УДК 519.6, 531.66, 532.516

Энергетический спектр в одной задаче о квантовом ротаторе

© А.А. Гурченков, Д.В. Башкина, Н.Т. Вилисова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследован спектр собственных значений квантовых систем, допускающих в классическом пределе существование квадратичных по импульсам первых интегралов. В качестве примеров рассмотрена задача о двумерной потенциальной яме конечной глубины и квантовом ротаторе.

Проведено сопоставление бифуркаций в классической и квантовой задачах. Показано, что наличие дополнительного первого интеграла накладывает лишь частичный запрет на существование сепаратрисных контуров. Выявлена алгебраическая структура классических интегралов, которая предопределяет возможность приведения функции Гамильтона к лиувиллевскому типу и разделению переменных в уравнении Гамильтона – Якоби, что влечет за собой разделение переменных в уравнении Шредингера.

Ключевые слова: *динамические системы, бифуркации, гамильтоновы системы.*

Введение. Настоящая работа посвящена нахождению и исследованию зависимости спектра собственных значений энергии в квантовом ротаторе от параметра семейства потенциалов. Прикладной интерес к рассматриваемой задаче определяется тем, что имеется некоторое число физически содержательных моделей, приводящих к необходимости исследования задачи о квантовом ротаторе. Достаточно упомянуть о движении двухатомной молекулы под действием поля, линейной молекулы, сцепленной одним из концов с поверхностью раздела двух фаз и т. д. Теоретический интерес поставленной задачи определяется также возможностью сопоставления полученных результатов с ранее выполненными исследованиями бифуркаций в соответствующей классической задаче [1–4].

Квантовый ротатор описывается уравнением Шредингера, определенном на единичной сфере, поэтому в общем случае задача определения спектра собственных значений энергии представляет собой двумерную задачу на собственные значения, решение которой вызывает трудности как в вычислении, так и в построении классификации полученных решений. Помимо двумерности задачи это вызвано еще и тем, что для ответа на поставленные в работе вопросы возникает необходимость исследования нескольких десятков собственных функций. В данной публикации исследуется многопараметрическое семейство потенциалов, которое допускает разделение переменных в стационарном уравнении Шредингера, существенно упрощающее исследование.

1. Сведение к параметрической задаче на собственные значения. Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{1}$$

с оператором Гамильтона

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta + U,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где $U = U(x, y, z)$ – потенциал; E – энергия; $\Psi = \Psi(x, y, z)$ – волновая функция; единицы измерения выбраны таким образом, чтобы постоянная Планка $\hbar$ равнялась единице.

В сферических координатах (r, θ, φ), где r – радиус-вектор точки; θ – азимутальный угол; φ – полярный угол,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta,$$

оператор Лапласа Δ имеет вид

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}.$$

Задача о квантовом ротаторе – это задача о движении квантовой частицы по сфере. Без потери общности можно считать, что радиус сферы равен единице. Тогда $\Psi(\theta, \varphi)$, $r = 1$ и лапласиан имеет вид

$$\Delta\Psi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}.$$

Описание семейства потенциалов, допускающих разделение переменных в уравнении Шредингера, проведем, согласно [1–3], в координатах (u_1, u_2) на единичной сфере, определенных соотношениями

$$u_1 + u_2 = \left(1 + \varepsilon\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta - \left(2 + \varepsilon\right),$$
$$u_1 u_2 = \left(1 + \varepsilon\right)\cos^2\theta.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – параметр конической системы координат (u_1, u_2) на единичной сфере, а сами координаты определены в прямоугольнике

$$-1-\varepsilon \le u_1 \le -1 \le u_2 \le 0,$$

который отображается на 1/8 единичной сферы. Координатные линии $u_1 = \text{const}$ и $u_2 = \text{const}$, как будет показано ниже, совпадают с соответствующими координатными линиями конической системы координат, которая иногда называется также сфероконической [5].

В этих новых переменных уравнение Шредингера записывается следующим образом:

$$-\frac{1}{2\left(u_2-u_1\right)}\sqrt{f(u_1)}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{f(u_1)}\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\left(u_2-u_1\right)}\sqrt{-f(u_2)}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{-f(u_2)}\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}\right)+U\left(u_1,u_2\right)\Psi = E\Psi,$$

где

$$f(u)=\left(u+1+\varepsilon\right)\left(u+1\right)u,$$

причем

$$f(u_1)>0,\ f(u_2)<0.$$

Теперь предположим, что потенциал U в новых переменных имеет вид

$$U=U\left(u_1,u_2\right)=\frac{U_2\left(u_2\right)-U_1\left(u_1\right)}{u_2-u_1},$$

тогда переменные в уравнении Шредингера [1] разделяются. Действительно, в этом случае уравнение Шредингера записывается в виде

$$\frac{1}{u_2-u_1}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{f(u_1)}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{f(u_1)}\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\right)+\left(Eu_1-U_1\left(u_1\right)\right)\Psi\right)+$$

$$+\frac{1}{u_2-u_1}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-f(u_2)}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{-f(u_2)}\frac{\partial \Psi}{\partial u_2}\right)-\left(Eu_2-U_2\left(u_2\right)\right)\Psi\right)=0, \quad (2)$$

допускающем разделение переменных $\Psi\left(u_1,u_2\right)=\Psi_1\left(u_1\right)\Psi_2\left(u_2\right)$.

Поскольку переменные (u_1,u_2) определены только на 1/8 части единичной сферы, необходимо иметь возможность продолжения их на всю сферу. Этого можно добиться, например, взяв в качестве функций $U_1(u_1)$ и $U_2(u_2)$ соответственно функции u_1^n и u_2^n. Достаточно рассмотреть случаи, когда $n = 2$ и $n = 3$:

$$U^{(1)}\left(u_1,u_2\right)=\frac{u_2^2-u_1^2}{u_2-u_1}=u_1+u_2, \quad (3)$$

$$U^{(2)}\left(u_1,u_2\right)=\frac{u_2^3-u_1^3}{u_2-u_1}=u_1^2+u_1u_2+u_2^2=\left(u_1+u_2\right)^2-u_1u_2, \tag{4}$$

Таким образом, потенциалы $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ являются многочленами от переменных u_1+u_2 и u_1u_2 и, согласно соотношениям (3), (4), легко продолжаются на всю единичную сферу. Отметим, что потенциал

$$U\left(u_1,u_2\right)=C_1U^{(1)}\left(u_1,u_2\right)+C_2U^{(2)}\left(u_1,u_2\right), \tag{5}$$

являющийся линейной комбинацией потенциалов $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, также допускает разделение переменных. Без потери общности можно считать, что $C_1 = 1$.

В исходных переменных $\vec r=(x,y,z)$ потенциал $U(x,y,z)$ (5) записывается так:

$$U(x,y,z)=\alpha\left(\vec r,A_\varepsilon\vec r\right)^2+\beta\left(\vec r,A_\varepsilon\vec r\right)^2-\alpha\left(1+\varepsilon\right)r_z^2.$$

Произвольные постоянные α, β определены соотношениями

$$\alpha=C_2,\ \ \beta=-C_1+2C_2\left(2+\varepsilon\right),$$

а диагональная матрица A_ε имеет вид

$$A_\varepsilon=-\mathrm{diag}\left(-1-\varepsilon,-1,0\right).$$

Для потенциала (5) уравнение Шредингера (1) записывается в виде системы

$$-\frac{1}{2}\sqrt{4f(u_1)}\frac{d}{du_1}\left(\sqrt{4f(u_1)}\frac{d\Psi_1}{du_1}\right)+Eu_1\Psi_1-C_1u_1^2-C_2u_1^3=\frac{1}{2}\Lambda\Psi_1; \tag{6}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-4f(u_2)}\frac{d}{du_2}\left(\sqrt{-4f(u_2)}\frac{d\Psi_2}{du_2}\right)-Eu_2\Psi_2+C_1u_2^2+C_2u_2^3=-\frac{1}{2}\Lambda\Psi_2, \tag{7}$$

где Λ – константа разделения.

Таким образом, получена так называемая параметрическая задача на собственные значения [4]. Здесь роль параметра играет E, а собственным значением является константа разделения Λ.

2. Переход к сфероконическим координатам. От переменных (u_1, u_2) перейдем к новым переменным (q_1, q_2), определенных соотношениями

$$q_1=\int\limits_{-1-\varepsilon}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{4f(u)}},\ \ q_2=\int\limits_{-1}^{u_2}\frac{du}{\sqrt{-4f(u)}}. \tag{8}$$

В силу равенств

$$\frac{\partial}{\partial u_1}=\frac{1}{\sqrt{4f(u_1)}}\frac{\partial}{\partial q_1},\quad \frac{\partial}{\partial u_2}=\frac{1}{\sqrt{-4f(u_2)}}\frac{\partial}{\partial q_2}$$

дифференциальные части уравнений (6), (7) принимают наиболее простой вид:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq_1^2}\Psi_1+\left(Eu_1-U_1\left(u_1\right)\right)\Psi_1=\frac{1}{2}\Lambda\Psi_1; \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq_2^2}\Psi_2+\left(Eu_2-U_2\left(u_2\right)\right)\Psi_2=\frac{1}{2}\Lambda\Psi_2. \tag{10}$$

Получим теперь в явном виде формулы для этой замены. Введем обозначения

$$a=0,\ b=-1,\ c=-1-\varepsilon,$$

$$q_1=\frac{1}{2}\int_{-1-\varepsilon}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{\left(u+1+\varepsilon\right)\left(u+1\right)u}}=\frac{1}{2}\int_{c}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{\left(a-u\right)\left(b-u\right)\left(u-c\right)}}.$$

Теперь, используя формулу (1.2.30) из [6], находим

$$q_1=\frac{1}{\sqrt{a-c}}F\left(\varphi_1,k_1\right),$$

где $F(\varphi, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода [7],

$$k_1=\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},\ k_1'=\sqrt{1-k_1^2}=\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}},$$

$$\varepsilon=\left(\frac{k_1}{k_1'}\right)^2,\ \varphi_1=\arcsin\sqrt{\frac{u_1-c}{b-c}}.$$

Из (3) следует, что

$$\sqrt{1+\varepsilon}\,q_1=F\left(\varphi_1,k_1\right)\ \text{или}\ \sqrt{\frac{u_1+1+\varepsilon}{\varepsilon}}=\operatorname{sn}\left(\sqrt{1+\varepsilon}\,q_1,k_1\right).$$

Таким образом,

$$u_1=\varepsilon\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{1+\varepsilon}\,q_1,k_1\right)-1-\varepsilon=$$

$$=\left(\frac{k_1}{k_1'}\right)^2\operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{k_1'}q_1,k_1\right)-\frac{1}{k_1'^2}=-\frac{1}{k_1'^2}\operatorname{dn}^2\left(\frac{1}{k_1'}q_1,k_1\right).$$

Второй из интегралов (8) вычислим аналогично:

$$q_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{-(u+1+\varepsilon)(u+1)u}} = \frac{1}{2}\int_{b}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{(a-u)(b-u)(u-c)}}.$$

Теперь, используя формулу (1.2.28) из [7], находим

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{a-c}} F(\varphi_2, k_2),$$

где $F(\varphi, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода [6],

$$k_2 = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon}},\ k_2' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

$$\varepsilon = \left(\frac{k_2'}{k_2}\right)^2,\ \varphi_2 = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u_2-c)}{(a-b)(b-c)}}.$$

Из (3) следует, что

$$\sqrt{1+\varepsilon}\, q_2 = F(\varphi_2, k_2) \text{ или } \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)(u_2+1)}{u_2+1+\varepsilon}} = \operatorname{sn}\left(\sqrt{1+\varepsilon}\, q_2, k_2\right),$$

$$\sqrt{\frac{u_2+1}{k_2^2 u_2+1}} = \operatorname{sn}\left(\frac{1}{k_2} q_2, k_2\right).$$

Выполнив очевидные преобразования после возведения в квадрат обеих частей этого уравнения:

$$u_2\left(1 - k_2^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{k_2} q_2, k_2\right)\right) = -\left(1 - \operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{k_2} q_2, k_2\right)\right),$$

получаем

$$u_2 = -\operatorname{cn}^2\left(\frac{1}{k_2} q_2, k_2\right) \Big/ \operatorname{dn}^2\left(\frac{1}{k_2} q_2, k_2\right).$$

Обратим внимание на то, что $k_1 = k_2'$ и $k_1' = k_2$. Это позволяет ввести один общий модуль k эллиптических функций.

Связь между координатами (u_1, u_2) и (q_1, q_2) определяется формулами

$$u_1 = -\frac{1}{k'^2} \operatorname{dn}^2\left(\frac{1}{k'} q_1, k\right),\ u_2 = -\operatorname{cn}^2\left(\frac{1}{k'} q_2, k'\right) \Big/ \operatorname{dn}^2\left(\frac{1}{k'} q_2, k'\right); \quad (11)$$

$$k = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},\ k' = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon}},\ \varepsilon = \left(\frac{k}{k'}\right)^2, \tag{12}$$

причем переход от одной системы координат к другой не меняет координатных линий на единичной сфере, а лишь «перенумеровывает» их. Координаты, определенные соотношениями (2), называются коническими или сфероконическими [6].

В случае потенциала (4), (9), (10) система уравнений, определяющая параметрическую задачу на собственные значения, принимает вид

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq_1^2}\Psi_1 + \left(Eu_1 - C_1u_1^2 - C_2u_1^3\right)\Psi_1 = \frac{1}{2}\Lambda\Psi_1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq_2^2}\Psi_2 + \left(Eu_2 - C_1u_2^2 - C_2u_2^3\right)\Psi_2 = \frac{1}{2}\Lambda\Psi_2,$$

где функции $u_1 = u_1(q_1)$ и $u_2 = u_2(q_2)$ определены соотношениями (11), (12).

Для завершения формулировки задачи необходимо определить граничные условия. Ограничимся случаем, когда

$$\frac{d}{dq_1}\Psi_1(0) = \frac{d}{dq_2}\Psi_2(0) = 0,\ \frac{d}{dq_1}\Psi_1(k'K) = \frac{d}{dq_2}\Psi_2(k'K') = 0, \tag{13}$$

где $K = K(k)$, $K' = K(k')$ – полные эллиптические интегралы первого рода, а значения $k'K$ и $K'k'$ в силу (13) являются четвертьпериодами функций $u_1(q_1)$ и $u_2(q_2)$ соответственно. По-существу, эти условия определяют задачу на 1/8 единичной сферы. Однако, учитывая четность потенциала, можно однозначно и без особенностей продолжить собственную функцию на всю единичную сферу.

Заключение. Дальнейшие исследования будут направлены на изучение вопросов управления квантовыми ротаторами с учетом [8–11], а также применение декомпозиционных преобразований в соответствующих оптимизационных задачах по методам [12–14], а также [15–31].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 12-01-00710.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. Доменные границы, солитоны и фазовые переходы. *Сб. Исследования по физике кинетических явлений*. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984, с. 56–65.

[2] Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. О новых случаях интегрируемости уравнений Ландау – Лифшица. *ЖЭТФ*, 1983, т. 84, вып. 2, с. 616–628.

[3] Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. Изменение энергии доменных границ в простой модели структурного перехода. *ЖЭТФ*, 1987, т. 93, вып. 4(10), с. 1436–1446.

[4] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. Москва, Наука, 1981, 800 с.

[5] Абромовиц М., Стиган И., ред. *Справочник по специальным функциям*. Москва, Наука, 1979, 832 с.

[6] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*. Москва, Наука, 1977, 344 с.

[7] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье*. Москва, Наука, 1967, 300 с.

[8] Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. II. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2006, № 3, с. 82–89.

[9] Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. I. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2006, № 1, с. 141–148.

[10] Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей вязкую жидкость. *Автоматика и телемеханика*, 2007, № 2, с. 81–94.

[11] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRC Press, 2013, 147 p.

[12] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Approximation and decomposition by extremal graphs. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1993, т. 33, № 2.

[13] Tsurkov V.I. Aggregation in a branch manufacturing problem and its extension. *Proc. 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing, INCOM '09*, 2009, pp. 310–312.

[14] Миронов А.А., Цурков В.И. Класс распределительных задач с минимаксным критерием. *Докл. Академии наук*, 1994, т. 336, № 1.

[15] Гурченков А.А. Момент сил внутреннего трения быстровращающегося цилиндрического сосуда, заполненного вязкой жидкостью. *Известия вузов. Приборостроение*, 2001, т. 44, № 2, с. 44.

[16] Gurchenkov A.A. Stability of a Fluid-Filled Gyroscope. *Инженерно-физический журнал*, 2002, т. 75, № 3, с. 28–32.

[17] Gurchenkov A.A., Yalamov Y.I. Unsteady viscous fluid flow between rotating parallel walls with allowance for thermal slip along one of them. *Doklady Physics*, 2002, vol. 47, no 1, pp. 25–28.

[18] Gurchenkov A.A. Stability of a Fluid-Filled Gyroscope. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics*, 2002, vol. 75, no 3, p. 554.

[19] Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии поперечного потока. *Прикладная механика и техническая физика*, 2001, т. 42, № 4, с. 48–51.

[20] Гурченков А.А., Корнеев В.В., Носов М.В. Динамика слабовозмущенного движения заполненного жидкостью гироскопа и задача управления. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, № 6, с. 904–911.

[21] Гурченков А.А. Диссипация энергии в колеблющейся полости с вязкой жидкостью и конструктивными неоднородностями. *Докл. Академии наук*, 2002, т. 382, № 4, с. 476.

[22] Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками. *Прикладная математика и механика*, 2002, т. 66, вып. 2, с. 251–255.

[23] Гурченков А.А., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. *Слоистые структуры в нелинейных векторных полях*. Москва, Изд-во ВЦ РАН, 2007, 177 с.

[24] Гурченков А.А., Кулагин Н.Е. *Об узорах симметрии в простых моделях нелинейного скалярного поля*. Москва, Изд-во ВЦ РАН, 2004, 84 с.

[25] Гурченков А.А., Мороз И.И., Попов Н.Н. Модель псевдориманова сферически симметричного пространства с нестационарной лоренц-инвариантной метрикой. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1166.html

[26] Гурченков А.А., Романенков А.М.. Оптимальное управление движением жидкости со свободной поверхностью. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/613.html

[27] Гурченков А.А., Егорова Е.К. Особенности автоматизации синтеза булевых функций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http:// engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1167.html

[28] Гурченков А.А. Начально-краевая задача для уравнений динамики вращающейся жидкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/603.html

[29] Гурченков А.А. Управление вращающимися твердыми телами с жидким наполнением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/articles/297/297.pdf

[30] Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела*. Москва, Физматлит, 2010, 221 с.

[31] Гурченков А.А., Носов М.В., Цурков В.И. *Управление вращающимися твердыми телами с жидкостью*. Москва, Физматлит, 2011, 202 с.

Статья поступила в редакцию 18.06.2014

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Гурченков А.А., Башкина Д.В., Велисова Н.Т. Энергетический спектр в одной задаче о квантовом ротаторе. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 4, URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/1323.html

Гурченков Анатолий Андреевич родился в 1939 г., окончил МИФИ в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 120 научных работ, 10 из которых – монографии. Сфера научных интересов: управление вращательными твердыми телами с жидким наполнением, устойчивость динамических систем с жидкостью. e-mail: challenge2005@mail.ru

Вилисова Нина Трофимовна – канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ. Сфера научных интересов: задачи устойчивости твердых тел с упругими стенками, динамика гибридных систем.

Башкина Дарья Валерьевна – магистр МАТИ – Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского. Сфера научных интересов: оптимизация, динамика жидконаполненных гироскопов.
e-mail: king.king.1001@gmail.com

Energy spectrum in a problem of a quantum rotator

© A.A. Gurchenkov, D.V. Bashkina, N.T. Velisova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow 105005, Russia

The study tested the spectrum of eigenvalues of quantum systems, in the classical limit admitting the existence of quadratic ones in the momenta of the first integrals. For example, we consider the problem of two-dimensional potential well of finite depth and quantum rotator. We made a comparison of bifurcations in classical and quantum problems. The research showed that the presence of the additional integral imposes a partial ban on the existence of separatrix contours. We examined an algebraic structure of classical integrals, which determines the possibility of bringing Hamiltonian function to Liouville type and separation of variables in Hamilton — Jacobi equation, which entails the separation of variables in Schrödinger equation.

Keywords: *dynamical systems, bifurcation, Hamiltonian systems.*

REFERENCES

[1] Eleonskiy V.M., Kulagin N.E. Domennye granitsy, solitony i fazovye perekhody [Domain walls, solitons, and phase transitions]. *Sb. Issledovaniya po fizike kineticheskikh yavleniy* [Collected studies in physics of kinetic phenomena]. Sverdlovsk, Ufa Sci. Cen. Acad. Sci. USSR, 1984, pp. 56–65.

[2] Eleonskiy V.M., Kulagin N.E. *ZhETF — Journal of Experimental and Theoretical Physics,* 1983, vol. 84, iss. 2, pp. 616–628.

[3] Eleonskiy V.M., Kulagin N.E. *ZhETF — Journal of Experimental and Theoretical Physics,* 1987, vol. 93, iss. 4 (10), pp. 1436–1446.

[4] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A, Marychev O.I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 800 p.

[5] Abromovits M., Stigan I., eds. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam* [Handbook of Mathematical Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 832 p.

[6] Beitmen G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Ellipticheskie i avtomorfnye funktsii. Funktsii Lame i Mat'e* [Higher transcendental functions. Elliptic and automorphic functions. Lame and Mathieu functions]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 300 p.

[7] Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii. Formuly, grafiki, tablitsy* [Special functions. Formulas, graphs, tables]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 344 p.

[8] Gurchenkov A.A., Esenkov A.S., Tsurkov V.I. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Control Theory and Systems,* 2006, no. 3, pp. 82–89.

[9] Gurchenkov A.A., Esenkov A.S., Tsurkov V.I. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Control Theory and Systems,* 2006, no. 1, pp. 141–148.

[10] Gurchenkov A.A., Esenkov A.S., Tsurkov V.I. *Avtomatika i telemekhanika — Automatics and Telemechanics,* 2007, no. 2, pp. 81–94.

[11] Gurchenkov A.A., Nosov M.V, Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies.* CRC Press, 2013, 147 p.

[12] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki — Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 1993, vol. 33, no. 2.

[13] Tsurkov V.I. Aggregation in a branch manufacturing problem and its extension. *Proc. 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing, INCOM '09,* 2009, pp. 310–312.

[14] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Dokl. Akademii nauk — Acad. Sci. reports,* 1994, vol. 336, no. 1.

[15] Gurchenkov A.A. *Izv. vuzov. Ser. Priborostroenie — University Proced. Ser. Instrument Engineering,* 2001, vol. 44, no. 2, p. 44.

[16] Gurchenkov A.A. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal — Journal of Engineering Physics,* 2002, vol. 75, no. 3, pp. 28–32.

[17] Gurchenkov A.A., Yalamov Y.I. *Doklady Physics,* 2002, vol. 47, no. 1, pp. 25–28.

[18] Gurchenkov A.A. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics,* 2002, vol. 75, no. 3, p. 554.

[19] Gurchenkov A.A. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Applied Mechanics and Technical Physics,* 2001, vol. 42, no. 4, pp. 48–51.

[20] Gurchenkov A.A., Korneev V.V., Nosov M.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics,* 2008, vol. 72, no. 6, pp. 904–911.

[21] Gurchenkov A.A. *Dokl. Akademii nauk — Acad. Sci. reports,* 2002, vol. 382, no. 4, p. 476.

[22] Gurchenkov A.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics,* 2002, vol. 66, iss. 2, pp. 251–255.

[23] Gurchenkov A.A., Eleonskiy V.M., Kulagin N.E. *Sloistye struktury v nelineinykh vektornykh polyakh* [Layered structures in nonlinear vector fields]. Moscow, Comp. Center RAS Publ., 2007, 177 p.

[24] Gurchenkov A.A., Kulagin N.E. *Ob uzorakh simmetrii v prostykh modeliakh nelineinogo skaliarnogo polia* [Patterns of symmetry in simple models of nonlinear scalar field]. Moscow, Comp. Center RAS, 2004, 84 p.

[25] Gurchenkov A.A., Moroz I.I., Popov N.N. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, iss. 9. Available at: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1166.html

[26] Gurchenkov A.A., Romanenkov A.M. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, iss. 2. Available at: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/613.html

[27] Gurchenkov A.A., Egorova E.K. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, iss. 12. Available at: http:// engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1167.html

[28] Gurchenkov A.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, iss. 2. Available at: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/603.html

[29] Gurchenkov A.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2012, iss. 7. Available at: http://engjournal.ru/articles/297/297.pdf

[30] Gurchenkov A.A. *Dinamika zavikhrennoi zhidkosti v polosti vrashchayushchegosya tela* [Dynamics of swirling liquid in the cavity of the rotating body]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 221 p.

[31] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Upravlenie vrashchayushchimisya tverdymi telami s zhidkostyu* [Control of rotating solids with the fluid]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 202 p.

Gurchenkov A.A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Higher Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 120 scientific works, 10 of them are monographs. Scientific interests include control of rotational liquid filled solids, the stability of dynamical systems with a liquid. e-mail: challenge2005@mail.ru

Velisova N.T., Ph.D., Assoc. Professor of theHigher Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 scientific works. Scientific interests include problems of solids with elastic walls and their stability, the dynamics of hybrid systems.

Bashkina D.V., Master of the Russian State Technological University named after K.E. Tsiolkovsky. Scientific interests include optimization, dynamics of liquid-filled gyroscopes.