УДК 517.9

Г. В. Гришина

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НОСИТЕЛЯ И НЕРЕАЛИЗУЕМЫХ УСЛОВИЯХ РОСТА РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В неограниченных областях различной геометрии рассматриваются полулинейные равномерно эллиптические уравнения второго порядка с младшими членами и нелинейностью степенного типа. На некомпактной части границы заданы однородные условия Неймана или Дирихле. Изучается вопрос о локализации носителя решений. Найдены нереализуемые условия роста положительных решений на бесконечности.

E-mail: galinavg@yandex.ru

Ключевые слова: *эллиптическое уравнение, полулинейное уравнение, компактный носитель, положительное решение, несуществование, неограниченная область.*

Рассмотрим решения $u(x)$ уравнения второго порядка

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} = f(x,u)\cdot \mathrm{sgn}u \tag{1}$$

в неограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$:

$$G = \{x = (\hat{x}, x_n)\colon |\hat{x}|^2 < x_n^{2q}, |x| > 1\}, \quad q \in \mathbb{R},$$

где $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $f(x,p)$ — ограниченные и измеримые функции в любой ограниченной подобласти области G, и выполнено условие равномерной эллиптичности

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2,$$

где $0 < \lambda \leqslant \Lambda$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, а также

$$f(x,p) \geqslant a|x|^{-s}|p|^{\sigma}, \quad a > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \sigma < 1.$$

Предположим, что u удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial G \cap \{|x| > r_0\}, \; r_0 > 1, \tag{2}$$

где ν обозначает внешнюю единичную нормаль к границе ∂G.

Уравнения такого типа возникают во многих приложениях и вызывают большой интерес уже в течение долгого времени [1]. Они входят в широкий класс уравнений типа Эмдена-Фаулера. Работа посвящена некоторым эффектам, обусловленным фактом наличия и видом нелинейного члена в уравнении. Знак нелинейного слагаемого в данном уравнении говорит о наличии абсорбции. При $0 < \sigma < 1$ для таких уравнений наблюдаются "мертвые зоны" решений. Мы рассматриваем случай $\sigma < 1$. При отрицательных значениях этого показателя имеет смысл изучение только знакопостоянных решений, поскольку в противном случае правая часть будет иметь особенности при стремлении решения к нулю. В случае $\sigma > 1$ свойства решений принципиально другие, "мертвые зоны" не возникают, зато могут существовать взрывающиеся решения. Такие уравнения достаточно хорошо изучены.

Мы будем изучать сильные решения краевой задачи (1), (2), принадлежащие пространству $W_n^2(G \cap \{|x| > r\}) \cap C^1(\overline{G})$ для любого $r > 0$.

Нашей целью является установление предельного ограничения порядка роста решений на бесконечности, гарантирующего компактность носителя решения, то есть, существование "мертвой зоны" при $0 < \sigma < 1$. Из этих ограничений вытекает несуществование положительных решений в некоторых классах функций для $\sigma < 1$. Свойства решений существенным образом зависят от соотношений между параметрами задачи σ, s, n, λ/Λ, b_i и q. Геометрия области характеризуется параметром q. Для случая полубесконечного цилиндра ($q = 0$) детальное исследование поведения решений было проведено в работах автора [2, 3]. Некоторые другие вопросы, касающиеся свойств решений уравнения вида (1) рассматривались ранее в [4–8] как в цилиндрических областях, так и локально в окрестности границы или во внешности компакта. В настоящей статье будут рассмотрены другие типы областей. При $q = 1$ область имеет структуру конуса, при $q < 1$ — параболоида, при $q > 1$ — расширяющегося степенным образом "горлышка", а при $q < 0$ — сужающегося "горлышка". Показана точность установленных показателей для большинства случаев.

Для краткости изложения ряд результатов будет сформулирован только для модельного уравнения

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} = f(x, u) \cdot \mathrm{sgn} u. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть $\sigma < 1$ и пусть $b_i(x) = o(1/|x|)$ при $|x| \to \infty$. Тогда не существует положительных решений u задачи (3), (2) в области G с параметром $q > 0$ таких, что выполняется одно из следующих условий:

1) $s = 2$ и $u(x) = o(\log^{\frac{1}{1-\sigma}} |x|)$ при $|x| \to \infty$;
2) $s \neq 2$ и $u(x) = o(|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ при $|x| \to \infty$.

Если $0 \leqslant \sigma < 1$ и решение u удовлетворяет одному из следующих условий, то u имеет компактный носитель.

Этот результат может быть уточнен для конических областей ($q = 1$) даже для случая модельной задачи (3), (2).

Теорема 2. Пусть $\sigma < 1$, и пусть $b_i(x) = o(1/|x|)$ при $|x| \to \infty$. Тогда не существует положительных решений u задачи (1), (2) в G с параметром $q = 1$ таких, что:

1) $\Lambda < n\lambda$ и выполняется одно из следующих условий:

а) $s = 2$, и $u(x) = o(\log^{\frac{1}{1-\sigma}} |x|)$ при $|x| \to \infty$;

б) $s \neq 2$, $\Lambda < n\lambda \leqslant 2\Lambda$, и $u(x) = o(|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ при $|x| \to \infty$;

в) $s < 2$ или $s \geqslant (n\lambda/\Lambda - 2)(1-\sigma)$, $n\lambda > 2\Lambda$, и $u(x) = o(|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ при $|x| \to \infty$;

г) $2 < s < 2 + (n\lambda/\Lambda - 2)(1 - \sigma)$, $n\lambda > 2\Lambda$, и $u(x) = o(1)$ при $|x| \to \infty$.

2) $n\lambda \leqslant \Lambda$ и выполняется одно из следующих условий:

а) $s < 1$, и $u(x) = o(|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ при $x \to \infty$;

б) $s \geqslant 1$, и $u(x) = o(|x|^{\frac{1-s}{1-\sigma}})$ при $x \to \infty$.

Если $0 \leqslant \sigma < 1$, и решение u удовлетворяет одному из этих условий, то u имеет компактный носитель.

Следствие. Для решений u задачи (3), (2) при $b_i(x) = o(1/|x|)$, когда $|x| \to \infty$, соответствующие условия из теоремы 2 имеют вид:

1) $n = 2$, и выполняется одно из следующих условий:

а) $s = 2$, и $u(x) = o(\log^{\frac{1}{1-\sigma}} |x|)$ при $|x| \to \infty$;

б) $s \neq 2$, и $u(x) = o(|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ при $|x| \to \infty$.

2) $n > 2$, и выполняется одно из следующих условий:

а) $s = 2$, и $u(x) = o(\log^{\frac{1}{1-\sigma}} |x|)$ при $|x| \to \infty$;

б) $s < 2$ или $s \geqslant 2 + (n - 2)(1 - \sigma)$, и $u(x) = o(|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ при $|x| \to \infty$;

в) $2 < s < 2 + (n - 2)(1 - \sigma)$, и $u(x) = o(1)$ при $|x| \to \infty$.

Замечание. Отметим также, что наличие членов с младшими производными и поведение коэффициентов при младших членах на бесконечности тоже влияют на предельный порядок роста решения на бесконечности. Так, например, в отсутствии членов первого порядка в уравнении (3) для случая $s = 2$ ограничение на поведение решения будет другим $u(x) = o(\log^{\frac{2}{1-\sigma}} |x|)$ при $|x| \to \infty$.

Теорема 3. Пусть $\sigma < 1$, и пусть $b_i(x) = O(1/|x|)$ при $|x| \to \infty$. Тогда не существует положительных решений u задачи (1), (2) в области G с любым действительным параметром q, такого, что выполняется одно из следующих условий:

1) $s < 1$, и $u(x) = o(|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ при $x \to \infty$;

2) $s \geqslant 1$, и $u(x) = o(|x|^{\frac{1-s}{1-\sigma}})$ при $x \to \infty$.

Если $0 \leqslant \sigma < 1$, и решение u удовлетворяет одному из этих условий, то u имеет компактный носитель.

Доказательства сформулированных утверждений основаны на использовании принципа максимума для равномерно эллиптических недивергентных уравнений. Применяя технику, развитую в [1, 2], мы строим функции сравнения $v(\rho)$, где $\rho^2 = q|\hat{x}|^2 + x_n^2$, имеющие определенное поведение на бесконечности, такие что

$$Lv \leqslant a|x|^{-s}|p|^{\sigma}.$$

При этом выбор аргумента функции сравнения обеспечивает выполнение однородного условия Неймана на некомпактной части границы $\partial G \cap \{|x| > r\}$, $r \geqslant r_0$. Отметим, что величина

$$q|\hat{x}|^2 + x_n^2$$

будет положительным при больших x_n даже, если q отрицательно. На первом шаге нужно рассмотреть $0 \leqslant \sigma < 1$, и показать, что если $u \to 0$ при $x \to \infty$, то u имеет компактный носитель. Тогда остается доказать, что всякое решение, имеющее ограничения роста на бесконечности, сформулированные выше, стремится к нулю при $x \to \infty$. Это завершит доказательство.

Если же в уравнении $\sigma < 0$, то этот случай может быть сведен к случаю положительного степенного показателя с помощью подстановки $u = w^{\gamma}$, где число $\gamma \in (0, 1)$.

Отметим, что все теоремы остаются верными и в случае однородного условия Дирихле на некомпактной части границы.

Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ, грант № 11-01-00989-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D i a z J. I. Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries. London: Pitman, 1985. 323 p.
2. G r i s h i n a G. V. Solutions of Second-Order Elliptic and Parabolic Equations of Emden-Fowler Type in Unbounded Domains // Russian Journal of Mathematical Physics. 2002. V. 9, No. 3. P. 253–274.
3. Г р и ш и н а Г. В. О компактности носителя решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка в полуцилиндре // Математические заметки. 1997. Т. 62, № 5. С. 700–711.
4. K a w o h l B. Remarks of Quenching // Documenta Mathematica. 1996. No. 1. P. 199–208.
5. K o n d r a t i e v V. A., V e r o n L. Asymptotic behavior of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations // Asymptotic Analysis. 1997. V. 14. P. 117–156.
6. K a w a n o N. On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations // Hiroshima Mathematical Journal. V. 14, No. 1. P. 125–158.
7. К о н д р а т ь е в В. А., Л а н д и с Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Математический сборник. 1988. Т. 135, № 3. С. 346–360.
8. L a n d i s E. M. Some properties of the solution of degenerating semilinear elliptic inequalities // Russian Journal of Mathematical Physics. 1993. V. 1, No. 4. P. 483–494.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012