^{T} \mathbf{I}\{E_t\}, \tag{1}$$

равную числу $(1, d)$-серий веса $w$, которые начинаются со знаков, лежащих в отрезке последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (здесь через $\mathbf{I}\{B\}$ обозначен индикатор события $B$).

Определим числа $p_w$ равенством

$$\mathbf{EI}\{E_t\} = \mathbf{EI}\{E_1\} = (1-p)^{2(d+1)} p_w, \quad w = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Согласно формуле (2) величина $p_w$ — это вероятность того, что со знака $X_1$ в последовательности $\{\ldots, X_1, X_2, \ldots, X_T, \ldots\}$ начинается $(1, d)$-цепочка веса $w$, в которой первый и последний знак — единицы.

**Лемма 1.** *При любом натуральном числе* $w$

$$p_w = p^w \left( \sum_{k=0}^{d} (1-p)^k \right)^{w-1} = p \left(1 - (1-p)^{d+1}\right)^{w-1}. \tag{3}$$

Отметим, что при $p \in (0, 1)$ величина $p \sum_{k=0}^{d} (1-p)^k \in (0, 1)$, поэтому с ростом $w$ вероятность $p_w$ убывает как геометрическая прогрессия.

**Лемма 2.** *При любых натуральных числах* $w$ *и* $d$

$$\lambda_w = \mathbf{E}\xi_w = (1-p)^{2(d+1)} T p_w, \tag{4}$$

$$\mathbf{D}\xi_w \geqslant \lambda_w \left(1 - 2p_w (1-p)^{2(d+1)} (w+1)(d+1)\right). \tag{5}$$

Можно показать, что величина в правой части (5) при всех натуральных $w$ и $d$ не меньше, чем $(1 - 2/e)\lambda_w$. Кроме того, из доказательства леммы 1 нетрудно получить оценку для дисперсии сверху,

например,
$$\mathbf{D}\xi_w \leqslant \lambda_w \left(1 + 2p_w(1-p)^{(d+1)}(d+1)\right).$$

Обозначим через $\rho(X, Y)$ расстояние по вариации между распределениями случайных величин $X$ и $Y$.

**Теорема 1.** *При любых натуральных числах $d$ и $w$*
$$\rho(\xi_w, \pi_w) \leqslant 2(w+2)(d+1)p_w, \tag{6}$$
*где $\pi_w$ — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda_w$.*

Распределение случайной величины $\pi_w$ далее будем называть *сопровождающим пуассоновским распределением* для случайной величины $\xi_w$.

Далее везде в наших рассуждениях будем считать, что параметр $d$ фиксирован.

*Замечание.* Правая часть (6) стремится к нулю, если $w \to \infty$ ($T \to \infty$). Это позволяет вывести из оценки теоремы 1 не только предельную теорему Пуассона, но и центральную предельную теорему (как результат сближения в смысле сходимости к нулю расстояния по вариации до пуассоновского распределения с растущим параметром).

**Следствие 1.** *Пусть при $T \to \infty$ параметры схемы меняются так, что $w \to \infty$ и $\lambda_w \to \lambda \in [0, \infty)$. Тогда закон распределения случайной величины $\xi_w$ является асимптотически пуассоновским с параметром $\lambda$.*

Скорость сближения с сопровождающим пуассоновским распределением в условиях следствия 1 имеет порядок $O(wT^{-1})$ в метрике расстояния по вариации.

Замечание. Можно показать, что условия следствия 1 выполнены, если, например, параметр $w$ выбран равным
$$w = -\left[\frac{\ln T}{\ln\left(p\sum_{k=0}^{d}(1-p)^k\right)}\right].$$

**Следствие 2.** *Пусть при $T \to \infty$ параметры схемы меняются так, что $w \to \infty$ и $\lambda_w \to \infty$. Тогда закон распределения случайной величины $\xi_w^* = \dfrac{\xi_w - \lambda_w}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_w}}$ совпадает в пределе со стандартным нормальным законом распределения.*

Скорость сближения с сопровождающим пуассоновским распределением в условиях следствия 2 имеет порядок $O\left(\dfrac{w\lambda_w}{T}\right)$ в метрике расстояния по вариации.

*Замечание.* В условиях следствия 2 также имеет место сходимость к нормальному распределению в равномерной метрике, однако ее скорость имеет порядок, отличный от $O\left(\dfrac{w\lambda_w}{T}\right)$. Она зависит от скорости сближения распределения величины $\pi_w^* = \dfrac{\pi_w - \lambda_w}{\sqrt{\lambda_w}}$ со стандартным нормальным законом. Обозначим через $\Phi(\cdot)$ функцию распределения стандартного нормального закона, а через $F_{\xi_w^*}(\cdot)$ и $F_{\pi_w^*}(\cdot)$ — функции распределения случайных величин $\xi_w^*$ и $\pi_w^*$ соответственно. Неравенство Берри–Эссеена позволяет показать, что

$$\sup_{x\in\Re}|F_{\pi_w^*}(x) - \Phi(x)| = O(\lambda_w^{-1/2}).$$

Поэтому

$$\sup_{x\in\Re}|F_{\xi_w^*}(x) - \Phi(x)| = O\left(\frac{w\lambda_w}{T} + \lambda_w^{-1/2}\right). \tag{7}$$

Следствия 1 и 2 не описывают такого изменения параметров, при котором $w$ остается фиксированным при $T \to \infty$. В этом случае для случайной величины $\xi_w$ также имеет место центральная предельная теорема, которая может быть выведена из следующего утверждения.

**Теорема 2.** *При любых натуральных числах $d$ и $w$*

$$\sup_{x\in\Re}\left|F_{\xi_w^*}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{128(1+\sqrt{6})(w+1)^2(d+1)^2}{\sqrt{T}p_w^{3/2}(1-p)^{3(d+1)}\left(1-p_w(1-p)^{2(d+1)}(w+1)(d+1)\right)^{3/2}}. \tag{8}$$

**Следствие 3.** *Пусть при $T \to \infty$ параметр $w$ остается фиксированным. Тогда закон распределения случайной величины $\xi_w^* = \dfrac{\xi_w - \lambda_w}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_w}}$ совпадает в пределе со стандартным нормальным законом распределения, причем скорость сходимости к нему имеет порядок $O(T^{-1/2})$ в равномерной метрике.*

Теорема 2 также позволяет получить оценки скорости сходимости в условиях следствия 2 с дополнительным условием $\dfrac{w^4}{Tp_w^3} \to 0 (T \to \infty)$, а именно

$$\sup_{x\in\Re}|F_{\xi_w^*}(x) - \Phi(x)| = O\left(\frac{w^2}{p_w\sqrt{\lambda_w}}\right). \tag{9}$$

Перейдем к сравнению оценок (7) и (9). Так как $\dfrac{w^2}{p_w\sqrt{\lambda_w}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_w}}\right)$, то достаточно ограничиться сравнением первого слагаемого в правой части (7) и (9). Рассмотрим отношение правых частей (7) и (9)

$$\frac{w\lambda_w}{T}\frac{p_w\sqrt{\lambda_w}}{w^2} = \frac{wTp_w}{T}\frac{p_w\sqrt{Tp_w}}{w^2} = \frac{\sqrt{Tp_w^5}}{w}.$$

Если последнее отношение стремится к нулю (при $T = o(wp_w^5)$), то $\frac{w\lambda_w}{T} = o\left(\frac{w^2}{p_w\sqrt{\lambda_w}}\right)$ и оценка (7) лучше. В противном случае стоит предпочесть оценку (9).

**Доказательства.** ***Доказательство леммы 1.*** Очевидно, что $p_1 = p$. Далее выразим вероятность $p_w$ через $p_{w-1}$. Для этого заметим, что если в последовательности начиная со знака $X_1$ появилась $(1, d)$-цепочка веса $(w-1)$, то для ее продолжения до веса $w$ необходимо, чтобы любой из $(d+1)$ знаков, стоящих за ней в последовательности, был равен единице, а именно при $w \geqslant 2$

$$p_w = pp_{w-1} + p(1-p)p_{w-1} + p(1-p)^2 p_{w-1} + \ldots + p(1-p)^d p_{w-1} =$$
$$= \left(p\sum_{k=0}^{d}(1-p)^k\right) p_{w-1} = \left(p\sum_{k=0}^{d}(1-p)^k\right)^2 p_{w-2} = \ldots =$$
$$= \left(p\sum_{k=0}^{d}(1-p)^k\right)^{w-1} p_1 = p^w \left(\sum_{k=0}^{d}(1-p)^k\right)^{w-1}.$$

Остается заметить, что при $w = 1$ последняя формула остается верной. Лемма 1 доказана.

***Доказательство теоремы 1.*** Воспользуемся известным методом Чена–Стейна (см. [5]). Для каждого $t \in \{1, \ldots, T\}$ выберем такое множество $\mathcal{O}(t)$, чтобы событие $E_t$ и набор событий $\{E_s,\ s \in \mathcal{O}(t)\}$ были независимы. Если последовательность $\{\ldots, X_1, X_2, \ldots, X_T, \ldots\}$ состоит из независимых случайных величин, то в $\mathcal{O}(t)$ нужно отнести все такие события $E_s$, что $E_t$ и $E_s$ зависят хотя бы от одного общего члена последовательности $\{\ldots, X_1, X_2, \ldots, X_T, \ldots\}$. Заметим, что $(1, d)$-серия веса $w$ может иметь длину от $w$ до $(w-1)(d+1) + 1 + 2(d+1)$, так как между двумя единицами в ней стоит не более $d$ нулей, а по краям стоят по $(d+1)$ нулю. Поэтому определим $\mathcal{O}(t)$ как

$$\mathcal{O}(t) = \{s \in \{1, \ldots, T\}\colon |s-t| \leqslant (w-1)(d+1) + 1 + 2d + 1 = = (w+1)(d+1)\}. \quad (10)$$

Согласно теореме 1 работы [5], имеет место оценка для расстояния по вариации

$$\rho(\xi_w, \pi_w) \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda_w}}{\lambda_w}(S_1 + S_2), \quad (11)$$

где

$$S_1 \leqslant \sum_{t=1}^{T} \sum_{s \in \mathcal{O}(t)} \mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{EI}\{E_s\}, \quad S_2 \leqslant \sum_{t=1}^{T} \sum_{s \in \mathcal{O}(t)\setminus\{t\}} \mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\}.$$

Перейдем к оценке приведенных сумм. В силу однородности последовательности $\{\ldots, X_1, X_2, \ldots, X_T, \ldots\}$ $\mathbf{EI}\{E_t\} = \mathbf{EI}\{E_1\}$. Из (2) имеем

$$S_1 \leqslant \sum_{t=1}^{T} \sum_{s \in \mathcal{O}(t)} (1-p)^{4(d+1)} p_w^2 = T(1-p)^{4(d+1)} p_w^2 |\mathcal{O}(t)| =$$
$$= 2T(w+1)(d+1)(1-p)^{4(d+1)} p_w^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2T(w+1)(d+1)(1-p)^{2(d+1)} p_w^2. \quad (12)$$

Теперь перейдем к оцениванию суммы $S_2$. События $E_t$ и $E_s$, $s \in \mathcal{O}(t)$, совместны, если соответствующие событиям серии пересекаются только по ограничивающим их нулям или при $t = s$. Пусть длина $(1, d)$-серии веса $w$, которая начинается со знака $X_t$, равна $r_t$, длина $(1, d)$-серии веса $w$, которая начинается со знака $X_s$, равна $r_s$, и $s > t$. Тогда события $E_t$ и $E_s$, $s \in \mathcal{O}(t)$, совместны, если $s - d - 1 = t + r_t, \ldots, t + r_t + d$, то есть $s = t + r_t + d + 1, \ldots, t + r_t + 2d + 1$. При этом если $s = t + r_t + d + k + 1$, то

$$\mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\} = \frac{1}{(1-p)^{d+1-k}} p_w^2 (1-p)^{4(d+1)}, \quad k = 0, 1, \ldots, d. \quad (13)$$

Аналогичное равенство можно доказать в случае $s < t$. Так как выражение в правой части (13) не зависит от величин $r_t$ и $r_s$, то

$$\sum_{s \in \mathcal{O}(t)\setminus\{t\}} \mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\} =$$
$$= 2\left(\frac{1}{1-p} + \ldots + \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\right) p_w^2 (1-p)^{4(d+1)} \leqslant$$
$$\leqslant 2(d+1) p_w^2 (1-p)^{2(d+1)}.$$

Таким образом, из последней формулы и определения $S_2$ получаем

$$S_2 \leqslant 2T(d+1) p_w^2 (1-p)^{2(d+1)}. \quad (14)$$

Подставляя выражения (4), (12) и (14) в (11), имеем

$$\rho(\xi_w, \pi_w) \leqslant \frac{1}{T p_w (1-p)^{2(d+1)}} \times$$
$$\times 2T(1-p)^{2(d+1)} p_w^2 \left((w+1)(d+1) + d + 1\right) = 2(w+2)(d+1) p_w.$$

Теорема 1 доказана.

***Доказательство леммы 2.*** Согласно определению (1)

$$\mathbf{D}\xi_w = \mathbf{D}\left(\sum_{t=1}^{T} \mathbf{I}\{E_t\}\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \mathbf{DI}\{E_t\} + 2\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=t+1}^{T} Cov(\mathbf{I}\{E_t\}, \mathbf{I}\{E_s\}) =$$

$$= \lambda_w \left(1 - p_w(1-p)^{2(d+1)}\right) + 2\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=t+1}^{T} Cov(\mathbf{I}\{E_t\}, \mathbf{I}\{E_s\}). \quad (15)$$

Далее воспользуемся определением (10) множеств $\mathcal{O}(t)$ из доказательства теоремы 1. Если $s \notin \mathcal{O}(t)$, то $Cov(\mathbf{I}\{E_t\}, \mathbf{I}\{E_s\}) = 0$. Значит,

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=t+1}^{T} Cov(\mathbf{I}\{E_t\}, \mathbf{I}\{E_s\}) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{\substack{s\in\mathcal{O}(t),\\ s\geqslant t+1}} Cov(\mathbf{I}\{E_t\}, \mathbf{I}\{E_s\}).$$

Так как при $s \in \mathcal{O}(t)$

$$Cov(\mathbf{I}\{E_t\}, \mathbf{I}\{E_s\}) = \mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\} - p_w^2(1-p)^{4(d+1)},$$

то для вычисления $\mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\}$ проведем те же рассуждения, что и для суммы $S_2$ при доказательстве теоремы 1. С учетом несовместности событий и формулы (13) получим

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{\substack{s\in\mathcal{O}(t),\\ s\geqslant t+1}} Cov(\mathbf{I}\{E_t\}, \mathbf{I}\{E_s\}) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\sum_{\substack{s\in\mathcal{O}(t),\\ s\geqslant t+1}} \left(\mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\} - p_w^2(1-p)^{4(d+1)}\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=t+1}^{t+(w+1)(d+1)} \left(\mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\} - p_w^2(1-p)^{4(d+1)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant T\left(\frac{1}{1-p} + \ldots + \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\right) p_w^2(1-p)^{4(d+1)} -$$

$$- T(w+1)(d+1)p_w^2(1-p)^{4(d+1)} =$$

$$= Tp_w^2(1-p)^{4(d+1)}\left(\left(\frac{1}{1-p} + \ldots + \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\right) - (w+1)(d+1)\right) =$$

$$= \lambda_w p_w(1-p)^{2(d+1)}\left(\left(\frac{1}{1-p} + \ldots + \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\right) - (w+1)(d+1)\right).$$

(Знак $\geqslant$ во второй строке появляется за счет того, что в $\mathcal{O}(t)$ есть такие точки $s$, что $\mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\} = p_w^2$, но в вычислении суммы мы вместо этого считаем, что $\mathbf{EI}\{E_t\}\mathbf{I}\{E_s\} = 0$.)

Подставляя последнее выражение в формулу (15), получаем оценку

$$\mathbf{D}\xi_w \geqslant \lambda_w \left(1 - p_w(1-p)^{2(d+1)}\right) +$$
$$+2\lambda_w p_w (1-p)^{2(d+1)} \left( \left( \frac{1}{1-p} + \ldots + \frac{1}{(1-p)^{d+1}} \right) - (w+1)(d+1) \right).$$

Так как $\frac{1}{1-p} + \ldots + \frac{1}{(1-p)^{d+1}} > d+1$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\xi_w \geqslant \lambda_w \left(1 - p_w(1-p)^{2(d+1)}\right) &+ \\ + 2\lambda_w p_w (1-p)^{2(d+1)} \left(d+1-(w+1)(d+1)\right) &= \\ = \lambda_w \left(1 - p_w(1-p)^{2(d+1)}\left(1+2w(d+1)\right)\right) &\geqslant \\ \geqslant \lambda_w \left(1 - 2p_w(1-p)^{2(d+1)}(1+w)(d+1)\right)&. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы 2.*** Воспользуемся оценкой, полученной в работе [6]. Пусть $\{Z_n, n \in V\}$ — система случайных величин с графом зависимостей $G$. Определение и свойства графа зависимостей приведены в работе [7]. Обозначим через $D$ максимальную степень вершины в $G$. Пусть существует число $B > 0$, для которого $\mathbf{P}\{|Z_n - EZ_n| \leqslant B\} = 1$ для любого $n \in V$. Тогда для случайной величины $W = \sum\limits_{n \in V} Z_n$ имеет место оценка

$$\left| \mathbf{P}\left\{ \frac{W - \mathbf{E}W}{\sqrt{\mathbf{D}W}} < x \right\} - \Phi(x) \right| \leqslant 32(1+\sqrt{6})|V|D^2B^3/(\mathbf{D}W)^{3/2}. \quad (16)$$

Применим оценку (16) к набору случайных индикаторов $\{\mathbf{I}\{E_t\}, t = 1, \ldots, T\}$. В этом случае можно взять $B = 1$. Граф зависимостей системы $\{\mathbf{I}\{E_t\}, t = 1, \ldots, T\}$ обладает тем свойством, что вершина с номером $t$ и набор вершин $\{1, \ldots, T\} \setminus \mathcal{O}(t)$ не связаны ни одним ребром (см. (10)). Значит, $D \leqslant 2(w+1)(d+1)$. Подставим полученные оценки в (16)

$$\left|F_{\xi_w^*}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant 128(1+\sqrt{6})T(w+1)^2(d+1)^2/(\mathbf{D}\xi_w)^{3/2}.$$

Далее воспользуемся оценкой (5) для дисперсии $\mathbf{D}\xi_w$

$$\left|F_{\xi_w^*}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{128(1+\sqrt{6})T(w+1)^2(d+1)^2}{\lambda_w^{3/2}\left(1 - p_w(1-p)^{2(d+1)}(w+1)(d+1)\right)^{3/2}} =$$
$$= \frac{128(1+\sqrt{6})(w+2)^2(d+1)^2}{\sqrt{T}p_w^{3/2}(1-p)^{3(d+1)}\left(1 - p_w(1-p)^{2(d+1)}(w+1)(d+1)\right)^{3/2}}.$$

Теорема 2 доказана.

*Автор благодарен В.Г. Михайлову за ряд полезных замечаний при подготовке рукописи.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00139).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меженная Н. М. Предельные теоремы для числа плотных серий в случайной последовательности // Дискретная математика. – 2009. – Т. 21, № 1. – С. 105–116.
2. Golic J. Dj. Constrained embedding probability for two binary strings // SIAM Journal on Discrete Mathematics. – 1996. – V. 9, No. 3. – P. 360–364.
3. Михайлов В. Г., Меженная Н. М. Оценки для вероятности плотного вложения одной дискретной последовательности в другую // Дискретная математика. – 2005. – Т. 17, № 3. – С. 19–27.
4. Меженная Н. М. Предельная теорема Пуассона для числа плотных серий заданной длины и веса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". Специальный выпуск "Прикладная математика". – 2011. – С. 75–82.
5. Arratia R., Goldstein L., Gordon L. Two Moments Suffice for Poisson Approximations: The Chen-Stein Method // Annals of Probability. – 1989. – V. 17, No. 1. – P. 9–25.
6. Baldi P., Rinott Y. On Normal Approximations of Distributions in Terms of Dependency Graph // Annals of Probability. – 1989. – V. 17, No. 4. – P. 1646–1650.
7. Михайлов В. Г. Явные оценки в предельных теоремах для сумм случайных индикаторов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1994. – Т. 1, № 4. – С. 580–584.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012