УДК 532.516.5, 532.5.011.12

Движение твердого тела в вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса

© А.А. Гурченков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрено твердое тело произвольной геометрии, движущееся в вязкой несжимаемой жидкости, движение тела предполагается заданным. Исследован случай возмущенного относительно программного движения твердого тела, а именно слабовозмущенное либрационное движение. Введены две декартовы системы координат: одна неподвижна в инерциальном пространстве, другая жестко связана с твердым телом. Положение связанной системы координат относительно неподвижной характеризуется вектором перемещения и вектором поворота, которые полагаются малыми в смысле близости второго порядка. Задача решена в линейной постановке. Решение находится методом пограничного слоя, при этом в качестве начального приближения взяты функции, удовлетворяющие линеаризованным уравнениям Навье – Стокса.

Ключевые слова: *либрационное движение, вязкая жидкость, уравнения Навье – Стокса, динамика твердого тела.*

Введение. Рассмотрим движение твердого тела G в вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν. Введем две системы прямоугольных декартовых координат: $O_1x_1x_2x_3$ и $O_1y_1y_2y_3$. Система $O_1y_1y_2y_3$ неподвижна в инерциальном пространстве, а $O_1x_1x_2x_3$ жестко связана с твердым телом. Положение связанной системы координат относительно неподвижной характеризуется векторами перемещения $u(t)$ и поворота $\theta(t)$. Задача состоит в определении векторов $u(t)$ и $\theta(t)$ как функций времени, если известны главный вектор F^0 и главный момент M^0 системы внешних сил (за исключением жидкости), действующих на тело.

Векторы $u(t)$, $\theta(t)$, а также поле скоростей жидкости $V(x_1, x_2, x_3, t)$ полагаются малыми в смысле близости второго порядка. Число Рейнольдса в дальнейшем будем полагать большим:

$$\mathrm{Re} = l^{-2}\nu^{-1}T^{-1} \gg 1, \tag{1}$$

где l – характерный размер тела; T – характерное время движения (например, период колебаний).

Не ограничивая общности, будем считать, что масштабы длины и времени выбраны так, что $l \sim 1$, $T \sim 1$. Тогда условие (1) означает, что $\nu \ll 1$.

1. Гидродинамическая задача. Рассмотрим движение жидкости, занимающей бесконечную область D, ограниченную поверхностью тела S. Будем считать движение тела заданным. Линеаризованные уравнения Навье – Стокса, описывающие движение жидкости, а также граничные и начальные условия запишем в системе координат $O_1x_1x_2x_3$, жестко связанной с телом:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla p + \nu \Delta V, \ \operatorname{div} V = 0, \ p = \frac{p'}{\rho} + U \text{ в } D;$$

$$V = \dot{u} + \dot{\theta} \times r \text{ на } S; \ V \to 0 \text{ при } |r| \to \infty; \ V = V_0(r) \text{ при } t = t_0, \qquad (2)$$

где V – скорость жидкости; p' – давление в ней; ρ – плотность жидкости; U – потенциал массовых сил; r – радиус-вектор, отсчитанный от полюса O_1 сопутствующей системы координат $O_1x_1x_2x_3$.

Начальное распределение скоростей должно быть подчинено следующим условиям:

$$\operatorname{div} V_0 = 0 \text{ в } D; \ V_0 = \dot{u} + \dot{\theta} \times r \text{ на } S; \ V \to 0 \text{ при } |r| \leftrightarrow \infty.$$

Решение задачи (2) при условии (1) находим методом пограничного слоя [1]:

$$V = \upsilon + w, \ \upsilon = \upsilon^0 + v^{1/2}\upsilon + v\upsilon^2 + \ldots; \ p = q + s, \ q = q^0 + v^{1/2} q^1 + vq^2 + \ldots$$

Здесь w, s – функции типа пограничного слоя, которые также могут быть разложены в ряды по возрастающим степеням $v^{1/2}$. Не останавливаясь на общей схеме рекуррентного процесса построения решения, отметим, что k-е приближение асимптотического метода позволяет определять поле скоростей жидкости с погрешностью $v^{(k+1)/2}$.

В качестве нулевого приближения возьмем функции, удовлетворяющие уравнениям движения идеальной жидкости и соответствующим граничным условиям:

$$\frac{\partial \upsilon^0}{\partial t} = -\nabla q^0, \ \operatorname{div} \upsilon^0 = 0 \text{ в } D;$$

$$\upsilon^0 n = \dot{u} n + (\dot{\theta} \times r) n \text{ на } S; \ \upsilon^0 \to 0 \text{ при } |r| \to \infty, \qquad (3)$$

где n – нормаль к поверхности S, внешняя по отношению к области D.

Движение идеальной жидкости, описываемое уравнениями (3), обладает потенциалом скоростей φ^0, так что $\upsilon = \nabla\varphi^0$. При этом

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i \Phi_i + \dot{\theta}_i \Psi_i, \qquad (4)$$

где $\dot{u}_i, \dot{\theta}_i \left(i=1,2,3\right)$ – проекции векторов на оси связанной системы координат; Φ_i, Ψ_i – потенциалы поступательного и вращательного движений.

Потенциалы Φ_i, Ψ_i удовлетворяют краевым задачам

$$\Delta\Phi_i = 0 \text{ в } D;\ \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = n_i = ne_i \text{ на } S;\ \left|\nabla\Phi_i\right| \to 0 \text{ при } \left|r\right| \to \infty;$$

$$\Delta\Psi_i = 0 \text{ в } D;\ \frac{\partial\Psi_i}{\partial n} = \left(r\times n_i\right)e_i \text{ на } S;\ \left|\nabla\Psi_i\right| \to 0 \text{ при } \left|r\right| \to \infty, \qquad (5)$$

где e_i – орты системы координат $O_1x_1x_2x_3$; n_i – проекции нормали на i-ю ось.

В качестве первого приближения, используя схему асимптотического метода пограничного слоя, получим систему уравнений для функций υ^1, φ^1:

$$\upsilon^1 = -\nabla\varphi^1;\ q^1 = -\varphi^1_i + c^1\left(t\right);$$

$$\Delta\varphi^1 = 0 \text{ в } D;\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial n} = -\frac{wn}{\sqrt{v}} \text{ на } S;\ \left|\nabla\varphi^1\right| \to 0 \text{ при } \left|r\right| \to \infty, \qquad (6)$$

где $c^1(t)$ – произвольная функция времени.

Для функций w и s справедливы следующие уравнения, начальные и граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla s + v\Delta w,\ \operatorname{div} w = 0 \text{ в } D;$$

$$w^* = \dot{u} + \dot{\theta}\times r - \nabla\varphi^0 \text{ на } S;\ w\big|_{t=t_0} = 0;\ w \to 0 \text{ при } \left|r\right| \to \infty. \qquad (7)$$

Звездочкой обозначена проекция вектора на плоскость, касательную к S.

Асимптотическое решение задачи (7) имеет вид

$$s = 0,\ w = w_s + w_n,$$

где

$$w_S = \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi v}}\int_{t_0}^{t} \frac{\left(\dot{u} + \dot{\theta}\times r - \nabla\varphi^0\right)\Big|_S}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} e^{\left[-\frac{\zeta^2}{4v\left(t-\tau\right)}\right]} d\tau;$$

$$w_n = n\sqrt{\frac{v}{\pi}}\int_{t_0}^{t} \frac{\operatorname{div}\left(\dot{u} + \dot{\theta}\times r - \nabla\varphi^0\right)}{\left(t-\tau\right)^{1/2}} e^{\left[-\frac{\zeta^2}{4v\left(t-\tau\right)}\right]} d\tau, \qquad (8)$$

(w_S, w_n – соответственно касательная и нормальная составляющие к S вектора w; $f\big|_S$ – ограничение значений функции f на поверхность S; div – двумерная операция дивергенции на поверхности S).

Асимптотическое решение задачи (2) выражается в первом приближении следующим образом:

$$\upsilon = \nabla\varphi^0 + v^{1/2}\nabla\varphi^1 + w;\;\; p^1 = -\rho U - \rho\left(\varphi_t^0 + v^{1/2}\varphi_t^1 + c(t)\right), \tag{9}$$

где φ^0, φ^1, w являются решениями краевых задач (3), (6), (7); $c(t)$ – произвольная функция времени.

2. Уравнения движения тела в жидкости. Проведем сферу S_R радиусом R с центром в начале координат O и применим законы изменения количества движения и кинетического момента к системе тело – жидкость, заключенных в объеме D_R между поверхностями S и S_R:

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint\limits_{S_R} p' n dS + \iint\limits_{S_R}\left[Tn - \rho\upsilon(\upsilon n)\right] dS + F^0; \tag{10}$$

$$Q = m\dot{u} + m\left(\dot{\theta}\times r_0\right) + \rho\int\limits_{D_r}\upsilon dD. \tag{11}$$

Здесь Q – количество движения системы; r_0 – радиус-вектор центра масс тела, отсчитанный от полюса O_1; m – масса твердого тела; T – тензор вязких напряжений:

$$T_{ik} = \rho v\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right).$$

Подставляя (11) в (10) и используя (9), получим

$$m\ddot{u} + m\left(\dot{\theta}\times r_0\right) + \rho\frac{d}{dt}\int\limits_{D_R}\nabla\varphi dD + \rho\frac{d}{dt}\int\limits_{D_r} w dD =$$

$$= \rho\iint\limits_{S_R}\varphi_t n dS + \rho\iint\limits_{S_R} U n dS + \rho c(t)\iint\limits_{S_R} n dS + \iint\limits_{S_R}\left[Tn - \rho\upsilon(\upsilon n)\right] dS + F^0, \tag{12}$$

где $\varphi = \varphi^0 + v^{1/2}\varphi^1$ – гармоническая функция.

Используя теорему Остроградского – Гаусса и неподвижность поверхности S_R, запишем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D_R}\nabla\varphi dD = \frac{d}{dt}\left[\int\limits_{S}\varphi n dS + \int\limits_{S_R}\varphi n dS\right] = \frac{d}{dt}\int\limits_{S}\varphi n dS + \int\limits_{S_R}\varphi_t n dS. \tag{13}$$

Главный вектор системы сил $\boldsymbol{F}^0$ представим в виде суммы, выделив массовые силы:

$$F^0 = -\rho\int\limits_{D_R}\nabla U dD + F + mg. \tag{14}$$

Первый член выражения (14) можно преобразовать, используя теорему Остроградского – Гаусса и учитывая соотношение $U = -gr$:

$$-\rho \int_{D_R} \nabla U dD = -\rho \left[\int_{S_R} UndS + \int_{S} UndS \right] =$$

$$= -\rho \int_{S_R} UndS + \rho \int_{G} \nabla U dG = -\rho \int_{S_R} UndS - \rho G g.$$

Преобразуем интегралы, входящие в (13), используя граничные условия (5) и теоремы Гаусса и Грина:

$$\rho \int_S \varphi n dS = \rho \int_S \varphi \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} dS = \rho \sum_{i=1}^{3} e_i \int_S \Phi_i \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS =$$

$$= \rho \sum_{i=1}^{3} e_i \left[\int_S \Phi_i \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dS + v^{1/2} \int_S \Phi_i \frac{\partial \varphi^1}{\partial n} dS \right]; \tag{15}$$

$$\rho \int_S \Phi_i \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dS = \rho \sum_{j=1}^{3} \left[\dot{u}_j \int_S \Phi_i n_j dS + \dot{\theta}_j \int_S (r \times n) e_i \Phi_i dS \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left[M_{ij} \dot{u}_j + \Gamma_{ij} \dot{\theta}_j \right], \tag{16}$$

где M_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ – компоненты тензора присоединенных масс; Γ_{ij} – компоненты тензора статистических моментов жидкости:

$$M_{ij} = \rho \int_S \Phi_i n_j dS = \rho \int_S \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS;$$

$$\Gamma_{ij} = \int_S \Phi_i (r \times n) e_j \, dS = \int_S \Phi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} dS. \tag{17}$$

Второй интеграл из (15), используя условия (6) на S и теорему Гаусса, можно переписать в виде

$$v^{1/2} \int_S \Phi_i \frac{\partial \varphi^1}{\partial n} dS = -\int_S \Phi_i w n \, dS = -\int_S \nabla \Phi_i w \, dS. \tag{18}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$w - \sum_{i=1}^{3} e_i (\nabla \Phi_i w) = \sum_{i=1}^{3} e_i \left[(e_i - \nabla \Phi_i) w \right]. \tag{19}$$

Из (18) и (19) найдем

$$\int_D w dD + \sum_{i=1}^{3} e_i \nu^{1/2} \int_S \Phi_i \frac{\partial \varphi^1}{\partial n} dS = \sum_{i=1}^{3} e_i \left[\int_D \left(e_i - \nabla \Phi_i \right) w dD \right]. \tag{20}$$

Преобразуем интеграл (20):

$$\int_D \left(e_i - \nabla \Phi_i \right) w dD = \int_S \left(e_i - \nabla \Phi_i \right) \left(\int_0^{\infty} w^* d\zeta \right) dS. \tag{21}$$

При переходе от объемного интеграла к поверхностному в формуле (21) использовано экспоненциальное затухание функции пограничного слоя и малость параметра ν. Проведем интегрирование по ζ в (21), подставляя выражение для w^* из (8):

$$\int_0^{\infty} w^* d\zeta = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u} + \dot{\theta} \times r - \nabla \varphi^0}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \tag{22}$$

Используя соотношения для потенциала течения идеальной жидкости φ^0 (4), выпишем подынтегральный числитель (22) в виде

$$\dot{u} + \dot{\theta} \times r - \nabla \varphi^0 = \sum_{j=1}^{3} \left[\left(e_j - \nabla \Phi_j \right) \dot{u}_j - \left(r \times e_j + \nabla \Psi_j \right) \dot{\theta}_j \right]. \tag{23}$$

Подстановка (23) в (22) и затем (22) в (21) позволяет записать соотношение (20) в виде

$$\rho \sum_{i=1}^{3} e_i \left[\int_D \left(e_i - \nabla \Phi_i \right) w dD_{ij} \right] = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \sum_{j=1}^{3} \left[E_{ij} \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}_j}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right], \tag{24}$$

где

$$E_{ij} = \int_S \left(\nabla \Phi_i - e_i \right) \left(\nabla \Phi_j - e_j \right) dS; \;\; D_{ij} = \int_S \left(\nabla \Phi_i - e_i \right) \left(r \times e_j + \nabla \Psi_j \right) dS. \tag{25}$$

Подставляя (24) в (20); (20), (16) и (15) в (13) и (12), придем к следующему уравнению изменения количества движения:

$$\left(m I_0 + M \right) \ddot{u} + m \left(\ddot{\theta} \times r_0 \right) + \Gamma \ddot{\theta} + \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{d}{dt} \left[E \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}} + D \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\theta}(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \right] =$$

$$= F + \left(\rho^0 - \rho \right) g G, \tag{26}$$

где I_0 – единичный тензор; Γ, E, D, M – тензоры с компонентами Γ_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, M_{ij} (i, j = 1, 2, 3) соответственно, определяемые формулами (17), (25).

Составим уравнения изменения кинетического момента для системы тело – жидкость в области D_R:

$$\frac{dK}{dt} = -\iint\limits_{S_r} r \times p' n dS + \iint\limits_{S_r} r \times \left[Tn - \rho\upsilon(\upsilon n) \right] dS + M,$$

$$K = m(r_0 \times \dot{u}) + J^0 \dot{\theta} + \rho \int\limits_{D_r} r \times \upsilon dD.$$

Здесь J^0 – тензор инерции твердого тела относительно полюса O_1.

Проводя выкладки, аналогичные предыдущим, и опуская громоздкие вычисления, запишем уравнения изменения кинетического момента системы тело – жидкость в виде

$$\left(J^0 + J\right)\ddot{\theta} + m\left(r_0 \times \ddot{u}\right) + \Gamma^* \ddot{u} + \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{d}{dt} \left[C \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\dot{\theta}(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}} + D^* \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \right] =$$

$$= M + G\left(\rho^0 r_0 - \rho r_G\right) \times g, \qquad (27)$$

где J, Γ^*, C, D^* – тензоры с компонентами $J_{ij}, \Gamma^*_{ij}, C_{ij}, D^*_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, определяемые следующими формулами:

$$J_{ij} = \int\limits_S \Psi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} dS = \int\limits_S \Psi_i \left(r \times n\right) e_i dS;$$

$$\Gamma^*_{ij} = \int\limits_S \Psi_i n_j dS = \int\limits_S \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \int\limits_S \Phi_j \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} dS = \Gamma_{ji};$$

$$D^*_{ij} = \int\limits_S \left(\nabla \Phi_j - e_j\right)\left(r \times e_i + \nabla \Psi_i\right) dS = D_{ij};$$

$$C_{ij} = \int\limits_S \left(\vec{r} \times \vec{e}_j + \nabla \Psi_i\right)\left(r \times e_i + \nabla \Psi_i\right) dS; \qquad (28)$$

$r_G = \dfrac{1}{G} \int\limits_G r dG$ – центр давлений.

Уравнения (26) и (27) полностью описывают динамику тела в жидкости. К ним необходимо добавить начальные условия в виде $u(t_0), \theta(t_0), \dot{u}(t_0), \dot{\theta}(t_0)$. При $\nu = 0$ уравнения переходят в известные уравнения тела в идеальной жидкости.

Влияние вязкой жидкости на движение тела определяется тензорными коэффициентами E, D, C. Эти коэффициенты выражаются только через потенциалы Стокса – Кирхгофа, т. е. через решения задачи о движении тела в идеальной жидкости.

Таким образом, решение задачи о движении тела в вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса сведено к решению задачи о движении тела в идеальной жидкости, вычислению коэффициентов в виде квадратур и дальнейшему интегрированию системы обыкновенных интегродифференциальных уравнений (26), (27).

Уравнения (26), (27) являются линейными интегродифференциальными уравнениями Вольтерры. Для их решения могут быть применены известные методы – аналитические (например, преобразование Лапласа) или численные. Кроме того, уравнения содержат малый параметр $\sqrt{\nu}$, что открывает возможность асимптотического интегрирования соответствующими методами (например, методами Крылова – Боголюбова).

3. Свойства потенциалов Стокса – Кирхгофа. В случае симметричной задачи уравнения (26), (27) могут быть значительно упрощены.

Пусть O_1x_3 – ось симметрии тела, т. е. если точка с координатами (x_1, x_2, x_3) лежит на поверхности S, то и точка $(-x_1, -x_2, x_3)$ также лежит на S.

Тогда для проекций нормали на оси связанной системы координат можно использовать равенства

$$n_i\left(-x_1, -x_2, x_3\right) = -n_i\left(x_1, x_2, x_3\right),\ i = 1, 2;$$
$$n_3\left(-x_1, -x_2, x_3\right) = n_3\left(x_1, x_2, x_3\right), \tag{29}$$

и потенциалы Стокса – Кирхгофа обладают свойствами

$$\Phi_i\left(-x_1, -x_2, x_3\right) = -\Phi_i\left(x_1, x_2, x_3\right),\ \Phi_3\left(-x_1, -x_2, x_3\right) = \Phi_3\left(x_1, x_2, x_3\right);$$
$$\Psi_i\left(-x_1, -x_2, x_3\right) = -\Psi_i\left(x_1, x_2, x_3\right),\ \Psi_3\left(-x_1, -x_2, x_3\right) = \Psi_3\left(x_1, x_2, x_3\right),$$
$$i = 1, 2. \tag{30}$$

В этом случае для тензоров уравнений движения справедливы выражения

$$M_{ij} = J_{ij} = C_{ij} = E_{ij} = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3;$$
$$\Gamma_{ii} = D_{ii} = 0,\ \Gamma_{3i} = \Gamma_{i3} = D_{3i} = D_{i3} = 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Рассмотрим следующий тип симметрии. Пусть O_1x_3 – ось, перпендикулярная плоскостям симметрии тела S, т. е. если точка с координатами (x_1, x_2, x_3) лежит на поверхности S, то точка $(x_1, x_2, -x_3)$ также лежит на поверхности S. Тогда для проекции нормали к поверхности S на оси связанной системы координат O_1x_1, x_2, x_3 справедливы отношения:

$$n_i(x_1, x_2, -x_3) = n_i(x_1, x_2, x_3), \; i = 1, 2;$$
$$n_3(x_1, x_2, -x_3) = -n_3(x_1, x_2, x_3). \tag{32}$$

При этом потенциалы Стокса – Кирхгофа обладают следующими свойствами:

$$\Phi_i(x_1, x_2, -x_3) = \Phi_i(x_1, x_2, x_3), \; \Phi_3(x_1, x_2, -x_3) = -\Phi_3(x_1, x_2, x_3);$$
$$\Psi_i(x_1, x_2, -x_3) = -\Psi_i(x_1, x_2, x_3), \; \Psi_3(x_1, x_2, -x_3) = \Psi_3(x_1, x_2, x_3),$$
$$i = 1, 2. \tag{33}$$

В этом случае для тензоров уравнений движения имеем

$$M_{ij} = M_{ji}, \; J_{ij} = J_{ji}, \; C_{ij} = C_{ji}, \; E_{ij} = E_{ji}, \; i, j = 1, 2, 3;$$
$$M_{i3} = J_{i3} = C_{i3} = E_{i3} = 0, \; i = 1, 2;$$
$$\Gamma_{ij} = D_{ij} = 0, \; \Gamma_{33} = D_{33} = 0, \; i = 1, 2. \tag{34}$$

В качестве примера рассмотрим тело в форме сферы радиусом a. Поместим начало координат системы $O_1 x_1, x_2, x_3$ в центр сферы. Решение краевых задач (5) имеет вид

$$\Phi_i = -\frac{a^3}{2|r|^3} x_i; \; \Psi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя соотношения (29)–(34), нетрудно получить

$$\Gamma_{ij} = D_{ij} = J_{ij} = 0, \; i, j = 1, 2, 3;$$
$$E_{ij} = M_{ij} = C_{ij} = 0, \; i \neq j, \; i, j = 1, 2, 3.$$

Проводя интегрирование выражений (17), (25) и (28), запишем следующие формулы для коэффициентов:

$$M_{ii} = \frac{2}{3}\pi\rho a^3; \; E_{ii} = 6\pi\rho a^2; \; C_{ii} = \frac{8}{3}\pi\rho a^4, \; i = 1, 2, 3.$$

Пусть $g = 0$, тогда уравнения движения (26), (27) для шара примут вид

$$\left(m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\right)\ddot{u} + 6a^2\sqrt{\pi\nu}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F;$$

$$J^0\ddot{\theta} + \frac{8}{3}\pi\rho a^4\sqrt{\pi\nu}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{\theta}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = M. \tag{35}$$

Первое из уравнений (35) описывает движение шара вдоль некоторой оси со скоростью $\dot{u}$, второе – вращение шара с угловой скоростью $\dot{\theta}$.

Уравнения (35) совпадают с решениями аналогичных задач для шара, полученными на основе точного решения уравнений Навье – Стокса, если в последних пренебречь членами порядка ν.

Заключение. Полученные результаты имеют прямое отношение к задачам управления движением вращающихся твердых тел с жидкостью [2–24]. Дальнейшие исследования будут направлены на декомпозиционные преобразования упомянутых оптимизационных задач с использованием [25–27].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крейн С.Г., Моисеев Н.Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. *ПММ*, 1957, т. 21, вып. 2, с. 97–114.

[2] Гурченков А.А., Носов М.В., Иванов И.М. Оптимальное управление движением волчка с жидким наполнением. *XVII Всерос. конф. «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики»*. Абрау-Дюрсо, 15–21 сентября 2008 г., с. 143–144.

[3] Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. 1. *Известия РАН ТСУ*, 2006, № 1, с. 135–142.

[4] Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. 2. *Известия РАН ТСУ*, 2006, № 3, с. 82–89.

[5] Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей вязкую жидкость. *Автоматика и телемеханика*, 2007, № 2, с. 81–94.

[6] Гурченков А.А., Носов М.В., Цурков В.И. *Управление вращающимися твердыми телами с жидкостью*. Москва, Физматлит, 2011, с. 202.

[7] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRC Press, 2013, p. 147.

[8] Гурченков А.А. Момент сил внутреннего трения быстровращающегося цилиндрического сосуда, заполненного вязкой жидкостью. *Известия вузов. Приборостроение*, 2001, т. 44, № 2, с. 44.

[9] Gurchenkov A.A. Stability of a Fluid-Filled Gyroscope. *Инженерно-физический журнал*, 2002, т. 75, № 3, с. 28–32.

[10] Gurchenkov A.A., Yalamov Y.I. Unsteady viscous fluid flow between rotating parallel walls with allowance for thermal slip along one of them. *Doklady Physics*, 2002, vol. 47, no 1, pp. 25–28.

[11] Gurchenkov A.A. Stability of a fluid-filled gyroscope. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics*, 2002, vol. 75, no 3, p. 554.

[12] Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии поперечного потока. *Прикладная механика и техническая физика*, 2001, т. 42, № 4, с. 48–51.

[13] Гурченков А.А., Корнеев В.В., Носов М.В. Динамика слабовозмущенного движения заполненного жидкостью гироскопа и задача управления. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, № 6, с. 904–911.

[14] Гурченков А.А. Диссипация энергии в колеблющейся полости с вязкой жидкостью и конструктивными неоднородностями. *Докл. Академии наук*, 2002, т. 382, № 4, с. 476.

[15] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRS Press, 2013, 147 p.

[16] Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками. *Прикладная математика и механика*, 2002, т. 66, вып. 2, с. 251–255.

[17] Гурченков А.А., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. *Слоистые структуры в нелинейных векторных полях*. Москва, Изд-во ВЦ РАН, 2007, 177 с.

[18] Гурченков А.А., Кулагин Н.Е. *Об узорах симметрии в простых моделях нелинейного скалярного поля*. Москва, Изд-во ВЦ РАН, 2004, 84 с.

[19] Гурченков А.А., Мороз И.И., Попов Н.Н. Модель псевдориманова сферически симметричного пространства с нестационарной лоренц-инвариантной метрикой. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1166.html

[20] Гурченков А.А., Романенков А.М. Оптимальное управление движением жидкости со свободной поверхностью. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/613.html

[21] Гурченков А.А., Егорова Е.К. Особенности автоматизации синтеза булевых функций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http:// engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1167.html

[22] Гурченков А.А. Начально-краевая задача для уравнений динамики вращающейся жидкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/603.html

[23] Гурченков А.А. Управление вращающимися твердыми телами с жидким наполнением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/articles/297/297.pdf

[24] Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела*. Москва. Физматлит, 2010. 221 с.

[25] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Approximation and decomposition by extremal graphs. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1993, т. 33, № 2.

[26] Tsurkov V. Aggregation in a branch manufacturing problem and its extension. *Proc. 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing, INCOM '09*, 2009, pp. 310–312.

[27] Миронов А.А., Цурков В.И. Класс распределительных задач с минимаксным критерием. *Докл. Академии наук*, 1994, т. 336, № 1.

Статья поступила в редакцию 27.05.2014

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Гурченков А.А. Движение твердого тела в вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 3, URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/1322.html

Гурченков Анатолий Андреевич родился в 1939 г., окончил МИФИ в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 120 научных работ, 10 из которых – монографии. Сфера научных интересов: управление вращательными твердыми телами с жидким наполнением, устойчивость динамических систем с жидкостью. e-mail: challenge2005@mail.ru

Motion of a solid body in a viscous fluid at high Reynolds numbers

© A.A. Gurchenkov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow 105005, Russia

We consider a solid body of an arbitrary geometry moving in a viscous incompressible fluid. Movement of the body is assumed to be given. We examine the case of perturbed motion of a solid body relatively to the programmed motion, namely weakly perturbed libration movement. Two Cartesian coordinate systems are introduced. One is fixed in inertial space; the other is rigidly connected with the solid body. The position of the related coordinate system in relation to the fixed one is characterized by the displacement vector and rotation vector, which are considered to be small in terms of the proximity of the second order. The problem is solved in the linear formulation. The solution is found by the method of boundary layer, and the functions satisfying the linearized Navier — Stokes equations are taken as the initial approximation.

Keywords: *libration movement, viscous liquid, the Navier — Stokes equations, rigid body dynamics.*

REFERENCES

[1] Krein S.G., Moiseev N.N. O kolebaniyakh tverdogo tela, soderzhashchego zhidkost' so svobodnoi poverkhnost'yu [Oscillations of a solid body containing a liquid with a free surface]. *PMM* [App. Math., Inf. and Mech.], 1957, vol. 21, iss. 2, pp. 97–114.

[2] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Ivanov I.M. Optimal'noe upravlenie dvizheniem volchka s zhidkim napolneniem [Optimal control of movement of the liquid-filled top]. *XVII Vserossiyskaya konferentsiya "Teoreticheskie osnovy i konstruirovanie chislennykh algoritmov i reshenie zadach matematicheskoi fiziki"* [XVII National Conference «Theoretical Foundations and construction of numerical algorithms and solution of problems of mathematical physics.»]. Abrau-Dyurso, 15–21 September, 2008, pp. 143–144.

[3] Gurchenkov A.A., Esenkov A.S., Tsurkov V.I. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Control Theory and Systems,* 2006, no. 1, pp. 135–142.

[4] Gurchenkov A.A., Esenkov A.S., Tsurkov V.I. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Control Theory and Systems,* 2006, no. 3, pp. 82–89.

[5] Gurchenkov A.A., Esenkov A.S., Tsurkov V.I. *Avtomatika i telemekhanika — Automatics and Telemechanics,* 2007, no. 2, pp. 81–94.

[6] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Upravlenie vrashchayushchimisya tverdymi telami s zhidkostyu* [Control of rotating solids with the fluid]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 202 p.

[7] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies.* CRC Press, 2013, p. 147.

[8] Gurchenkov A.A. *Izv. vuzov. Ser. Priborostroenie — University Proceed. Ser. Instrument Engineering,* 2001, vol. 44, no. 2, p. 44.

[9] Gurchenkov A.A. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal — Journal of Engineering Physics,* 2002, vol. 75, no. 3, pp. 28–32.

[10] Gurchenkov A.A., Yalamov Y.I. Unsteady viscous fluid flow between rotating parallel walls with allowance for thermal slip along one of them. *Doklady Physics,* 2002, vol. 47, no 1, pp. 25–28.

[11] Gurchenkov A.A. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics,* 2002, vol. 75, no. 3, p. 554.

[12] Gurchenkov A.A. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Applied Mechanics and Technical Physics,* 2001, vol. 42, no. 4, pp. 48–51.

[13] Gurchenkov A.A., Korneev V.V., Nosov M.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics,* 2008, vol. 72, no. 6, pp. 904–911.

[14] Gurchenkov A.A. *Dokl. Akademii nauk — Acad. Sci. Reports,* 2002, vol. 382, no. 4, p. 476.

[15] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies.* CRS Press, 2013, 147 p.

[16] Gurchenkov A.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics,* 2002, vol. 66, iss. 2, pp. 251–255.

[17] Gurchenkov A.A., Eleonskiy V.M., Kulagin N.E. *Sloistye struktury v nelineinykh vektornykh polyakh* [Layered structures in nonlinear vector fields]. Moscow, Comp. Center RAS Publ., 2007, 177 p.

[18] Gurchenkov A.A., Kulagin N.E. *Ob uzorakh simmetrii v prostykh modelyakh nelineinogo skalyarnogo polya* [Patterns of symmetry in simple models of nonlinear scalar field]. Moscow, Comp. Center RAS, 2004, 84 p.

[19] Gurchenkov A.A., Moroz I.I., Popov N.N. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, iss. 9. Available at: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1166.html

[20] Gurchenkov A.A., Romanenkov A.M. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, iss. 2. Available at: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/613.html

[21] Gurchenkov A.A., Egorova E.K. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, iss. 12. Available at: http:// engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1167.html

[22] Gurchenkov A.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, iss. 2. Available at: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/603.html

[23] Gurchenkov A.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2012, iss. 7. Available at: http://engjournal.ru/articles/297/297.pdf

[24] Gurchenkov A.A. *Dinamika zavikhrennoi zhidkosti v polosti vrashchayushchegosya tela* [Dynamics of swirling liquid in the cavity of the rotating body]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 221 p.

[25] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 1993, vol. 33, no. 2.

[26] Tsurkov V.I. Aggregation in a branch manufacturing problem and its extension. *Proc. 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in* Manufacturing, *INCOM* '09, 2009, pp. 310–312.

[27] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Dokl. Akademii nauk — Acad. Sci. reports,* 1994, vol. 336, no. 1.

Gurchenkov A.A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Higher Mathematics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 120 scientific works, 10 of them are monographs. Scientific interests include control of rotational liquid filled solids, the stability of dynamical systems with a liquid. e-mail: challenge2005@mail.ru